1 Цилиндрический счетчик

Поле в счетчике с радиусами внутреннего (анод) и внешнего (катод) электродов соответственно a и b (при $r > a$)

$$E(r) = \frac{V_0}{r \ln \frac{b}{a}}$$

$$V(r) = V_0 \frac{\ln r/a}{\ln b/a}$$

На расстоянии r_c от центра поле достигает критического значения E_c, при котором начинается ударная ионизация.

В приближении, что в этой области вся энергия электрона при столкновении расходуется на ионизацию, $\langle\epsilon\rangle \simeq E\lambda = \frac{E}{\alpha}$. Если при этом $\alpha = kN\epsilon$, то можно получить:

$$M = \exp\left(\int\limits_a^{r_c} \alpha(r)\mathrm{d}r\right) = \exp\left[\sqrt{2kNE_c a}\sqrt{\frac{V_0}{V_T}}\left(\sqrt{\frac{V_0}{V_T}} - 1\right)\right] .$$

Здесь введено пороговое напряжение V_T, при котором на аноде достигается E_c:

$$\frac{V_0}{V_T} = \frac{r_c}{a} \qquad \sim 2 \div 10 \,.$$

В (не очень хорошем) приближении $V_0 \gg V_T$

$$M = Ke^{CV_0} = Ke^{Q_0} \,,$$

где $C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}}$ и Q_0 - соответственно емкость и заряд на единицу длины счетчика ($\epsilon_0 = 8.85$ пФ/м).

Типично $\lambda = 1/\alpha \sim 1 \div 10$ μм. На этом отрезке образуется около половины от числа пар лавины. Полный путь развития лавины $\sim r_c \sim 10\lambda$. При $r_c \sim 50$ μм и $v_e \sim 5$ см/μс время развития лавины и сбора электронов $t \lesssim 1$ нс.

2 Формирование сигнала на электродах

Теорема Рамо-Шокли:

- В пространстве между проводниками движется со скоростью $\vec{v}$ заряд Q. Пусть потенциал одного проводника относительно всех других (заземленных) есть V_0 (и не меняется от наличия Q). Тогда в его цепи возникает индуцированный ток

$$i(t) = \frac{(\vec{E}\vec{v})Q}{V_0}\,,$$

где $\vec{E}$ - поле в точке нахождения заряда в его отсутствие.

Согласно ей изменение напряжения на аноде (катоде) с емкостью $C_0 = Cl$ при перемещении заряда на $\mathrm{d}r$

$$\mathrm{d}v = \frac{Q}{lCV_0}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r\,.$$

Учитывая, что $\mathrm{d}r(e^-)$ мало, $\mathrm{d}V^-$ мало. Основной вклад - от *ионов.*

$$V^- = -\frac{Q}{lCV_0}\int\limits_a^{a+\lambda}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\ln\frac{a+\lambda}{a}$$

$$V^+ = -\frac{Q}{lCV_0}\int\limits_{a+\lambda}^{b}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\ln\frac{b}{a+\lambda}\,.$$

Полный сигнал на аноде $V = V^+ + V^- = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\ln\frac{b}{a} = -\frac{Q}{lC} = -\frac{Q}{C_0}$, отношение вкладов

$$\frac{V^-}{V^+} = \left.\frac{\ln(a+\lambda)-\ln a}{\ln b - \ln(a+\lambda)}\right|_{a=10\mu m, b=10mm, \lambda=1\mu m} \simeq 0.01\,.$$

- Временная форма сигнала

Пренебрегая вкладом e^- и считая $v^+ = \mu^+ E$:

$$V(t) = \int_0^t \mathrm{d}V = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\ln\frac{r(t)}{a}\,.$$

Найдем $r(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \mu^+ E = \mu^+\frac{CV_0}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r(t)} \qquad \Rightarrow$$

$$\int\limits_a^r r_0\mathrm{d}r_0 = \frac{\mu^+ CV_0}{2\pi\epsilon_0}\int_0^t \mathrm{d}\tau \qquad \Rightarrow r(t) = \sqrt{a^2 + \frac{\mu^+ CV_0}{\pi\epsilon_0}t}\,.$$

Тогда

$$V(t) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l}\ln\left(1 + \frac{\mu^+ CV_0}{\pi\epsilon_0 a^2}t\right) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l}\ln\left(1+\frac{t}{t_0}\right)\,,$$

где

$$t_0 = \frac{\pi\epsilon_0 a^2}{\mu^+ CV_0} = \frac{\pi\epsilon_0 a^2\ln(b/a)}{\mu^+ V_0\; 2\pi\epsilon_0} = \frac{a^2\ln(b/a)}{2\mu^+ V_0}\,.$$

Типично $t_0 \sim 10^{-1} \div 10$ нс. Полное время сбора *ионов* T - из условия $r(T) = b$:

$$T = \frac{\pi\epsilon_0(b^2 - a^2)}{\mu^+ C V_0} \sim 0.1 \div 1\text{мс}\,.$$

$V_{max} = V(T) = -\frac{Q}{lC}$ - как и следует.
Сначала - быстрый рост: $V(\frac{a}{b}T) = V_{max}/2$.

При нагрузке на омическое сопротивление R, такое что $\tau = RC \ll T$, эффективно получаем дифференцирование сигнала напряжения:

$$I = \frac{C_0 \mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{QC}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{t_0 + t}\,.$$

$$I_{max} = I(0) = -\frac{\mu^+ Q C^2 V_0}{4\pi^2\epsilon_0^2 a^2}\,.$$

Для типичных величин:
$a = 10\mu\text{м},\ b = 8\text{мм},\ \mu^+(Ar) = 1.7\text{см}^2/(\text{В}\cdot\text{с}),\ V_0 = 3\text{кВ},\ Q = 10^6 e^-$
имеем:
$C = 8$ пФ/м, $T = 550\mu$с, $T(V_{max}/2) = 700$ нс, $I(0) = 13\ \mu$А.

3 Ионизационные камеры

3.1 Плоская камера

В плоской камере с зазором d под напряжением $-V_0$, емкостью C и сопротивлением нагрузки R ($RC = \tau$) на расстоянии x_0 от "заземленного"электрода образуется n ионизационных пар. Электронный вклад в сигнал на электроде

$$V^-(t) = \begin{cases} \frac{ne}{C}\frac{\tau v^-}{d}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) & 0 \le t \le \frac{x_0}{v^-} \\ \frac{ne}{C}\frac{\tau v^-}{d}\left(1 - e^{-\frac{x_0}{\tau v^-}}\right)\ \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{x_0}{\tau v^-}\right) & t \ge \frac{x_0}{v^-}\,. \end{cases}$$

Ионный вклад $V^+(t)$ получается заменой $v^- \to v^+$, $x_0 \to d - x_0$.

При $\frac{d}{v^-} < \tau \ll \frac{d}{v^+}$ - режим "электронного собирания":
$V^- \gg V^+$ (кроме очень малых $x_0 \to 0$);
$V^-_{max} = \frac{ne}{C}\frac{x_0}{d}$ - зависит от координаты (т.н. "индукционный эффект").

При равномерном облучении объема *плоской* камеры и ионном собирании доля импульсов с $V^+_{max} > V^-_{max}$ составляет 1/2. Граница равных вкладов - средняя линия $x_0 = d/2$.

3.2 Цилиндрическая камера

Коаксиальные внутренний (под нулевым потенциалом) и внешний (под потенциалом $-V_0$) электроды с радиусами r_1 и r_2 ($r_1 \ll r_2$) соответственно создают (радиальное) поле

$$E(r) \propto \frac{1}{r}\,.$$

Сигнал от заряда ne, возникшего на расстоянии $(r_1 <) r_0 < r_2$:

$$V^-_{max} = \frac{-ne}{C}\frac{\ln r_1/r_0}{\ln r_2/r_1}\,,$$

т.е. индукционный эффект логарифмически ослаблен по сравнению с плоской камерой.

$$V^+_{max} = \frac{ne}{C}\frac{\ln r_2/r_0}{\ln r_2/r_1}\,.$$

$V^-_{max} + V^+_{max} = \frac{ne}{C}$.

Граница равных вкладов ($V^-_{max} = V^+_{max}$) $r_0 = \sqrt{r_1 r_2} \ll r_2$, т.е. $V^-_{max} < V^+_{max}(*)$ в малой области. При изменении полярности питания (*) обращается.

3.3 Сферическая камера

с центральным *анодом* имеет (еще более) резкую зависимость

$$E(r) = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\frac{V_0}{r^2} \propto \frac{1}{r^2}\,.$$

$$V^-_{max} = \frac{-ne}{C}\frac{r_2}{r_0}\frac{r_0 - r_1}{r_2 - r_1} \qquad -$$

индукционный эффект еще меньше.

$$V^+_{max} = \frac{ne}{C}\frac{r_1}{r_0}\frac{r_0 - r_1}{r_2 - r_1}\,.$$

Равные вклады достигаются при $r_0 = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} \approx 2r_1$,
т.е. практически во всем объеме $V^-_{max} > V^+_{max}$.

4 Многопроволочная пропорциональная камера (МПК)

Геометрические параметры: диаметр анодных проволок $2a$, шаг (вдоль оси x) s, анод-катодный зазор (вдоль оси y) l.

Емкость на единицу длины ($\sim 4 \div 6$ пФ/м)

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\pi l/s - \ln 2\pi a/s}\,.$$

Компоненты поля по осям

$$E_y = E(0,y) = \frac{CV_0}{2\epsilon_0 s}\coth\frac{\pi y}{s} \quad \xrightarrow{y>s} \quad \frac{CV_0}{2\epsilon_0 s}\,,$$

$$E_x = E(x,0) = \frac{CV_0}{2\epsilon_0 s} cotg \frac{\pi x}{s}\,.$$

Вблизи от проволоки ($y \ll s$)

$$E(x,y) \simeq \frac{CV_0}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\,, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}\,.$$

$M = f(CV_0)$, поэтому

$$M = \text{const} \quad \Rightarrow \quad CV_0 = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s\ (2\text{мм}) \to s/2\ (1\text{мм}) \\ V_0 \to 2V_0 \end{cases}$$

Т.о., в камере с вдвое уменьшенным шагом поле в дрейфовой зоне в 2 раза выше, и больше вероятность достижения условия Ретера.

$$\frac{\Delta M}{M} = \ln M \frac{\Delta Q}{Q}\,.$$

Используя выражение для C и типичные значения ($M = 10^6, 2a = 20\ \mu$м$, l =$ 8 мм$, s = 2$ мм):

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{C}{2\epsilon_0}\frac{\Delta a}{a} \quad \to \quad \frac{\Delta M}{M} \approx 3\frac{\Delta a}{a}\,;$$

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{Cl}{2\epsilon_0 s}\frac{\Delta l}{l} \quad \to \quad \frac{\Delta M}{M} \approx 12\frac{\Delta l}{l}\,.$$

Самый критичный параметр - изменение шага s вследствие смещения анодной проволоки (номер 0). При этом на соседней (1-й) проволоке

$$\frac{\Delta Q}{Q} \simeq \frac{8\%\ \Delta s(\text{мм})}{0.1\ \text{мм}} \quad \to \quad \frac{\Delta M}{M} \gtrsim 1 \quad !$$

4.1 Электростатическая неустойчивость

При смещении проволок (попеременно через одну) в двух слоях на $\pm\delta$ поперечная отталкивающая сила

$$\sum F_{\perp} = \sum \frac{(CV_0)^2}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \simeq 2\frac{(CV_0)^2}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{s}\frac{2\delta}{s} + \frac{1}{3s}\frac{2\delta}{3s} + \dots\right) = \frac{(CV_0)^2\pi\delta}{4\epsilon_0 s^2}$$

Возвращающая сила при натяжении проволоки T

$$R = T\frac{\mathrm{d}^2\delta(x)}{\mathrm{d}x^2}\,.$$

Уравнение равновесия

$$R = \sum F_{\perp}$$

при граничных условиях

$$\delta(0) = \delta(L) = 0$$

имеет решение

$$\delta(x) = \delta_0 \sin\left(\frac{CV_0}{2s}\sqrt{\frac{\pi}{\epsilon_0 T}}x\right)\,,$$

$$\frac{CV_0}{2s}\sqrt{\frac{\pi}{\epsilon_0 T}}L = \pi\,.$$

$$T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{CV_0 L}{s}\right)^2 \equiv T_c \qquad -$$

критическое натяжение. При $T > T_c$ нет равновесных решений, кроме $\delta(x) \equiv 0$.
Максимальная длина до потери "нулевого"равновесия $L_c = \frac{s}{CV_0}\sqrt{4\pi\epsilon_0 T_{max}}$.
Типично для 20μм проволоки $L_c \lesssim 1$ м.

Прогиб пленочного катода с натяжением T на единицу длины.

$$\begin{cases} E = \frac{E_y}{2} = \frac{CV_0}{4\epsilon_0 s} \\ E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \end{cases}$$

Давление $P = \frac{(CV_0)^2}{8\epsilon_0 s^2}$. Прогиб $\Delta y = \frac{P}{T}\frac{L^2}{8}$.