# 1 Многократное рассеяние

Пусть частица (со скоростью и импульсом $\beta, p$) движется вдоль оси $x$ в веществе из атомов с ядрами $(A, Z)$ с объемной плотностью $n_a (= \rho N_A/A)$.

Формула Резерфорда дает сечение рассеяния на неподвижном кулоновском центре - *ядре* - в элемент телесного угла $d\Omega (= 2\pi d cos\theta)$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha^2}{4\beta^2 p^2 sin^4\frac{\theta}{2}}$$

Вероятность однократного рассеяния на малой длине на малый угол $\theta \approx sin\theta$

$$W(\theta)d(\Omega) = \frac{d\sigma}{d\Omega} n_a dx d\Omega = 4n_a Z^2 r_e^2 \left(\frac{m_e c}{\beta p}\right)^2 dx \frac{d\Omega}{\theta^4} \tag{1}$$

Для многих случайных независимых отклонений среднеквадратичный угол рассеяния

$$\langle\theta^2\rangle(x + dx) = \langle\theta^2\rangle(x) + d\langle\theta^2\rangle$$

$$d\langle\theta^2\rangle = \int\limits_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \theta^2 W(\theta) d\Omega \equiv dx\theta_s^2,$$

где $\theta_s^2$- среднеквадратичный угол рассеяния на единицу длины, $[\theta_s^2] = [L]^{-1}$.

Из (1)

$$\theta_s^2 = 8\pi n_a Z^2 r_e^2 \left(\frac{m_e c}{\beta p}\right)^2 ln\left(\frac{\theta_{max}}{\theta_{min}}\right).$$

Перейдем от угла рассеяния к прицельному расстоянию $b$ (см 1-ю лекцию): $\theta \approx \frac{p_\perp}{p} \approx \frac{2Ze^2}{b\beta p}$. В качестве максимального и минимального $b$ возьмчм радиус экранировки поля ядра в модели Томаса-Ферми и радиус ядра соответственно:

$$R_{max} = \frac{r_a}{Z^{1/3}}\,, \qquad R_{min} = R_N A^{1/3}.$$

С учетом $R_N \approx 1.4$ Фм получим

$$\theta_s^2 = 16\pi n_a Z^2 r_e^2 \left(\frac{m_e c}{\beta p}\right)^2 ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right).$$

Введем $E_s = (4\pi/\alpha)^{1/2} m_e c^2 = 21$ МэВ
и "радиационную длину" $X_0$:

$$X_0^{-1} = 4n_a Z^2 r_e^2 \alpha\, ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right).$$

Тогда компактно запишем

$$\theta_s^2 = \left(\frac{E_s}{\beta c p}\right)^2 \frac{1}{X_0}.$$

Если $\beta c p \approx const$ (слой тонок), то $\theta_s^2 \approx const$ и

$$\langle \theta^2 \rangle = \theta_s^2 x.$$

Грубо учтем вклад рассеяния на *электронах* среды: $\frac{W_e}{W_a} = \frac{z_e^2 n_e}{Z^2 n_a} = \frac{1}{Z}$, т.е. рассеяние увеличивается на фактор $(1 + 1/Z)$, или

$$X_0^{-1} = 4 n_a Z(Z+1) r_e^2 \alpha \, ln \left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right).$$

Значения радиационной длины для некоторых веществ: Pb - 5 мм, Fe - 17 мм, Al - 90 мм.

Для проекций $\theta$ на плоскости $xz$, $xy$ в случае малых углов $\theta_y^2 + \theta_z^2 \approx \theta^2$, и из симметрии $z \leftrightarrow y$

$$\langle \theta_y^2 \rangle = \langle \theta_z^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \theta^2 \rangle.$$

Вообще, координатно-угловое распределение частиц после слоя $x$

$$P(x, y, \theta_y) dy d\theta_y = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{\theta_s^2 x^2} exp \left[-\frac{4}{\theta_s^2} \left(\frac{\theta_y^2}{x} - \frac{3 y \theta_y}{x^2} + \frac{3 y^2}{x^3}\right)\right]$$

Интегрируя по $y$, получим ("плоское") угловое распределение

$$Q(x, \theta_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\theta_y}} exp \left(-\frac{\theta_y^2}{2 \sigma_{\theta_y}^2}\right) \qquad -$$

гауссово с (уже известной) дисперсией $\sigma_{\theta_y}^2 = \langle \theta_y^2 \rangle = \frac{\theta_s^2 x}{2}$

Аналогично после интегрирования по $\theta_y$ координатное распределение (смещение от оси)

$$S(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_y} exp \left(-\frac{y^2}{2 \sigma_y^2}\right), \qquad \sigma_y^2 = \langle y^2 \rangle = \frac{\theta_s^2 x^3}{6}.$$

Распределение по пространственному углу (не Гауссово !)

$$P(\theta) = \frac{2\theta}{\langle \theta^2 \rangle} exp \left(-\frac{\theta^2}{\langle \theta^2 \rangle}\right)$$

Аналогично случаю ионизационных потерь, распределение гауссово при $\theta_{max} \ll \sqrt{\langle\theta^2\rangle} \Rightarrow \frac{x}{X_0} \gg 46A^{-2/3}$. Как правило, это не так. В более общем случае "тонкого"рассеивателя наблюдается распределение Мольер. При малых углах оно "почти" гауссово, но "хвост" в больших углах заметно выше и приближается к вероятности однократного (Резерфордовского) рассеяния.