1 Тормозное излучение

Быстрая заряженная частица рассеивается в среде.
Из классической электродинамики известно: заряд ze, движущийся с ускорением a, излучает электромагнитные волны. Энергия излучения
$\mathcal{E} = \int I dt \propto \int (ze)^2 a^2\ dt$. Для релятивистской частицы ($\beta \approx 1$) с массой m и характерном размере области взаимодействия (рассеяния) R интервал интегрирования $\tau \sim R$, ускорение $a \simeq \frac{dp}{mdt} \sim \frac{q}{mR}$. Отсюда

$$\mathcal{E} \sim \frac{(ze)^2 q^2}{m^2 R} \simeq \frac{(ze)^2}{R}\frac{p^2\theta^2}{m^2} = \frac{(ze)^2}{R}\gamma^2\theta^2$$

(θ - угол рассеяния частицы. В дальнейшем $z = 1$).

При "мгновенном" рассеянии ($t = R \ll l_{coher} = \frac{2\gamma^2}{\omega}$) спектральная плотность излучения $\frac{d\mathcal{E}(\omega,\theta)}{d\omega} \sim e^2 f(\theta\gamma)$ - не зависит от ω. Классический аналог - частотный спектр $\delta(t)$-функции.

В квантовой картине излучение - испускание фотонов, с энергией ω. Их плотность на интервал частот $\frac{dN_\gamma(\omega,\theta)}{d\omega} = \frac{1}{\omega}\frac{d\mathcal{E}(\theta)}{d\omega} \propto \frac{1}{\omega}$.
N.B. В нерелятивистском случае сечение *тормозного излучения* факторизуется:

$$d\sigma = \frac{dN_\gamma(\omega,\theta)}{d\omega} \times \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} d\omega$$

Пренебрегая энергией ядра отдачи:

$$E = E' + \omega$$

(Но: $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p'} + \overrightarrow{k_\gamma} + \overrightarrow{q}$.)

Максимум излучения (из-за пропагатора $((p'+k)^2 - m^2)^{-1}$) - при $\overrightarrow{p} \parallel \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{p'} \parallel \overrightarrow{k}$.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_\gamma} \sim \frac{1}{m^2 + E^2\theta_\gamma^2},$$

т.е. $\theta_\gamma \lesssim \frac{m}{E} = \frac{1}{\gamma}$.

Формула Бете-Гайтлера для сечения тормозного излучения:

$$\frac{d\sigma(\omega, E)}{d\omega} = \frac{1}{\omega}\frac{4Z^2\alpha^3}{m^2}F(E,E') = \frac{1}{\omega}4Z^2\alpha r_e^2 F(E,E')$$

Поскольку интенсивность излучения $\propto m^{-2}$, в последнем равенстве положили $m = m_e$ и в дальнейшем рассматриваем излучение электроном.

Вид F зависит от того, формируется излучение на "голом" ядре или "экранированном" электронами.

Будем считать "длиной формирования" излучения (также "длиной когерентности") максимальный размер "локализации" **виртуального фотона** $l_f \approx 1/q_{min}$. Минимум переданного импульса достигается при коллинеарных $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{p'}, \overrightarrow{k_\gamma}$; в релятивистском пределе

$$q_{min} = |\overrightarrow{q}|_{min} = p - p' - k_\gamma \approx \frac{m^2(E-E')}{2EE'}\,,$$

или

$$l_f \approx \frac{2EE'}{m^2(E-E')} \sim \frac{2\gamma^2}{\omega}\,.$$

Излучение происходит в "режиме экранирования" , если $l_f >> r_A = r_a/Z^{1/3}$. С учетом $r_a = (m_e\alpha)^{-1}$, степень "экранировки" определяется т.н. **параметром экранирования**

$$\xi = \frac{100 m_e \omega}{Z^{1/3} E E'}\,.$$

При $\xi \ll 1$ - полном экранировании -

$$F(E,E') = \left(1 + \left(\frac{E'}{E}\right)^2 - \frac{2}{3}\frac{E'}{E}\right)\ ln\ \frac{183}{Z^{1/3}} + \frac{1}{9}\frac{E'}{E}\,,$$

т.е. слабо зависит от E' ($m_e \le E' \le E$).
При $\xi \gg 1$ - отсутствии экранирования -

$$F(E,E') = \left(1 + \left(\frac{E'}{E}\right)^2 - \frac{2}{3}\frac{E'}{E}\right)\ \left[ln\ \frac{2EE'}{m_e\omega} - \frac{1}{2}\right]$$

- сильно падает с уменьшением E'.

Оценим численно условие экранирования. Положим $\omega \sim E'$. Тогда

$$\xi \approx \frac{100 m_e}{Z^{1/3} E} \ll 1$$

соответствует
$E \gg \frac{100 m_e}{Z^{1/3}} \approx 50$ МэВ для $Z = 1$ (26 МэВ для Fe с $Z = 26$).
При очень высоких ($\gtrsim 10^2$ МэВ) энергиях электронов условие полного экранирования выполняется почти во всей области допустимых энергий γ-квантов $\omega \le E - m$.

Перейдем от сечения к (радиационным) потерям энергии на слое dx:

$$dE = -n_a dx \int_0^{\omega_{max}} \omega \frac{d\sigma}{d\omega} d\omega\,.$$

При высоких энергиях вклад областей не-экранирования в интеграл мал, поэтому

$$\int \omega d\sigma/d\omega d\omega \propto \int F(\omega) d\omega \approx const \int d\omega \propto \omega_{max} \approx E\,.$$

Это дает

$$dE = -\frac{dx}{X_0} E\,,$$

где X_0 - (ранее введенная) радиационная длина:

$$X_0^{-1} = 4 n_a \alpha Z (Z+\zeta) r_e^2 \; ln \frac{183}{Z^{1/3}}$$

Как и в случае многократного рассеяния, $\zeta \sim 1.2 \div 1.4$ учитывает тормозное излучение на электронах среды (заменой $Z^2 \; ln\frac{183}{Z^{1/3}} \rightarrow Z \; ln\frac{1440}{Z^{2/3}}$) .

При пренебрежении другими потерями энергия электрона при прохождении слоя x

$$E(x) = E_0 e^{-x/X_0}.$$

Для свинца X_0 составляет ≈ 5 мм, для Al - 9 см.

1.1 Эффект Ландау-Померанчука-Мигдала

Излучение с данной частотой ω формируется на участке траектории частицы длиной $l_{coher} = \frac{2\gamma^2}{\omega}$ (длина когерентности или формирования). Если угол многократного рассеяния частицы в веществе на этой длине превышает характерный угол излучения , то излучение подавлено. Оценим граничную частоту ω_{LPM} этого подавления:

$$\theta_{MS} = \theta_S \sqrt{l_{coher}} = \frac{E_S}{p\beta} \sqrt{\frac{2\gamma^2}{X_0 \omega}} \gtrsim \theta_\gamma = \frac{1}{\gamma}\ ,$$

откуда (при $\gamma \gg 1$)

$$\omega_{LPM} \simeq \left(\frac{E_S}{m}\right)^2 \frac{2\gamma^2}{X_0}\ .$$

В области $\omega \lesssim \omega_{LPM}$ спектральная плотность излучения $I(\omega) \propto \sqrt{\omega}$ (Мигдал), в отличие от Бете-Гайтлеровской $I(\omega) \propto const(\omega)$

1.2 Критическая энергия

Ионизационные потери
$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_i \propto Z\, ln\, E\,.$$
Радиационные потери
$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_b \propto Z^2 E\,.$$
При некоторой - т.н. "критической энергии E_{cr} они сравниваются. Приближенно
$E_{cr} \approx 610/Z$ МэВ для жидкостей и твердых тел;
$E_{cr} \approx 710/Z$ МэВ для газов из-за меньшего эффекта плотности.

2 Рождение электрон-позитронных пар

Высокоэнергичный γ-квант *в поле ядра* может образовать электрон-позитронную пару. Этот процесс не имеет классического аналога. Рождение пар и тормозное излучение - сходные с точки зрения квантовой электродинамики.

Аналогично случаю излучения, $\omega = E_+ + E_-$. Характерный угол вылета позитрона (электрона)
$$\theta_+ \sim \frac{m}{\omega}\,.$$
Дифференциальное сечение рождения пар по формуле Бете-Гайтлера
$$\frac{d\sigma}{dE_+}(\omega, E_+) = \frac{1}{\omega} 4\alpha Z^2 r_e^2 F(\omega, E_+)\,.$$
При полном экранировании, а именно при
$$\xi = \frac{100 m_e \omega}{Z^{1/3} E_+ E_-} \ll 1 \qquad\qquad (\omega = E_+ + E_- \gg 70 MeV)\,,$$
$$F(\omega, E_+) = \left(\left(\frac{E_+}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{E_-}{\omega}\right)^2 + \frac{2}{3}\frac{E_+E_-}{\omega^2}\right)\, ln\, \frac{183}{Z^{1/3}} - \frac{1}{9}\frac{E_+E_-}{\omega^2}\,.$$
При отсутствии экранирования ($\xi \gg 1$)
$$F(\omega, E_+) = \left(\left(\frac{E_+}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{E_-}{\omega}\right)^2 + \frac{2}{3}\frac{E_+E_-}{\omega^2}\right)\, \left[ln\, \frac{2E_+E_-}{m\omega} - \frac{1}{2}\right]\,.$$

Полное сечение
$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{dE_+} dE_+ = \int \frac{const}{\omega} F(\omega, E_+) dE_+ \approx \frac{const}{\omega}\int_0^{\omega - 2m} dE_+ \approx const(\omega) \qquad\qquad (\omega > 1 GeV)\,.$$

А именно:

$$\sigma(\gamma Z \to e^+e^-Z) = \frac{28}{9}\alpha Z^2 r_e^2 \, ln\frac{183}{Z^{1/3}} \, .$$

Вероятность рождения пары на малой длине dx

$$W = \sigma n_a dx = \frac{7}{9}\frac{dx}{X_0} \, .$$

Замечание о радиационной длине.

Для тормозного излучения $\sigma \propto m^{-2}$, поэтому для мюона ($m \approx 100$ МэВ) этот процесс в $\sim 4 \cdot 10^4$ раз менее интенсивен, соответственно X_0 больше.

В формулу для многократного рассеяния масса частицы не входит. (Выделение X_0 сделано путем соответствующего определения величины E_s.) Поэтому в рассеянии *любых* частиц X_0 одно и то же ("электронное").