

**О ПОТЕРЯХ ЭНЕРГИИ БЫСТРЫМИ ЧАСТИЦАМИ
НА ИОНИЗАЦИЮ**

J. Phys. USSR, 8, 201, 1944

Определена функция распределения по энергии для быстрых частиц, прошедших через слой вещества заданной толщины и потерявших энергию в результате ионизационных столкновений.

Когда быстрая частица пересекает слой вещества, то благодаря ионизационным потерям ее энергия по выходе будет меньше, чем ее начальное значение. При данной толщине слоя эти потери энергии не постоянны в силу того, что вероятность заметных флуктуаций оказывается вполне значительной.

Здесь под быстрыми частицами мы понимаем частицы (электроны, мезотроны и т. д.), которые обладают достаточно большой энергией для того, чтобы можно было применить обычную теорию ионизации. Слой вещества считается не слишком толстым, так что полные средние потери энергии малы по сравнению с начальной энергией E_0 .

Обозначим неизвестную функцию распределения через $f(x, \Delta)$; она представляет собой вероятность того, что частица с заданной начальной энергией E_0 , проходя через слой x , потеряет долю энергии, лежащую между Δ и $\Delta + d\Delta$ (функция f нормирована так, что $\int f d\Delta = 1$). Напишем кинетическое уравнение, определяющее эту функцию. Пусть $w(E_0, \epsilon)$ —вероятность (на единицу длины пути) потери энергии ϵ частицей с энергией E . Поскольку ионизационные потери считаются малыми по сравнению с E_0 , вместо E в $w(E, \epsilon)$ можно написать E_0 ; мы будем записывать $w(E_0, \epsilon)$ просто как $w(\epsilon)$. Как обычно, кинетическое уравнение можно получить, приравняв изменение функции распределения $(df/dx) dx$ на длине dx «интегралу столкновений»,

который выражает собой разность между числом частиц, приобретающих заданную энергию E в результате потерь на ионизацию на пути dx , и числом частиц, покидающих данный интервал энергий.

Таким способом мы получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \int_0^{\infty} w(\varepsilon) [f(x, \Delta - \varepsilon) - f(x, \Delta)] d\varepsilon. \quad (1)$$

В качестве верхнего предела интегрирования можно подставить ∞ , так как $f(x, \Delta) = 0$ при $\Delta < 0$ и $w(\varepsilon) = 0$ при $\varepsilon > E_0$.

Уравнение (1) не содержит независимых переменных x и Δ явно. Это позволяет искать решение при помощи преобразования Лапласа. Проведя это преобразование по независимой переменной Δ , запишем

$$\varphi(p, x) = \int_0^{\infty} f(\Delta) e^{-p\Delta} d\Delta. \quad (2)$$

В свою очередь $f(\Delta)$ следующим образом может быть выражено через $\varphi(p)$:

$$f(x, \Delta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} e^{p\Delta} \varphi(p, x) dp, \quad (3)$$

где интегрирование производится вдоль прямой линии, параллельной мнимой оси и сдвинутой вправо от последней ($\sigma > 0$).

Умножая обе части уравнения (1) на $e^{-p\Delta}$ и интегрируя по $d\Delta$, легко получаем

$$\frac{\partial \varphi(p, x)}{\partial x} = -\varphi(p, x) \int_0^{\infty} w(\varepsilon) (1 - e^{-p\varepsilon}) d\varepsilon. \quad (4)$$

При $x = 0$, т. е. на поверхности, где частица входит в слой, должно выполняться условие $f(0, \Delta) = \delta(\Delta)$, которое означает, что на этой поверхности имеется одна частица с энергией $E = E_0$. Тогда из (2) находим, что $\varphi(p) = 1$ при $x = 0$. Интегрируя уравнение (4) с этим начальным условием, получаем

$$\varphi(p, x) = \exp \left[-x \int_0^{\infty} w(\varepsilon) (1 - e^{-p\varepsilon}) d\varepsilon \right].$$

Подставляя это в (3), получим следующее общее выражение для функции распределения, выраженной через вероятность $w(\varepsilon)$:

$$f(x, \Delta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} \exp \left\{ p\Delta - x \int_0^{\infty} w(\varepsilon) (1 - e^{-p\varepsilon}) d\varepsilon \right\} dp. \quad (5)$$

Формула (5) в принципе дает решение нашей задачи в общем случае. Для возможности ее применения необходимо знать функцию $w(\varepsilon)$; вообще говоря, вид этой функции был найден лишь для энергий, больших по сравнению с энергиями электронов в атоме. Однако можно показать, что в случае, когда потери энергии не слишком малы, не обязательно знать функцию $w(\varepsilon)$ полностью. Условие применимости (см. (20)) соответствующих формул будет выведено ниже.

Для того чтобы вычислить интеграл в экспоненте подынтегрального выражения, поступим следующим образом. Пусть ε_0 представляет собой некоторую характерную для атома энергию (порядка величины средней энергии связи атомных электронов). Пусть далее ε_{\max} является максимальной энергией, которую частица может передать электрону в процессе ионизации. Мы предположим, что в интеграле (5) существенны лишь такие значения p , для которых

$$p\varepsilon_0 \ll 1, \quad p\varepsilon_{\max} \gg 1. \quad (6)$$

Ограничения, которые это предположение накладывает на область применимости результатов, будут рассмотрены ниже. Введем теперь некоторую энергию ε_1 , такую, что $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_0$ и $p\varepsilon_1 \ll 1$; благодаря (6) это всегда можно сделать. Разобьем интеграл по $d\varepsilon$ на два интеграла с пределами соответственно от 0 до ε_1 и от ε_1 до ∞ . В первом из них (благодаря $p\varepsilon_1 \ll 1$) можно написать $e^{-p\varepsilon} \approx 1 - p\varepsilon$. Тогда

$$\int_0^{\infty} w(\varepsilon) (1 - e^{-p\varepsilon}) d\varepsilon = p \int_0^{\varepsilon_1} \varepsilon w(\varepsilon) d\varepsilon + \int_{\varepsilon_1}^{\infty} w(\varepsilon) (1 - e^{-p\varepsilon}) d\varepsilon. \quad (7)$$

При $\varepsilon_0 \ll \varepsilon \ll \varepsilon_{\max}$ справедлива следующая хорошо известная формула (см., например, [1]):

$$w(\varepsilon) = \frac{2\pi N e^4 \rho \Sigma Z}{m v^3 \Sigma A} \frac{1}{\varepsilon^3} \quad (8)$$

(m — масса электрона, e — заряд электрона, совпадающий с зарядом падающей частицы, v — скорость частицы с энергией E_0 , N — число Авогадро, ρ — плотность вещества, ΣZ — сум-

ма атомных номеров в молекуле вещества, ΣA — сумма атомных весов). Можно видеть, в частности, что при $pe \gg 1$ второй интеграл быстро сходится, в силу чего эта область энергий несущественна. Из $pe_{\max} \gg 1$ следует, что для рассматриваемого интеграла выражение (8) можно применять во всей области интегрирования.

Хорошо известно [1], что для интеграла $\int_0^{\varepsilon_1} w(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon$, т. е. для потерянной частицей (на единицу пути) энергии, усредненной по интервалу от 0 до ε_1 , имеет место следующая формула:

$$\int_0^{\varepsilon_1} w(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon = \frac{2\pi N e^4 p \Sigma Z}{m v^2 \Sigma A} \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon'}, \quad \ln \varepsilon' = \ln \frac{(1 - v^2/c^2) I^2}{2m v^2} + \frac{v^2}{c^2}, \quad (9)$$

где I представляет собой известным образом определенный ионизационный потенциал атома, величина которого обычно принимается равной $I = I_0 Z$, где $I_0 = 13,5$ эв.

Подставив (8) во второй член в правой части (7), получим интеграл вида

$$\int_{\varepsilon_1}^{\infty} \frac{1 - e^{-pe}}{\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon_1} (1 - e^{-pe_1}) + p \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \frac{e^{-pe}}{\varepsilon} d\varepsilon.$$

Вспоминая, что $\varepsilon_1 p \ll 1$, и вводя $z = pe$ в качестве новой переменной интегрирования, запишем

$$\frac{1}{p} \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \frac{1 - e^{-pe}}{\varepsilon^2} d\varepsilon = 1 + \int_{\varepsilon_1 p}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz = 1 + \int_{\varepsilon_1 p}^1 \frac{dz}{z} + \int_0^1 \frac{e^{-z} - 1}{z} dz + \int_1^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz.$$

Как известно, сумма двух последних интегралов в правой части этого равенства равна $-C$, где $C = 0,577\dots$ — постоянная Эйлера (см., например, [2]). Таким образом,

$$\int_{\varepsilon_1}^{\infty} \frac{1 - e^{-pe}}{\varepsilon^2} d\varepsilon = p(1 - C - \ln pe_1).$$

Подставляя это выражение в равенства (9) и (7), получим

$$x \int_0^{\infty} w(\varepsilon) (1 - e^{-pe}) d\varepsilon = \xi p (1 - C - \ln pe'), \quad (10)$$

где вместо координаты x мы ввели величину

$$\xi = x \frac{2\pi N e^4 \rho \Sigma Z}{m v^2 \Sigma A}. \quad (11)$$

Наконец, подставляя (10) в (5) и вводя новую переменную интегрирования $u = \xi p$, получаем для функции распределения следующее интегральное представление:

$$f(x, \Delta) = \frac{1}{\xi} \varphi(\lambda), \quad (12)$$

где

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty + \sigma}^{+i\infty + \sigma} e^{u \ln u + \lambda u} du, \quad (13)$$

$$\lambda = \frac{\Delta - \xi \left(\ln \frac{\xi}{e^2} + 1 - C \right)}{\xi}. \quad (14)$$

Таким образом, функция двух переменных $f(\Delta, x)$ оказалась равной произведению $1/\xi$ на универсальную функцию $\varphi(\lambda)$ от безразмерной переменной λ . Последняя была рассчитана в Вычислительном бюро Математического института Академии наук СССР, которому автор выражает свою благодарность. Функция $\varphi(\lambda)$ при $\lambda = -0,05$ имеет максимум. Таким образом, наиболее вероятное значение потерь энергии дается выражением

$$\Delta_0 = \xi \left(\ln \frac{\xi}{e^2} + 0,37 \right), \quad (15)$$

которое более точно, чем обычная формула для этой величины.

Введем обозначение

$$\eta = \frac{2\pi N e^4 \rho \Sigma Z}{m c^2 \Sigma A} x = \frac{1,54 \cdot 10^5 \mu \Sigma Z}{\Sigma A}, \quad (16)$$

где μ — масса слоя вещества, отнесенная к 1 см^2 его поверхности, и η измеряется в электронвольтах. Тогда $\xi = \eta/(v/c)^2$, и мы получаем

$$\Delta_0 = \frac{\eta}{(v/c)^2} \left[\ln \frac{3 \cdot 10^3 \eta}{Z^2 (1 - v^2/c^2)} + 1 - \frac{v^2}{c^2} \right]. \quad (17)$$

Вероятность для потери энергии, лежащей между Δ и $\Delta + d\Delta$, равна

$$f(x, \Delta) d\Delta = \varphi \left(\frac{\Delta - \Delta_0}{\xi} \right) d \left(\frac{\Delta - \Delta_0}{\xi} \right), \quad (18)$$

а интегральная вероятность для энергетических потерь, превосходящих Δ , —

$$\int_{\Delta}^{\infty} f(x, \Delta) d\Delta = \psi \left[\frac{\Delta - \Delta_0}{\xi} \right], \quad (19)$$

где φ и ψ — две универсальные функции, показанные на рис. 1 и 2.

Кривая на рис. 1 слева от максимума ($\Delta < \Delta_0$, т. е. потери энергии меньше, чем наиболее вероятная) убывает очень быстро, справа от максимума ($\Delta > \Delta_0$) кривая убывает значительно медленнее.

Из рис. 2 можно увидеть, что медиана распределения вероятности (т. е. вертикальная линия, разделяющая площадь этой кривой на две равные части) проходит приблизительно на одну единицу вправо от оси ординат.

Определим, какие ограничения на область применимости полученных результатов накладываются сделанные выше допущения (6). Очевидно, что в интеграле (13) существенна область интегрирования $u \sim 1$. Так как $u = \xi p$, то предположение (6) сводится к условиям

$$\xi \gg \varepsilon_0, \quad (20)$$

$$\xi \ll \varepsilon_{\max}. \quad (21)$$

Первое условие означает, что наблюдаемые энергии должны быть достаточно велики по сравнению с атомными энергиями. Это

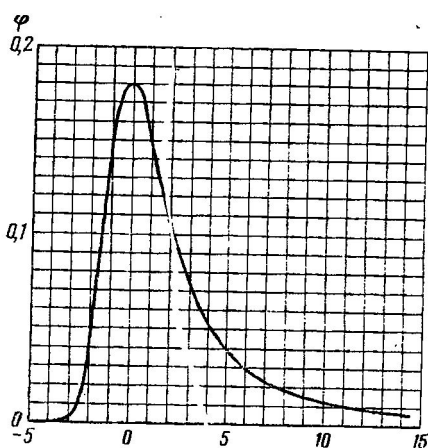


Рис. 1

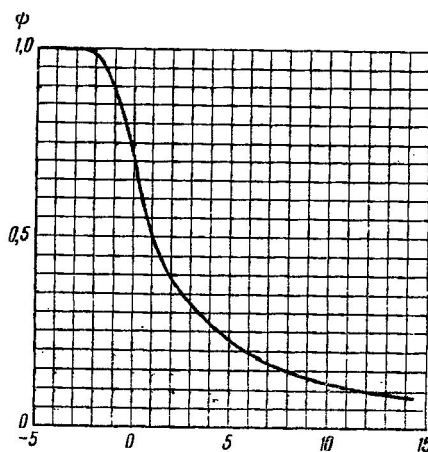


Рис. 2

является главным ограничением на применимость полученных здесь результатов. Если быстрая частица — электрон или позитрон, то $\varepsilon_{\max} = E_0$ и условие (21), во всяком случае, выполнено, поскольку с самого начала предполагалось, что полная потерянная частицей энергия мала по сравнению с E_0 . Однако если масса быстрой частицы гораздо больше, чем масса электрона (мезотроны, протоны), ε_{\max} может стать меньшей, чем E_0 , и тогда соотношение (21) будет ограничивать применимость формул. Легко показать, что в этом случае должно выполняться условие

$$\xi \ll \frac{2mv^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad \eta \ll 2mc^2 \frac{(v/c)^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (22)$$

Можно упомянуть, что если нас интересуют большие флуктуации, т. е. большие значения $(\Delta - \Delta_0)/\varepsilon$, то, как можно элементарно показать, вместо (22) следует написать

$$\Delta - \Delta_0 \ll \frac{2mv^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

С помощью (5) легко изучить также предельный случай, противоположный (22); как было неоднократно показано, это приводит к гауссовскому распределению флуктуаций.

Выведем теперь асимптотическую формулу для функции $\varphi(\lambda)$ при больших λ . Сначала мы рассмотрим отрицательные λ , большие по абсолютной величине. Для вычисления интеграла (13) воспользуемся «методом перевала». Показатель экспоненты $u \ln u - |\lambda|u$ в подынтегральном выражении в (13) минимален при $u = e^{|\lambda|-1}$. Воспользуемся этой величиной в качестве σ , которое определяет путь интегрирования. Записав $u = e^{|\lambda|-1} + i\zeta$, мы сведем интеграл по du к интегралу по $d\zeta$ от $-\infty$ до $+\infty$; в этом интеграле существенны только малые значения ζ . В соответствии с этим, разлагая выражение в показателе экспоненты в ряд по степеням ζ , получим

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -e^{|\lambda|-1} - \frac{\zeta^2}{2e^{|\lambda|-1}} \right\} d\zeta$$

или окончательно

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} \exp \left\{ \frac{|\lambda|-1}{2} - e^{|\lambda|-1} \right\}. \quad (23)$$

Эта формула показывает, что $\varphi(\lambda)$ очень быстро убывает с возрастанием $|\lambda|$.

Для больших положительных λ интеграл удобно брать вдоль контура, показанного на рис. 3. Тогда после простых преобразований он принимает вид

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-u \ln u - \lambda u} \sin \pi u du. \quad (24)$$

При больших λ этот интеграл стремится к $1/\lambda^2$, а интеграл $\int_{\lambda}^{\infty} \varphi(\lambda) d\lambda$ соответственно стремится к $1/\lambda$. Это означает, как легко

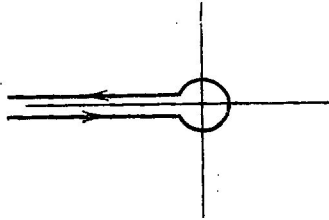


Рис. 3

убедиться, что вероятность такой флуктуации соответствует в основном образованию одной частицы с энергией $\Delta - \Delta_0$. Для того чтобы получить более точную формулу, введем вместо λ величину ω , которая связана с λ уравнением

$$\lambda = \omega + \ln \omega + A,$$

где значение постоянной выбрано ниже. Очевидно, что

$$\int_{\lambda}^{\infty} \varphi(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} e^{-u \ln u - \lambda u} \frac{\sin \pi u}{\pi u} du = \int_0^{\infty} e^{-u \ln \omega u - \omega u - A u} \frac{\sin \pi u}{\pi u} du$$

или, обозначая ωu через U ,

$$\int_{\lambda}^{\infty} \varphi(\lambda) d\lambda = \frac{1}{\omega} \int_0^{\infty} e^{-U - \frac{U}{\omega} (\ln U + A)} \frac{\sin \frac{\pi U}{\omega}}{\pi U / \omega} dU,$$

Этот интеграл можно разложить в ряд по $1/\omega$. Тогда

$$\int_{\lambda}^{\infty} \varphi(\lambda) d\lambda = \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega^2} \int_0^{\infty} e^{-U} U (\ln U + A) dU + \dots$$

Второй член исчезает, если $A = C - 1$. Поэтому с точностью, включающей члены порядка $1/\omega^2$, существует следующее параметрическое соотношение между ψ и $(\Delta - \Delta_0)/\xi$:

$$\frac{\Delta - \Delta_0}{\xi} = \omega + \ln \omega - 0,37, \quad \psi = \frac{1}{\omega} \quad (25)$$

и

$$\varphi = \frac{1}{\omega(\omega + 1)}. \quad (26)$$

Эти формулы уже при $(\Delta - \Delta_0)/\xi = 10$ справедливы с точностью в несколько процентов.

*Институт физических проблем
Академии наук СССР*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] L. Livingston, H. Bethe. Rev. Mod. Phys., 9, 245, 1937.
[2] Уиттекер, Ватсон. Курс современного анализа, 4-е изд., 1935, стр. 246.