

Федеральное государственное бюджетное учреждение  
«Государственный научный центр Российской Федерации -  
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ»  
Национальный исследовательский центр  
«Курчатовский институт»

На правах рукописи

Пославский Станислав Владимирович

**Рождение  $P$ -волновых кваркониев в адронных  
взаимодействиях**

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
профессор, д. ф.-м. н.,  
Лиходед Анатолий Константинович

Протвино 2014 г.

# Содержание

Введение	4
<b>1 Рождение чармониев в адронных экспериментах при высоких энергиях</b>	<b>13</b>
1.1 Введение . . . . .	13
1.2 Структура амплитуды рассеяния в рамках НРКХД . . . .	16
1.3 Вычисление спиральных амплитуд в жесткой реакции . . .	22
1.3.1 Ковариантные выражения для векторов поляризации в реакции $2 \rightarrow 2$ . . . . .	23
1.3.2 Выражения спиральных амплитуд . . . . .	25
1.4 Адронное рождение чармониев . . . . .	31
1.4.1 Анализ адронных сечений . . . . .	32
1.5 Фитирование экспериментальных данных . . . . .	35
1.6 Выводы к первой главе . . . . .	48
<b>2 Рождение боттомониев в адронных экспериментах при высоких энергиях</b>	<b>51</b>
2.1 Введение . . . . .	51
2.2 Предсказания сечений $\chi_b$ . . . . .	52
2.3 Связь отношений $\sigma(\chi_{c2})/\sigma(\chi_{c1})$ и $\sigma(\chi_{b2})/\sigma(\chi_{b1})$ . . . . .	54
2.4 Рождение радиальных возбуждений . . . . .	61
2.5 Выводы ко второй главе . . . . .	64
<b>3 Рождение чармониев при низких энергиях в <math>p\bar{p}</math> аннигиляции</b>	<b>67</b>
3.1 Введение . . . . .	67
3.2 Оценка сечений рождение чармониев в PANDA . . . . .	69

3.3	Генератор событий . . . . .	73
3.4	Выводы к третьей главе . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Аналитические расчеты в системе компьютерной алгебры</b>	
	<b>Redberry</b>	<b>80</b>
4.1	Введение . . . . .	80
4.2	Примеры использования Redberry . . . . .	83
4.2.1	Расчет диаграмм Фейнмана . . . . .	83
4.2.2	Вычисление однопетлевых расходимостей функцио- нальных детерминантов в искривленном пространстве	88
4.3	Выводы к четвертой главе . . . . .	92
	<b>Заключение</b>	<b>95</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>99</b>

# Введение

## Актуальность темы исследования

Первая частица из семейства тяжелых кваркониев —  $J/\psi$  — была открыта в 1974 году двумя независимыми экспериментальными группами: группой под руководством Бертона Рихтера в Брукхейвенской национальной лаборатории [1] и группой под руководством Сэмуэля Тинга в Национальной ускорительной лаборатории SLAC (Стэнфорд) [2]. Частица  $J/\psi$  представляет собой связанное состояние очарованного кварка и антикварка  $c\bar{c}$ , и её открытие дало значительный вклад в понимание сильного взаимодействия. В частности, оно послужило первым экспериментальным доказательством существования четвертого и самого тяжелого (из известных на тот момент) кварка —  $c$ -кварка, существование которого было предсказано в работе Шелдона Глэшоу, Джона Илиополуса и Лучиано Майани для построения единой теории электрических и слабых взаимодействий [3]. Аналогичные экспериментальные исследования проведенные в 1977 году по руководством Леона Ледермана (Национальная ускорительная лаборатория им. Энрико Ферми, Чикаго) [4] привели к открытию первой частицы из семейства боттомониев — связанных состояний  $b$ -кварка и антикварка —  $\Upsilon$  мезона, что послужило первым доказательством существования третьего поколения кварков.

На сегодняшний день накоплено значительное количество экспериментальных данных по рождению и распадам тяжелых кваркониев. Пристальный интерес к исследованиям кваркониев как со стороны экспериментаторов, так и со стороны теоретиков обусловлен несколькими причинами. В первую очередь, это связано с тем, что нерелятивистская природа этих состояний позволяет успешно описывать такие системы теоретически в рамках эффективных теорий поля, и в первую очередь нерелятивистской квантовой хромодинамики. В тоже время многие кваркониевые системы обладают очень чистыми экспериментальными сигналами, что делает возможным детальное изучение их свойств на огромной экспериментальной статистике существующих адронных коллайдеров. Наконец, большая масса  $c$ - и  $b$ - кварков естественным образом позволяет факторизовать эффекты малых расстояний — пертурбативные эффекты, от эффектов больших расстояний связанных с проблемой конфайнмента КХД; это свойство принято называть теоремой о факторизации.

Среди экспериментов по рождению кваркониев при высоких энергиях наибольшее количество данных накоплено по рождению  $S$ -волновых кваркониев —  $J/\psi$  и  $\Upsilon$ . Первые попытки описания процессов рождения  $J/\psi$  привели к созданию модели цветового синглета (*color singlet model*, сокращенно CSM) [5–8], а также модели испарения цвета (*color evaporation model*, сокращенно CEM) [9, 10]. Большой обзор успехов и неудач этих моделей до 1993 года можно найти в работе [11].

Появление данных по инклюзивному рождению  $J/\psi$ ,  $\psi(2S)$ ,  $\Upsilon(1S)$ ,  $\chi_c$  на больших поперечных импульсах на коллайдере Тэватрон в 1990-х годах [12–14] продемонстрировало, что экспериментальные сечения примерно в два раза выше существовавших на тот момент теоретических предсказаний; более того, они имели отличную форму  $p_T$ -спектра. Аналогичные расхождения между теорией и экспериментом были обнаруже-

ны в экспериментах с фиксированной мишенью [15–19].

Важным шагом в понимании процессов с участием тяжелых кварков было построение эффективной нерелятивистской квантовой хромодинамики (НРКХД) [20–22] (также иногда называется моделью цветового октета — *color octet model*, сокращенно СОМ). Дальнейшее развитие этих идей в применении к процессам рождения кваркониев [23, 24] позволило добиться приемлемого согласия с экспериментом. В формализме НРКХД факторизация достигается путем введения промежуточных состояний  $[q\bar{q}]$  с квантовыми числами отличными от наблюдаемых, которые переходят в наблюдаемые состояния за счет взаимодействия с глюонами; при этом вероятности переходов описываются вакуумными средними четырех-фермионных операторов, возникающих в эффективном лагранжиане теории, которые являются непертурбативными параметрами модели. Эти промежуточные состояния возникают из разложения фоковского столбца наблюдаемой в ряд по относительной скорости кварка и антикварка в мезоне ( $v$ ), которая является малым параметром в разложении; наличие такого малого параметра позволяет ограничиваться конечным числом слагаемых в разложении.

Одни из последних результаты фитирования и сравнения большого числа экспериментальных данных по рождению  $J/\psi$  в экспериментах [25–36], включающих адронное рождение, фоторождение и рождение в  $e^+e^-$  аннигиляции полученные в работах [37, 38], показали, что в целом, предсказания НРКХД для спектра  $S$ -волновых чармониев находятся в согласии с экспериментом. Однако, наблюдаемую в эксперименте поляризацию  $J/\psi$  объяснить в рамках НРКХД пока не удается [37–39].

В то время как для  $J/\psi$  и  $\Upsilon$  накоплено значительное число экспериментальных данных, для  $P$ -волновых кваркониев ( $\chi_{c0,1,2}$  и  $\chi_{b0,1,2}$ ) данных значительно меньше. До запуска Большого адронного коллайдера

(БАК) единственными данными по  $p_T$ -спектрам рождения  $\chi_c$  были данные установки CDF по  $p_T$ -спектру  $J/\psi$  мезонов образованных в радиационных распадах  $\chi_{c1,2}$  [14], а также данные CDF по отношению сечений  $\sigma(\chi_{c2})/\sigma(\chi_{c1})$  в зависимости от  $p_T$  [40]. В последние годы появилось много данных с ускорителя БАК [41–45]. Анализ и фитирование всех имеющихся данных по рождению  $P$ -волновых кваркониев и построение теоретических предсказаний для будущего запуска БАК в данной работе проведен впервые. Такой анализ становится особенно актуальным в свете недавнего открытия новой частицы  $\chi_b(3P)$  [46–48].

В ближайшие годы планируется запуск нового масштабного эксперимента по исследованию чармониев — PANDA (*anti-Proton ANnihilation at DArmstadt*) [49], строительство которого идет в ускорительном центре FAIR в Дармштадте, Германия. В этом эксперименте чармонии будут рождаться в реакциях протон-антипротонной аннигиляции. Для целей PANDA необходимо иметь оценки суммарных сечений рождения  $J/\psi$  и модель симуляции их рождения в условиях PANDA. В реакции  $p\bar{p}$  прямое рождение  $J/\psi$  подавлено из закона сохранения зарядовой четности, поэтому основным источником  $J/\psi$  будут радиационные распады  $\chi_{c1,2}$ . Одной из актуальных задач данной диссертации было получение предсказаний сечений рождения  $\chi_{c1,2}$  в PANDA и создание программы для симуляции этих процессов в условиях реального эксперимента.

Аналитические расчеты с которыми приходится иметь дело в физике высоких энергий, и в частности при вычислении сечений рождений тяжелых кваркониев, оказываются слишком громоздкими для их проведения вручную. Сегодня для этих целей в физике используются специализированные компьютерные программы — системы компьютерной алгебры (СКА). Исторически, первая такая система Schoonship была создана в 1963 году Мартинусом Вельтманом для вычисления петлевых

интегралов в калибровочных теориях поля (работа которая в конечном счете была удостоена Нобелевской премии 1999 года). С тех пор было создано много программ для аналитических вычислений в физике высоких энергий. С развитием компьютерной техники значительно выросла и сложность рассматриваемых задач. В связи с этим, в последнее время стала актуальной тема развития новых компьютерных алгоритмов для работы с большими выражениями. В рамках данной работы, была создана система компьютерной алгебры — Redberry [50], которая предназначена для аналитических расчетов в физике высоких энергий. Все аналитические расчеты представленные в данной работе выполнены с использованием Redberry.

### Цель диссертационной работы

Целью данной работой является выяснение механизмов рождения  $P$ -волновых кваркониев ( $\chi_{c0,1,2}$  и  $\chi_{b0,1,2}$ ) в адронных взаимодействиях:

1. Построение теоретической модели рождения  $P$ -волновых чармониев  $\chi_c$  в экспериментах при высоких энергиях и получение теоретических предсказаний сечений рождения ускорителях на Тэватрон и БАК
2. Анализ экспериментальных данных по рождению состояний  $\chi_c$  в адронных экспериментах при высоких энергиях и определение непертурбативных параметров теоретической модели
3. Получение теоретических предсказаний  $p_T$ -спектров сечений рождения  $\chi_b(nP)$  для экспериментов на ускорителе БАК и получение предсказаний относительных выходов состояний  $\chi_b(nP)$  с различными значениями радиального квантового числа  $n$ .



4. Получение теоретических предсказаний сечений рождения  $\chi_c$  в реакциях протон-антипротонной аннигиляции при низких энергиях, и в частности построение Монте-Карло генератора рождения чармониев для практического применения коллаборацией эксперимента PANDA

Для решения первой задачи были проведены вычисления сечений рождения  $Q\bar{Q}$  ( $Q = c, b$ ) пары с различными квантовыми числами в рамках НРКХД как в синглетном так и в октетном по цвету состояниях. Было проведено численное интегрирование партонных сечений со структурными функциями глюонов для различных кинематических режимов, отвечающих различным экспериментальным установкам. Таким образом был найден  $p_T$ -спектр различных адронных каналов реакции.

Для решения второй задачи было проведено фитирование имеющихся экспериментальных данных на основе критерия Пирсона  $\chi^2$ . В результате была получена "вилка" на непертурбативные параметры НРКХД.

Для решения третьей задачи, непертурбативные матричные элементы боттомониевых переходов были оценены на основе результатов предыдущего пункта с использованием правил скейлинга НРКХД.

Для решения четвертой задачи были вычислены сечения образования  $\chi_c$  в кварк-антикварковой аннигиляции и создан программный код для симуляции процессов инклюзивного рождения этих частиц в условиях эксперимента PANDA.

## Научная новизна

Теоретический анализ процессов рождения  $P$ -волновых кваркониев с учетом высших по относительной скорости кварков вкладов НРКХД проведен впервые. Анализ и одновременное фитирование всей совокуп-

ности доступных экспериментальных по спектрам рождения  $\chi_c$  проведены впервые. Теоретические предсказания  $p_T$ -спектров  $\chi_{b0,1,2}$  для установок LHCb и ATLAS и  $\chi_{c1,2}$  для установки PANDA получены впервые. Для проведения аналитических расчетов в физике высоких энергий разработана новая система компьютерной алгебры, с помощью которой проведены все аналитические расчеты в данной работе.

### **Практическая значимость**

Теоретические предсказания  $p_T$ -спектров сечений рождения  $\chi_c$ - и  $\chi_b(nP)$ -мезонов имеют большую практическую значимость для установления механизмов рождения  $P$ -волновых кваркониев и прояснения структуры КХД в целом. Данные результаты использовались и могут быть использованы в дальнейшем экспериментальными группами ускорителя БАК для сравнения теории и эксперимента. Полученные предсказания относительных выходов состояний  $\chi_b(nP)$  с различными значениями радиального квантового числа  $n$  имеют практическую значимость для установления эффективностей регистрации состояний с различными  $n$ . Полученные предсказания сечений и разработанный Монте-Карло генератор событий для эксперимента PANDA имеют прямое практическое применение и уже используются коллаборацией PANDA для моделирования событий рождения чармониев и оценке эффективностей системы калориметрии PANDA по регистрации и реконструкции нейтральных частиц. Наконец, разработанная система компьютерной алгебры Redberry, с помощью которой проводились все аналитические расчеты в данной статье, имеет прямое практическое применение для проведения сложных аналитических расчетов в физике высоких энергий с использованием компьютера.

## Результаты выносимые на защиту

Следующие положения диссертации выносятся на защиту:

1. Продемонстрировано, что в сечениях рождения  $\chi_{c1,2}$ -мезонов в адронных экспериментах при высоких энергиях доминирующим оказывается синглетный по цвету вклад
2. Показано, что наиболее чувствительным инструментом для нахождения относительных вкладов октетных состояний в сечения рождения кваркониев является отношение сечений  $\sigma(\chi_{c2})/\sigma(\chi_{c1})$
3. Анализ экспериментальных данных по адронному рождению  $\chi_c$ -мезонов позволил найти две независимые области параметров модели; для точного определения допустимой области НРКХД параметров данных недостаточно
4. Получены предсказания сечений рождения  $\chi_b(nP)$  для ускорителя БАК; показано, что отношение сечений боттомониев  $\sigma(\chi_{b2})/\sigma(\chi_{b1})$  может быть получено с хорошей точностью из отношения чармониев  $\sigma(\chi_{c2})/\sigma(\chi_{c1})$  заменой импульсной шкалы  $p_T \rightarrow (M_{\chi_b}/M_{\chi_c})p_T$
5. Получены предсказания и разработан Монте-Карло генератор рождения  $\chi_{c1,2}$  в протон-антипротонной аннигиляции при низких энергиях в эксперименте PANDA

## Апробация работы

Апробация диссертации прошла на семинаре отжела теоретической физики ИФВЭ 15 апреля 2014 г. Основные результаты, представленные в диссертации, докладывались на нескольких рабочих встречах коллаборации PANDA, коллаборации LHCb, ежегодной сессии РАН, семина-

рах ИФВЭ, семинаре ОИЯИ и семинаре кафедры теоретической физики МГУ. Работа автора диссертации поддержана грантами РФФИ, Президента РФ и грантом ассоциации Гельмгольца (Германия) и Росатома.

### **Публикации**

По теме данной диссертации опубликовано 4 статьи в рецензируемых журналах [51–54] а также два препринта [50, 55].

### **Личный вклад автора**

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают результаты, которые получены при определяющем участии соискателя. Вся работа по написанию программ для выполнения анализа моделируемых процессов и получения результирующих распределений была выполнена лично автором диссертации.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 111 страниц, из них 98 страниц текста, включая 13 рисунков и 9 таблиц. Список литературы включает 101 наименование на 13 страницах.

# 1 Рождение чармониев в адронных экспериментах при высоких энергиях

## 1.1 Введение

В столкновениях адронов при высоких энергиях основным каналом реакции рождения кваркониев на партонном уровне является глюон-глюонное рассеяние. Наличие большого массового параметра — массы кваркония, естественным образом разбивает процесс рождения мезона на пертурбативную и непертурбативную части (*теорема о факторизации*). Действительно, из общих соображения ясно, что процесс рождения  $c\bar{c}$  пары происходит на масштабе комптоновской длины волны пары  $1/M_{c\bar{c}}$ , т.е. является существенно пертурбативным, в то время как последующая адронизация пары в наблюдаемую происходит уже на масштабе длины волны де Бройля  $1/(M_{c\bar{c}}v)$ , где  $v$  — относительная скорость кварков в мезоне, и, очевидно, является существенно непертурбативным. Если рассматривать рождение пары в лидирующем порядке теории возмущений  $gg \rightarrow c\bar{c}$ , то возникает ряд очевидных трудностей: во-первых, с использованием обычной модели коллинеарных партонных распределений, ясно что в таком процессе пара рождается с нулевым поперечным импульсом, что противоречит наблюдаемым данным, во-вторых рожде-

ние аксиального мезона запрещено теоремой Ландау-Янга [56, 57], что также противоречит наблюдениям. Первая трудность может быть преодолена с использованием не интегрированных партонных распределений в подходе  $k_T$ -факторизации [58–60]; в тоже время ясно, что качественно добиться больших значений поперечного импульса в таком подходе не удастся (тем не менее использованием неколлинеарных функций распределения приводит к видимым поправкам в форме спектра рождения мезонов [61, 62]). Для получения большого поперечного импульса и снятия запрета на  $1^{--}$ , следует рассматривать партонный процесс в следующем порядке теории возмущений, т.е. с изучением дополнительного жесткого глюона —  $gg \rightarrow c\bar{c}g$ .

В рамках НРКХД [22] фоковский столбец наблюдаемого мезона может быть разложен в ряд теории возмущений по относительной скорости кварков в мезоне:

$$\begin{aligned}
|^{2S+1}L_J\rangle &= O(1)|^{2S+1}L_J^{[1]}\rangle \\
&+ O(v)|^{2S+1}(L \pm 1)_{J'}^{[8]}g\rangle \quad (\text{E1}) \\
&+ O(v^2)|^{2(S \pm 1)+1}L_{J'}^{[8]}g\rangle \quad (\text{M1}) \\
&+ O(v^2)|^{2S+1}L_J^{[1,8]}gg\rangle \quad (\text{E1} \times \text{E1}) \\
&+ \dots \quad (1)
\end{aligned}$$

В приведенном выражении E1 и M1 обозначают электрический ( $\Delta L = 1$ ,  $\Delta S = 0$ ) и магнитный ( $\Delta L = 0$ ,  $\Delta S = 1$ ) переходы соответственно. В случае рождения  $\chi_c$ -мезонов это разложение принимает вид:

$$\begin{aligned}
|\chi_{cJ}\rangle &= \langle \mathcal{O}^{\chi_{cJ}}[{}^3P_J^{[1]}] \rangle |{}^3P_J^{[1]}\rangle + \langle \mathcal{O}^{\chi_{cJ}}[{}^3S_1^{[8]}] \rangle |{}^3S_1^{[8]}g\rangle + \\
&+ \langle \mathcal{O}^{\chi_{cJ}}[{}^1P_1^{[8]}] \rangle |{}^1P_1^{[8]}g\rangle + \sum_{J'} \langle \mathcal{O}^{\chi_{cJ}}[{}^3P_{J'}^{[8]}] \rangle |{}^3P_{J'}^{[8]}gg\rangle + \\
&+ \dots \quad (2)
\end{aligned}$$

Первое слагаемое в данном разложении соответствует рождению  $c\bar{c}$  в синглетном по цвету состоянии. Вероятность соответствующего перехода пропорциональна квадрату производной радиальной части волновой функции связанного  $P$ -волнового состояния взятой в начале координат:

$$\langle \mathcal{O}_{\chi_{cJ}} [{}^3P_J^{[1]}] \rangle = \frac{3}{4\pi} (2J + 1) |R'(0)|^2 \quad (3)$$

Эта величина имеет порядок  $v^5$ . Следующее слагаемое в разложении соответствует образованию  $S$ -волнового связанного состояния  $c\bar{c}$  пары с последующим испусканием или поглощением ультрамягкого глюона и образованием конечного мезона. Сечение рождения пары пропорционально  $v^3$ , в то время как амплитуда перехода в наблюдаемую —  $v^2$ , что в сумме приводит к вкладу такого же порядка по  $v$  как и синглетное слагаемое. Как покажет дальнейший анализ, данный в данной главе, описать экспериментальные данные с учетом только лидирующих вкладов не удастся. Для этого, в рассмотрение включены следующие два вклада, который имеют порядок  $v^6$ , и согласно НРКХД должны быть подавлены.

Амплитуды переходов в наблюдаемый мезон

$$\langle \mathcal{O}_{\chi_{cJ}} [{}^{2S+1}L_J^{[1,8]}] \rangle = \left\langle {}^{2S+1}L_J^{[1,8]} g \left| \chi_{cJ} \right. \right\rangle$$

являются непертурбативными параметрами, которые могут быть выражены через вакуумные средние 4-х фермионных операторов НРКХД. К сожалению, определить эти параметры из первых принципов на сегодняшний день не удастся (кроме синглетного вклада, который определяется из волновой функции, которая в свою очередь может быть найдена численным моделированием с использованием потенциальных моделей). В данной работе, эти параметры будут извлекаться из сравнения с имеющимися экспериментальными данными. При этом не все из этих параметров являются независимыми. Согласно НРКХД справедливы следующие

соотношения:

$$\langle \mathcal{O}^{\chi_{cJ}} [{}^3S_1^{[8]}] \rangle = (2J + 1) \langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}} [{}^3S_1^{[8]}] \rangle \quad (4)$$

$$\langle \mathcal{O}^{\chi_{cJ}} [{}^1P_1^{(8)}] \rangle = (2J + 1) \langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}} [{}^1P_1^{(8)}] \rangle \quad (5)$$

$$\langle \mathcal{O}^{\chi_{cJ}} [{}^3P_{J'}^{(8)}] \rangle = (2J + 1) \langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}} [{}^3P_0^{(8)}] \rangle \quad (6)$$

что в итоге оставляет четыре независимых параметра.

Целью данной главы является вычисление сечений рождения связанных состояний  ${}^3P_{0,1,2}^{[1,8]}$ ,  ${}^3S_1^{[8]}$  и  ${}^1P_1^{[8]}$  и определение непертурбативных параметров из разложения (2) исходя из фитирования экспериментальных данных [14, 40–44], а также получение теоретических предсказаний для сечений в еще не исследованных кинематических областях.

## 1.2 Структура амплитуды рассеяния в рамках НРКХД

На языке амплитуды рассеяния, теорема о факторизации означает, что амплитуда рождения кваркония в рамках НРКХД может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(gg \rightarrow \chi_c + g + X) = \sum \mathcal{A}(gg \rightarrow c\bar{c} \left[ ({}^{2S+1})L_J^{[1,8]} \right] + g)_{\text{перт.}} \times \\ \times \mathcal{A}(c\bar{c} \left[ ({}^{2S+1})L_J^{[1,8]} \right] \rightarrow \chi_{cJ} + X)_{\text{неперт.}}, \quad (7) \end{aligned}$$

где суммирование производится по квантовым числам  $S, L, J$  согласно формуле (2) (очевидно, что различные слагаемые при этом не интерферируют). Каждое слагаемое является произведением пертурбативной и непертурбативной частей амплитуды соответствующего подпроцесса: первый множитель описывает рождение пары  $c\bar{c}$  в жесткой реакции с конкретными квантовыми числами, второй множитель описывает непертурбативный, мягкий процесс адронизации пары в наблюдаемое состояние за счет взаимодействия с длинноволновыми глюонами.



Возводя суммарную амплитуду  $gg \rightarrow \chi_c + g$  в квадрат и интегрируя по фазовому объему, получаем сечение партонной реакции:

$$d\hat{\sigma}(gg \rightarrow \chi_c + g) = \sum d\hat{\sigma}(gg \rightarrow c\bar{c} \left[ (2S+1)L_J^{[1,8]} \right] + g)_{\text{перт.}} \times \\ \times \langle \mathcal{O}_{\chi_{cJ}} \left[ (2S+1)L_J^{[1,8]} \right] \rangle_{\text{неперт.}} \quad (8)$$

На Рис. 1 и 2 показаны диаграммы Фейнмана отвечающие процессам рождения  $P$ -волновых кваркониев на партонном уровне. Волнистая линия отделяет пертурбативную от непертурбативной части амплитуды процесса. Закрашенная часть схематически изображает процесс адронизации промежуточного состояния пары  $c\bar{c} \left[ (2S+1)L_J^{[1,8]} \right]$  в наблюдаемый мезон  $\chi_{cJ}$  через излучение/поглощение мягких глюонов. При этом, на диаграммах Рис. 1 кварк-антикварковая пара может родиться как в синглетном, так и в октетном по цвету состоянии с произвольными квантовыми числами. В тоже время, на диаграммах Рис. 2, очевидно, что  $c\bar{c}$  пара может образоваться только в октетном состоянии; при этом, квантовые числа пары ограничены квантовыми числами глюона, а следовательно, единственное состояние из разложения (2), которое будет давать вклад в этих диаграммах —  $|^3S_1^{[8]}\rangle$ .

В самом общем случае, пертурбативная часть амплитуды может быть записана в виде:

$$\mathcal{A}(gg \rightarrow c\bar{c} \left[ (2S+1)L_J^{[1,8c]} \right] + g)_{\text{перт.}} = \\ = \sum_{L_z, S_z} \sum_{s_1, s_2} \sum_{i, j} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2q^0} \delta(q^0 - \frac{\vec{q}^2}{2m_c}) Y_{LL_z}(\vec{q}) \langle \frac{1}{2}, s_1; \frac{1}{2}, s_2 | S, S_z \rangle \times \\ \times \langle L, L_z; S, S_z | J, J_z \rangle \langle 3, i; \bar{3}, j | 1, 8c \rangle \times \\ \times \bar{u}_i(P/2 + q; s_1) \mathcal{A}(gg \rightarrow c\bar{c} \left[ (2S+1)L_J^{[1,8c]} \right] g)_{\text{амп.}} v^j(P/2 - q; s_2), \quad (9)$$

где  $P, q$  — суммарный и относительный импульсы пары  $c\bar{c}$  соответ-

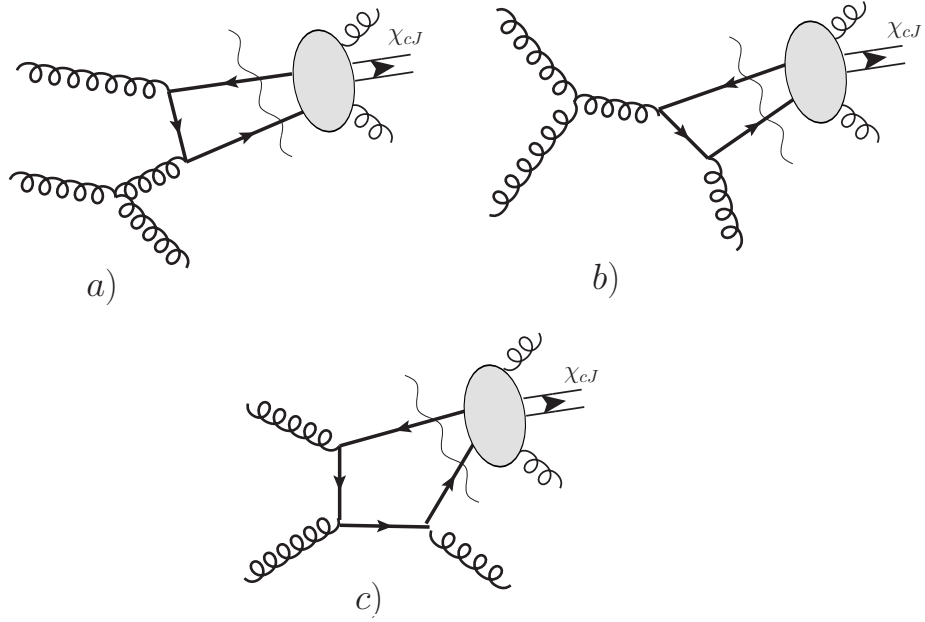


Рис. 1: Типичные диаграммы Фейнмана соответствующие рождению синглетных и октетных промежуточных состояний  $c\bar{c}$   $\left[ {}^3P_J^{[1,8]}, {}^3S_1^{[8]}, {}^1P_1^{[8]} \right]$  с последующей адронизацией в наблюдаемый мезон  $\chi_{cJ}$  с излучением мягких глюонов. Волнистая линия отделяет пертурбативную от непертурбативной части амплитуды процесса (7).

ственно,  $m_c$  — масса кварка,  $Y_{LL_z}(\vec{q})$  — фурье-образ сферических функций,  $\mathcal{A}_{\text{амп.}}$  — глюонная часть амплитуды,  $\langle \frac{1}{2}, s_1; \frac{1}{2}, s_2 | S, S_z \rangle$ ,  $\langle \mathbf{3}, i; \bar{\mathbf{3}}, j | 1, 8c \rangle$  и  $\langle L, L_z; S, S_z | J, J_z \rangle$  — коэффициенты Клебша-Гордана SU(2), SU(3) и SO(3) соответственно. При этом

$$\langle \mathbf{3}, i; \bar{\mathbf{3}}, j | 1 \rangle = \delta_i^j / \sqrt{N_c} \quad (10)$$

$$\langle \mathbf{3}, i; \bar{\mathbf{3}}, j | 8c \rangle = \sqrt{2} T_c^i{}^j. \quad (11)$$

Следует сделать ряд важных замечаний относительно формулы (9). В первую очередь, следует отметить, что поскольку пара  $c\bar{c}$  имеет пренебрежимо малое перекрытие с нерелятивистской волновой функцией кваркония, которое сосредоточено в области малых  $q$ , область интегрирования в (9) фактически должна быть ограничена малыми значениями

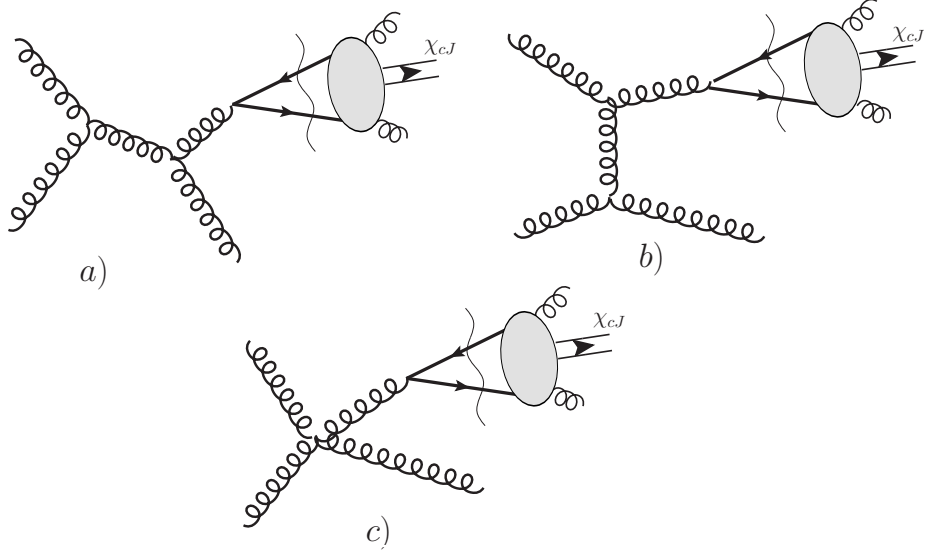


Рис. 2: Типичные диаграммы Фейнмана соответствующие рождению октетных промежуточных состояний  $c\bar{c} \left[ 3S_1^{[8]} \right]$  с последующей адронизацией в наблюдаемый мезон  $\chi_{cJ}$  с излучением мягких глюонов. Волнистая линия отделяет пертурбативную от непертурбативной части амплитуды процесса (7).

$|\vec{q}|$ . Для этого, в выражении (9) мы вставили  $\delta$ -функцию, которая ограничивает область интегрирования по  $|\vec{q}|$  поверхностью  $|\vec{q}| = m_c v \ll m_c$ . Оставшееся интегрирование по углам проецирует пару на нужное значение орбитального момента. Фактически, из-за малости относительного импульса, для взятия интеграла мы можем разложить подинтегральное выражение в ряд по  $q$  и ограничиться первым не исчезающим слагаемым.

Для дальнейших целей, удобно переписать формулу (9) через следы:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(gg \rightarrow c\bar{c} \left[ (2S+1) L_J^{[1,8c]} \right] + g)_{\text{перт.}} = \\
 = \sum_{L_z, S_z} \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3 2q^0} \delta(q^0 - \frac{\vec{q}^2}{2m_c}) Y_{LL_z}(\vec{q}) \langle L, L_z; S, S_z | J, J_z \rangle \times \\
 \times \text{Tr} \left[ \mathcal{C}^{[1,8c]} \Pi_{S, S_z}(q; P) \mathcal{A}_{\text{амп.}}(q) \right], \quad (12)
 \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{C}^{[1]} = 1/\sqrt{N_c} \quad (13)$$

$$\mathcal{C}^{[8c]} = \sqrt{2}T^c, \quad (14)$$

и

$$\begin{aligned} \Pi_{SS_z}(P; q) = \sum_{s_1, s_2} \left\{ v(P/2 - q; s_2) \bar{u}(P/2 + q; s_1) \times \right. \\ \left. \times \left\langle \frac{1}{2}, s_1; \frac{1}{2}, s_2 | S, S_z \right\rangle \right\}, \quad (15) \end{aligned}$$

проектор на состояние с определенным полным спином. Выражения для этих проекторов с точностью до слагаемых порядка  $O(v^3)$  получены в работах [63, 64]. В общем случае, эти операторы вычислены в работе [65]. Для наших целей, достаточно ограничиться слагаемыми порядка  $O(v^2)$ :

$$\Pi_{00}(P; q) = \frac{-\sqrt{2}}{4m_c} \left( \frac{\hat{P}}{2} - \hat{q} - m_c \right) \gamma_5 \left( \frac{\hat{P}}{2} + \hat{q} + m_c \right), \quad (16)$$

$$\Pi_{1S_z}(P; q) = \frac{-\sqrt{2}}{4m_c} \left( \frac{\hat{P}}{2} - \hat{q} - m_c \right) \hat{\epsilon}(P; S_z) \left( \frac{\hat{P}}{2} + \hat{q} + m_c \right). \quad (17)$$

Для проведения интегрирования по углам, разложим подинтегральный след в ряд по  $q$ :

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[ \mathcal{C}^{[1,8c]} \Pi_{S, S_z}(q; P) \mathcal{A}_{\text{амп.}}(q) \right] = \\ = \text{Tr} \left[ \mathcal{C}^{[1,8c]} \Pi_{S, S_z}(0; P) \mathcal{A}_{\text{амп.}}(0) \right] + \\ + q^\mu \frac{d}{dq_\mu} \text{Tr} \left[ \mathcal{C}^{[1,8c]} \Pi_{S, S_z}(0; P) \mathcal{A}_{\text{амп.}}(0) \right] \Big|_{q \rightarrow 0} + \dots \quad (18) \end{aligned}$$

Вынося явным образом спиновый вектор поляризации из (17):

$$\Pi_{1S_z}(P; q) = \epsilon_\mu(S_z) \Pi_{1S_z}^\mu(P; q) \quad (19)$$

и проводя интегрирование по углам, получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(gg \rightarrow c\bar{c} [{}^1S_0^{[1,8c]}] + g)_{\text{перт.}} &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \text{Tr} \left[ \mathcal{C}^{[1,8c]} \Pi_{0,0}(0; P) \mathcal{A}_{\text{амп.}}(0) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(gg \rightarrow c\bar{c} [{}^3S_1^{[1,8c]}] + g)_{\text{перт.}} &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \epsilon_\mu(S_z) \times \text{Tr} \left[ \mathcal{C}^{[1,8c]} \Pi_{1,S_z}^\mu(0; P) \mathcal{A}_{\text{амп.}}(0) \right] \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(gg \rightarrow c\bar{c} [{}^1P_1^{[1,8c]}] + g)_{\text{перт.}} &= \\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \epsilon_\mu(L_z) \times \frac{d}{dq_\mu} \text{Tr} \left[ \mathcal{C}^{[1,8c]} \Pi_{0,0}(q; P) \mathcal{A}_{\text{амп.}}(q) \right] \Big|_{q \rightarrow 0} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(gg \rightarrow c\bar{c} [{}^3P_J^{[1,8c]}] + g)_{\text{перт.}} &= \\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{L_z, S_z} \langle L, L_z; S, S_z | J, J_z \rangle \epsilon_\mu(L_z) \epsilon_\nu(S_z) \times \\ &\quad \times \frac{d}{dq_\mu} \text{Tr} \left[ \mathcal{C}^{[1,8c]} \Pi_{S, S_z}^\nu(q; P) \mathcal{A}_{\text{амп.}}(q) \right] \Big|_{q \rightarrow 0} \end{aligned} \quad (23)$$

В последнем случае, проектирование на полный момент может быть выполнено следующим образом [64]:

$$\sum_{L_z, S_z} \langle L, L_z; S, S_z | 0, 0 \rangle \epsilon_\mu(L_z) \epsilon_\nu(S_z) = \frac{1}{\sqrt{3}} (g_{\mu\nu} - \frac{P_\mu P_\nu}{M^2}) \quad (24)$$

$$\sum_{L_z, S_z} \langle L, L_z; S, S_z | 1, J_z \rangle \epsilon_\mu(L_z) \epsilon_\nu(S_z) = \frac{-i}{\sqrt{2}M} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\alpha \epsilon^\beta(J_z) \quad (25)$$

$$\sum_{L_z, S_z} \langle L, L_z; S, S_z | 2, J_z \rangle \epsilon_\mu(L_z) \epsilon_\nu(S_z) = \epsilon_{\mu\nu}(J_z), \quad (26)$$

где  $\epsilon_\mu(J_z)$  и  $\epsilon_{\mu\nu}(J_z)$  — векторы и тензор поляризации аксиального и тензорного состояний соответственно:

$$\sum \epsilon_\alpha \epsilon_\beta^* \equiv J_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{P_\alpha P_\beta}{M^2}, \quad (27)$$

$$\sum \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2} (J_{\alpha\mu} J_{\beta\nu} + J_{\alpha\nu} J_{\beta\mu}) - \frac{1}{3} J_{\alpha\beta} J_{\mu\nu}. \quad (28)$$

Для вычисления сечения реакции, необходимо вычислить квадрат амплитуды, усреднить по поляризациям начальных частиц и просуммировать по поляризациям конечных.

### 1.3 Вычисление спиральных амплитуд в жесткой реакции

Как видно из Рис. 1 и 2, диаграммы процессов содержат трех-глюонную вершину. Как известно, для корректного вычисления таких диаграмм в калибровке Лоренца, в которой глюонный пропагатор и сумма по поляризации глюона имеют простейший вид

$$\sum \epsilon_\mu(k) \epsilon_\nu^*(k) = -g_{\mu\nu}, \quad D_{\mu\nu}^{ab}(k^2) = \frac{-g_{\mu\nu}}{k^2} \delta^{ab}, \quad (29)$$

необходимо учитывать вклад диаграмм с духами Фаддеева-Попова. С другой стороны, избежать этого усложнения можно вычислив по отдельности амплитуды рассеяния для фиксированных значений поляризаций всех частиц (например в системе центра масс начальных частиц). Прежде чем перейти к этому вычислению, отметим, что еще одним способом избежать работы с духами является использование аксиальной калибровки КХД:

$$\mathcal{L}_{g.f.} = -\frac{1}{2\xi} (n_\mu A^{a\mu})^2, \quad (30)$$

где  $\xi$  — произвольная константа,  $n_\mu$  — вспомогательный пространственно-подобный вектор  $n_\mu n^\mu = -1$ . В частном случае калибровки Ландау ( $\xi \rightarrow 0$ ), такая фиксация приводит к следующим выражениям для суммы по поляризациям глюонов и глюонному пропагатору:

$$\sum \epsilon_\mu(k) \epsilon_\nu^*(k) = -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{(k, n)^2} - \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{(k, n)} \quad (31)$$

$$D_{\mu\nu}^{ab}(k^2) = \delta^{ab} \frac{1}{k^2} \sum \epsilon_\mu(k) \epsilon_\nu^*(k) \quad (32)$$

В настоящей работе мы провели вычисления сечений как в аксиальной калибровке КХД так и с использованием фиксированных поляризаций частиц. В данном разделе мы остановимся подробнее именно на последнем способе.

### 1.3.1 Ковариантные выражения для векторов поляризации в реакции $2 \rightarrow 2$

Итак, рассмотрим рождение пары  $c\bar{c}$  в глюонной реакции:

$$g(k_1) + g(k_2) \rightarrow g(k_3) + \mathcal{Q}(p), \quad (33)$$

где в скобках указаны импульсы частиц, а  $\mathcal{Q}$  — пара  $c\bar{c}$  с некоторыми квантовыми числами. Наша задача — выразить векторы поляризации глюонов, пары в состоянии  ${}^3P_1$ , а также тензор поляризации состояния  ${}^3P_2$  через 4-импульсы частиц в системе центра масс. Для этого, введем следующие вспомогательные векторы:

$$n_{\perp}^{\mu} = \frac{-2}{\sqrt{\hat{s}\hat{t}\hat{u}}} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\nu} k_{2\alpha} k_{3\beta} \quad (34)$$

$$n_{12}^{\mu} = \frac{2}{\hat{s}} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\nu} k_{2\alpha} n_{\perp\beta} \quad (35)$$

$$n_{34}^{\mu} = \frac{2}{-\hat{t} - \hat{u}} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{3\nu} p_{\alpha} n_{\perp\beta}, \quad (36)$$

где  $\hat{s}, \hat{t}, \hat{u}$  — мандельстамовские переменные:

$$\hat{s} = (k_1 + k_2)^2 = (k_3 + p)^2$$

$$\hat{t} = (k_1 - k_3)^2 = (k_2 - p)^2$$

$$\hat{u} = (k_2 - k_3)^2 = (k_1 - p)^2$$

Как нетрудно видеть, смысл введенных вспомогательных векторов прост:  $n_{\perp}$  — вектор ортогональный плоскости реакции,  $n_{12}$  — вектор лежащий в плоскости реакции и ортогональный векторам  $k_1$  и  $k_2$ ,  $n_{34}$  — вектор

лежащий в плоскости реакции и ортогональный векторам  $k_3$  и  $p$ . Коэффициенты в (34), (35), (36) подобраны так, что

$$n_{\perp}^2 = n_{12}^2 = n_{34}^2 = -1.$$

С использованием этих векторов, векторы поляризации глюонов принимают вид:

$$\epsilon_1^{(\pm 1)\mu} = \frac{n_{12}^{\mu} \pm i n_{\perp}^{\mu}}{\sqrt{2}} \quad (37)$$

$$\epsilon_2^{(\pm 1)\mu} = \frac{n_{12}^{\mu} \mp i n_{\perp}^{\mu}}{\sqrt{2}} \quad (38)$$

$$\epsilon_3^{(\pm 1)\mu} = \frac{n_{34}^{\mu} \pm i n_{\perp}^{\mu}}{\sqrt{2}} \quad (39)$$

Для вектора поляризации состояния  ${}^3P_1$  находим:

$$\epsilon_p^{(\pm 1)\mu} = \frac{n_{34}^{\mu} \mp i n_{\perp}^{\mu}}{\sqrt{2}} \quad (40)$$

$$\epsilon_p^{(0)\mu} = \frac{1}{M} p^{\mu} - \frac{2M}{\hat{s} - M^2} k_3^{\mu} \quad (41)$$

Последнее соотношение получено исходя из свойства  $\epsilon_3^{(0)\mu} p_{\mu} = -M$  и условия нормировки вектора поляризации.

Для вычисления тензора поляризации состояния  ${}^3P_2$ , воспользуемся следующим разложением:

$$\epsilon_{\mu\nu}^{(\lambda)} = \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \langle 1, \lambda_1; 1, \lambda_2 | 2, \lambda \rangle \epsilon_{p\mu}^{(\lambda_1)} \epsilon_{p\nu}^{(\lambda_2)}, \quad (42)$$

где  $\langle 1, \lambda_1; 1, \lambda_2 | 2, \lambda \rangle$  — коэффициенты Клебша-Гордана группы  $SO(3)$ .

Прямым вычислением находим:

$$\epsilon^{(\pm 2)\mu\nu} = \epsilon_p^{(\pm 1)\mu} \epsilon_p^{(\pm 1)\nu} \quad (43)$$

$$\epsilon^{(\pm 1)\mu\nu} = \frac{\epsilon_p^{(\pm 1)\mu} \epsilon_p^{(0)\nu} + \epsilon_p^{(0)\mu} \epsilon_p^{(\pm 1)\nu}}{\sqrt{2}} \quad (44)$$

$$\epsilon^{(0)\mu\nu} = \frac{\epsilon_p^{(+1)\mu} \epsilon_p^{(-1)\nu} + 2\epsilon_p^{(0)\mu} \epsilon_p^{(0)\nu} + \epsilon_p^{(-1)\mu} \epsilon_p^{(+1)\nu}}{\sqrt{6}} \quad (45)$$



### 1.3.2 Выражения спиральных амплитуд

В данном разделе мы приводим выражения для спиральных амплитуд процессов. Результаты полученные в данной работе совпадают с результатами работ [23, 24, 66, 67], однако не совпадают с [68]. Последнее вызвано тем, что авторы работы [68] работая в калибровке Лоренца не учли вклады от диаграмм с духами Фаддеева-Попова.

В данном разделе мы приводим выражения для спиральных амплитуд реакций. Мы используем следующие обозначения:

$$Q = \hat{s} \hat{t} \hat{u}, \quad (46)$$

$$P = \hat{s} \hat{t} + \hat{s} \hat{u} + \hat{u} \hat{t} \quad (47)$$

Все расчеты выполнены в разработанной автором системе компьютерной алгебры REDBERRY (см. главу 4).

$$\begin{aligned} \sum_{|\lambda=0|} \left| \mathcal{A} \left( gg \rightarrow Q \bar{Q} [{}^3 P_1^{[1]}] g \right) \right|^2 &= \\ &= \frac{8(\pi\alpha_S)^3}{M^3} \frac{Q}{(Q - M^2 P)^4} (\hat{s}^2 - \hat{t} \hat{u})^2 (P^2 - Q M^2) \quad (48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{|\lambda=1|} \left| \mathcal{A} \left( gg \rightarrow Q \bar{Q} [{}^3 P_1^{[1]}] g \right) \right|^2 &= \\ &= \frac{3(\alpha_S \pi)^3}{M} \frac{1}{(Q - M^2 P)^4} \times \\ &\times (-2P^5 + P^4(\hat{s}^2 + \hat{t}^2 + \hat{u}^2) + 2P^3 Q(3\hat{s} + 2(\hat{t} + \hat{u})) - \\ &- P^2 Q(7Q + 2(2\hat{s}^3 + \hat{t}^3 + \hat{u}^3)) + \\ &+ 2PQ^2 \hat{t} \hat{u} - 2Q^2(Q(2\hat{s} + \hat{t} + \hat{u}) - \hat{s}^4)) \quad (49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{|\lambda=0|} \left| \mathcal{A} \left( gg \rightarrow Q\bar{Q} [{}^3P_2^{[1]}] g \right) \right|^2 &= \\
&= \frac{8(\pi\alpha_S)^3}{3M^3} \frac{\hat{s}}{(P + \hat{s}^2)^4 (\hat{t} + \hat{u})^6} \times \\
&\quad \times (30P^5 \hat{t}\hat{u} + P^4(Q(185\hat{s} + 108(\hat{t} + \hat{u})) + 23\hat{t}\hat{u}(\hat{t}^2 + \hat{u}^2)) + \\
&\quad + P^3(-83Q^2 + Q(126\hat{s}^3 + (\hat{t} + \hat{u})(31\hat{t}^2 - 60\hat{t}\hat{u} + 31\hat{u}^2)) + 10\hat{t}\hat{u}(\hat{t}^4 + \hat{u}^4)) + \\
&\quad + P^2(Q^2(93\hat{s}^2 + 56\hat{t}^2 - 84\hat{t}\hat{u} + 56\hat{u}^2) + 2Q(18\hat{s}^5 + \hat{t}^5 + 9\hat{t}^4\hat{u} + 9\hat{t}\hat{u}^4 + \hat{u}^5) + 2\hat{t}\hat{u}(\hat{t}^6 + \hat{u}^6)) + \\
&\quad + PQ(-2Q^2(54\hat{s} + 23(\hat{t} + \hat{u})) + Q(72\hat{s}^4 + \\
&\quad + 17\hat{t}^4 - 21\hat{t}^3\hat{u} - 21\hat{t}\hat{u}^3 + 17\hat{u}^4) + 8\hat{t}\hat{u}(\hat{t}^5 + \hat{u}^5)) + \\
&\quad + 3Q^2(-37Q^2 + Q(12\hat{s}^3 + 7(\hat{t} + \hat{u})(\hat{t}^2 - 3\hat{t}\hat{u} + \hat{u}^2)) + 3\hat{t}\hat{u}(\hat{t}^4 + \hat{u}^4))) \quad (50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{|\lambda=1|} \left| \mathcal{A} \left( gg \rightarrow Q\bar{Q} [{}^3P_2^{[1]}] g \right) \right|^2 &= \\
&= -\frac{4(\pi\alpha_S)^3}{M} \frac{1}{(P + \hat{s}^2)^4 (\hat{t} + \hat{u})^6} \times \\
&\quad \times (-57P^6 - P^5(44\hat{s}^2 + 34\hat{t}^2 - 35\hat{t}\hat{u} + 34\hat{u}^2) + \\
&\quad + P^4(Q(200\hat{s} + 133(\hat{t} + \hat{u})) - 16\hat{s}^4 - 9(\hat{t}^4 - 2\hat{t}^3\hat{u} - 2\hat{t}\hat{u}^3 + \hat{u}^4)) + \\
&\quad + 4P^3(-27Q^2 + Q(24\hat{s}^3 + (\hat{t} + \hat{u})(6\hat{t}^2 - 19\hat{t}\hat{u} + 6\hat{u}^2)) + \hat{t}\hat{u}(\hat{t}^4 + \hat{u}^4)) + \\
&\quad + P^2Q(Q(70\hat{s}^2 + 33\hat{t}^2 - 34\hat{t}\hat{u} + 33\hat{u}^2) + 2(16\hat{s}^5 + \hat{t}^5 + \hat{u}^5)) - \\
&\quad - 2PQ^2(2Q(19\hat{s} + 6(\hat{t} + \hat{u})) - 4(8\hat{s}^4 + \hat{t}^4)9\hat{t}^3\hat{u} + 9\hat{t}\hat{u}^3 - 4\hat{u}^4) + \\
&\quad + 2Q^3(-37Q + 16\hat{s}^3 + (\hat{t} + \hat{u})(5\hat{t}^2 - 16\hat{t}\hat{u} + 5\hat{u}^2))) \quad (51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{|\lambda=2|} \left| \mathcal{A} \left( gg \rightarrow Q\bar{Q} [{}^3P_2^{[1]}] g \right) \right|^2 &= \\
&= -\frac{16(\pi\alpha_S)^3}{Q} \frac{M}{(P + \hat{s}^2)^4 (\hat{t} + \hat{u})^6} \times \\
&\quad \times (2P^7 + P^6(\hat{s}^2 + 3\hat{t}^2 + 8\hat{t}\hat{u} + 3\hat{u}^2) + \\
&\quad + P^5(-Q(11\hat{s} + 23(\hat{t} + \hat{u})) + 2\hat{t}^4 + 5\hat{t}^3\hat{u} + 5\hat{t}\hat{u}^3 + 2\hat{u}^4) + \\
&\quad + P^4(27Q^2 - Q(4\hat{s}^3 + (\hat{t} + \hat{u})(13\hat{t}^2 + 6\hat{t}\hat{u} + 13\hat{u}^2)) + \hat{t}^6 + 2\hat{t}^5\hat{u} + 2\hat{t}\hat{u}^5 + \hat{u}^6) + \\
&\quad + P^3Q(Q(7\hat{s}^2 + 17\hat{t}^2 + 15\hat{t}\hat{u} + 17\hat{u}^2) - 2\hat{t}^5 - 3\hat{t}^4\hat{u} - 3\hat{t}\hat{u}^4 - 2\hat{u}^5) + \\
&\quad + P^2Q^2(3Q(2\hat{s} + \hat{t} + \hat{u}) + 2\hat{s}^4 - \hat{t}^4 - 2\hat{t}^3\hat{u} - 2\hat{t}\hat{u}^3 - \hat{u}^4) + \\
&\quad + PQ^3(-5Q + 4\hat{s}^3 + 2\hat{t}^3 + \hat{t}^2\hat{u} + \hat{t}\hat{u}^2 + 2\hat{u}^3) + \\
&\quad + 2Q^4(\hat{s}^2 + \hat{t}^2 + \hat{u}^2)) \quad (52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum \left| \mathcal{A} \left( gg \rightarrow Q\bar{Q} [{}^1S_0^{[8]}] g \right) \right|^2 &= \\
&= \frac{5(4\pi\alpha_S)^3}{16M} (\hat{t}^2\hat{u}^2 + \hat{s}\hat{t}\hat{u}(\hat{t} + \hat{u}) + \hat{s}^2(\hat{t}^2 + \hat{t}\hat{u} + \hat{u}^2)) \times \\
&\quad \times \frac{(\hat{s}^4 + 2\hat{s}^3(\hat{t} + \hat{u}) + 3\hat{s}^2(\hat{t} + \hat{u})^2 + 2\hat{s}(\hat{t} + \hat{u})^3 + (\hat{t}^2 + \hat{t}\hat{u} + \hat{u}^2)^2)}{\hat{s}\hat{t}\hat{u}(\hat{s} + \hat{t})^2(\hat{s} + \hat{u})^2(\hat{t} + \hat{u})^2} \quad (53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{|\lambda=0|} \left| \mathcal{A} \left( gg \rightarrow Q\bar{Q} [{}^3S_1^{[8]}] g \right) \right|^2 &= \\
&= \frac{(4\pi\alpha_S)^3}{144M^3} \frac{2M^2\hat{s}}{(\hat{s} - M^2)^2} (\hat{t}^2 + \hat{u}^2) \hat{t}\hat{u} \times \\
&\quad \times \frac{19M^4 - 27(\hat{s}\hat{t} + \hat{t}\hat{u} + \hat{u}\hat{s})}{(\hat{s} - M^2)^2(\hat{t} - M^2)^2(\hat{u} - M^2)^2} \quad (54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{|\lambda=1|} \left| \mathcal{A} \left( gg \rightarrow Q\bar{Q} [{}^3S_1^{[8]}] g \right) \right|^2 = \\
& = \frac{(4\pi\alpha_S)^3}{144M^3} \frac{\hat{s}^2}{(\hat{s} - M^2)^2} \left( (\hat{s} - M^2)^4 + \hat{t}^4 + \hat{u}^4 + 2M^4(\hat{t}\hat{u}/\hat{s})^2 \right) \times \\
& \quad \times \frac{19M^4 - 27(\hat{s}\hat{t} + \hat{t}\hat{u} + \hat{u}\hat{s})}{(\hat{s} - M^2)^2(\hat{t} - M^2)^2(\hat{u} - M^2)^2} \quad (55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum \left| \mathcal{A} \left( gg \rightarrow Q\bar{Q} [{}^3P_0^{[8]}] g \right) \right|^2 = \\
& = \frac{40\pi^3\alpha_S^3}{M^3Q(-M^2P + Q)^4} \left( 9M^4P^4(-M^4 + P)^2 - \right. \\
& \quad - 9M^{14}P^2Q + 3M^{10}P^3Q + 27M^6P^4Q - 6M^2P^5Q + \\
& \quad + 18M^{12}PQ^2 - 32M^8P^2Q^2 - 4M^4P^3Q^2 + P^4Q^2 - \\
& \quad \left. - 13M^{10}Q^3 + 11M^6PQ^3 - M^2P^2Q^3 + 5M^4Q^4 \right) \quad (56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{|\lambda=0|} \left| \mathcal{A} \left( gg \rightarrow Q\bar{Q} [{}^3P_1^{[8]}] g \right) \right|^2 = \\
& = -\frac{5(4\pi\alpha_S)^3}{6M^3} \frac{Q(-P^2 + P\hat{t}\hat{u} - \hat{s}(Q - \hat{s}^3 + \hat{s}) + \hat{t}\hat{u})}{(Q - M^2P)^4} \times \\
& \quad \times (M^8 - M^4(\hat{s}^2 + 2\hat{t}\hat{u}) + P\hat{t}\hat{u} - Q(4\hat{s} + 3(\hat{t} + \hat{u})) + \hat{s}^4) \quad (57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{|\lambda=1|} \left| \mathcal{A} \left( gg \rightarrow Q\bar{Q} [{}^3P_1^{[8]}] g \right) \right|^2 &= \\
&= \frac{5(4\pi\alpha_S)^3}{6M^3} \frac{QM^2}{(Q - M^2P)^4} \times \\
&\quad \times (P^4(\hat{s}^2 + (\hat{t} + \hat{u})^2) - 4P^3Q(\hat{t} + \hat{u}) + \\
&\quad + P^2Q(9Q - 3\hat{s}^3 - (\hat{t} + \hat{u})(3\hat{t}^2 + \hat{t}\hat{u} + 3\hat{u}^2)) + \\
&\quad + PQ^2(3\hat{s}^2 + 9\hat{t}^2 + 4\hat{t}\hat{u} + 9\hat{u}^2) + \\
&\quad + -2(Q^3(4\hat{s} - \hat{t} - \hat{u}) + Q^2(-9\hat{s}^4 + \hat{t}^4 + \hat{u}^4) + 6Q\hat{s}^7 - \hat{s}^{10})) \quad (58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{|\lambda=0|} \left| \mathcal{A} \left( gg \rightarrow Q\bar{Q} [{}^3P_2^{[8]}] g \right) \right|^2 &= \\
&= \frac{(4\pi\alpha_S)^3}{6M^3} \frac{Q}{(P + \hat{s}^2)^4(\hat{t} + \hat{u})^6} \times \\
&\quad \times (7M^{16}\hat{s}^2 - M^{14}(5Q + 23\hat{s}^3) + \\
&\quad + M^{12}(-20Q\hat{s} + 54\hat{s}^4 + 7\hat{t}^2\hat{u}^2) + \\
&\quad + M^{10}(104Q\hat{s}^2 + 33Q\hat{t}\hat{u} - 65\hat{s}^5) + \\
&\quad + M^8(108Q^2 - 114Q\hat{s}^3 + 29\hat{s}^6 - 10\hat{t}^3\hat{u}^3) + \\
&\quad + M^6\hat{s}(Q^2 + 26Q\hat{s}^3 - 4\hat{s}^6 + 5\hat{t}^3\hat{u}^3) + \\
&\quad + M^4(Q^2(41\hat{s}^2 - 20\hat{t}\hat{u}) - 12Q\hat{s}^5 + \hat{s}^8 + \hat{t}^4\hat{u}^4) + \\
&\quad + M^2Q(20Q\hat{s}^3 - 11\hat{s}^6 - 2\hat{t}^3\hat{u}^3) + \\
&\quad + Q^2(P\hat{t}\hat{u} + 6\hat{s}^4) - Q^3(11\hat{s} + 8(\hat{t} + \hat{u})) - 4Q\hat{s}^7 + \hat{s}^{10}) \quad (59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{|\lambda=1|} \left| \mathcal{A} \left( gg \rightarrow Q\bar{Q} [{}^3P_2^{[8]}] g \right) \right|^2 = & \\
= \frac{(4\pi\alpha_S)^3}{2M^3} \frac{M^2}{(P + \hat{s}^2)^4 (\hat{t} + \hat{u})^6} \times & \\
\times (5M^{16} \hat{s}^4 + M^{14} (9Q\hat{s}^2 - 22\hat{s}^5) + & \\
+ M^{12} (20Q^2 - 47Q\hat{s}^3 + 43\hat{s}^6) + & \\
+ M^{10} \hat{s} (-60Q^2 + 85Q\hat{s}^3 - 54\hat{s}^6 + 9\hat{t}^3 \hat{u}^3) + & \\
+ M^8 (Q^2 (69\hat{s}^2 - 68\hat{t}\hat{u}) - 88Q\hat{s}^5 + 53\hat{s}^8 + 3\hat{t}^4 \hat{u}^4) + & \\
+ M^4 \hat{t}^3 \hat{u}^3 (23\hat{s}(\hat{s} - Q) + \hat{t}\hat{u}(4\hat{t}\hat{u} + 17)) + & \\
+ M^2 (Q^3 (34\hat{s}^2 - 23\hat{t}\hat{u}) - 19Q^2 \hat{s}^5 + 37Q\hat{s}^8 - 10\hat{s}^{11} + 2\hat{s}\hat{t}^5 \hat{u}^5) + & \\
+ 2(3Q^4 - 7Q^3 \hat{s}^3 + 10Q^2 \hat{s}^6 - 6Q\hat{s}^9 + \hat{s}^{12} - \hat{s}^2 \hat{t}^5 \hat{u}^5) & \quad (60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{|\lambda=2|} \left| \mathcal{A} \left( gg \rightarrow Q\bar{Q} [{}^3P_2^{[8]}] g \right) \right|^2 = & \\
= \frac{(4\pi\alpha_S)^3}{2M^3} \frac{M^4}{Q(P + \hat{s}^2)^4 (\hat{t} + \hat{u})^6} \times & \\
\times (2M^{20}\hat{s}^4 + 2M^{18}(3Q\hat{s}^2 - 8\hat{s}^5) + & \\
+ M^{16}(8Q^2 - 53Q\hat{s}^3 + 60\hat{s}^6) + & \\
+ M^{14}\hat{s}(-71Q^2 + 201Q\hat{s}^3 - 140\hat{s}^6 + 6\hat{t}^3\hat{u}^3) + & \\
+ M^{12}(Q^2(802\hat{s}^2 - 232\hat{t}\hat{u}) - 906Q\hat{s}^5 + 452\hat{s}^8 + 27\hat{t}^4\hat{u}^4) + & \\
+ M^{10}(177Q^3 - 541Q^2\hat{s}^3 + 686Q\hat{s}^6 - 264\hat{s}^9 - 25\hat{s}\hat{t}^4\hat{u}^4) + & \\
+ M^6(Q^3(310\hat{s}^2 - 77\hat{t}\hat{u}) - 737Q^2\hat{s}^5 + 741Q\hat{s}^8 - 140\hat{s}^{11} + 4\hat{s}\hat{t}^5\hat{u}^5) + & \\
+ M^4(77Q^4 - 271Q^3\hat{s}^3 + 482Q^2\hat{s}^6 - 306Q\hat{s}^9 + 60\hat{s}^{12} - 18\hat{s}^2\hat{t}^5\hat{u}^5) + & \\
+ M^2\hat{s}(-36Q^4 + 153Q^3\hat{s}^3 - 210Q^2\hat{s}^6 + 102Q\hat{s}^9 - 16\hat{s}^{12} + 6\hat{s}^2\hat{t}^5\hat{u}^5) + & \\
+ 2(Q^4(10\hat{s}^2 - 3\hat{t}\hat{u}) - 24Q^3\hat{s}^5 + 22Q^2\hat{s}^8 - 8Q\hat{s}^{11} + & \\
+ \hat{s}^{14} + \hat{t}^6\hat{u}^6(\hat{t} + \hat{u})^2)) & \quad (61)
\end{aligned}$$

## 1.4 Адронное рождение чармониев

Сечение адронной реакции получается интегрированием партонного сечения с глюонными функциями распределения:

$$\begin{aligned}
d\sigma(p\bar{p} \rightarrow \chi_J + X) = & \\
= \int dx_1 dx_2 f_g(x_1; q^2) f_g(x_2; q^2) d\hat{\sigma}(gg \rightarrow \chi_J + X), & \quad (62)
\end{aligned}$$

где  $f_g(x; q^2)$  — функции распределения глюонов в протоне,  $x_{1,2}$  — доля продольного импульса протона/антипротона уносимая глюонами,  $q$  — значение максимального поперечного импульса мягких глюонов при котором вычислены структурные функции согласно уравнениями эволю-

ции Докшицера - Грибова - Липатова - Альтарелли - Паризи (ДГЛАП) [69–71]. Фактически,  $q$  — некоторый масштабный параметр, который принято выбирать равным характерному жесткому импульсу реакции. В данной работе мы будем использовать общепринятое значение  $q^2 = M^2 + p_T^2$ ; аналогичное значение масштаба мы будем использовать для постоянной сильного взаимодействия  $\alpha_S(q^2)$ .

В экспериментах изучаются распределения сечений по поперечному импульсу мезона:

$$p_T = \sqrt{\frac{\hat{t}\hat{u}}{\hat{s}}},$$

при этом

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dp_T} = \frac{p_T \sqrt{\hat{s}}}{\sqrt{\left(\frac{\hat{s}-M^2}{2\sqrt{\hat{s}}}\right)^2 - p_T^2}} \left[ \frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{t}} + (\hat{t} \leftrightarrow \hat{u}) \right].$$

Для вычисления адронных дифференциальных сечений в различных кинематических областях был разработан программный код на языке C++<sup>1</sup>. Для вычисления использовался набор структурных функций STEQ61 [72] и интерфейс LHAPDF [73].

### 1.4.1 Анализ адронных сечений

В Таб. 1 показано асимптотическое поведение различных состояний в областях с малыми и большими поперечными импульсами. В первую очередь следует отметить, что сечения некоторых подпроцессов имеют коллинеарную расходимость в области малых поперечных импульсов  $p_T \rightarrow 0$ . Эта расходимость обусловлена наличием  $\hat{t}$ - и  $\hat{u}$ -канального глюонов в диаграммах Рис. 1а). Интересно отметить, что такой расходимости нет в случае рождения состояний  ${}^3P_1^{[1]}$ : согласно теореме Ландау-Янга [56, 57] нельзя сформировать аксиальный ток из двух безмассовых

<sup>1</sup>Код программы доступен в открытом доступе в сети интернет по адресу <https://bitbucket.org/ihep/qgenerator>



векторных токов, а следовательно эффективная вершина  $g^*g^* \rightarrow {}^3P_1^{[1]}$  стремится к нулю когда глюоны переходят на массовую поверхность и сокращает расходимость в пропагаторе.

	${}^3P_1^{[1,8]}$	${}^3P_{0,2}^{[1]}$	${}^1P_1^{[8]}, {}^3P_{0,2}^{[8]}$	${}^3S_1^{[8]}$
$p_T \ll M$	$\sim p_T$	$\sim 1/p_T$	$\sim 1/p_T$	$\sim p_T$
$p_T \gg M$	$\sim 1/p_T^5$	$\sim 1/p_T^5$	$\sim 1/p_T^5$	$\sim 1/p_T^3$

Таблица 1: Поведение дифференциального сечения адронной реакции  $d\sigma/dp_T$  при больших и малых значениях поперечного импульса

Анализ адронных сечений рождения октетных компонент  $c\bar{c} [{}^1P_1^{[8]}]$  и  $c\bar{c} [{}^3P_J^{[8]}]$  показывает, что они имеют одинаковую зависимость от поперечного импульса (в области  $p_T \gtrsim 1$  ГэВ). Следовательно, экспериментальному определению поддается только линейная комбинация октетных параметров:

$$\langle \mathcal{O}_P \rangle = \langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}} [{}^1P_1^{[8]}] \rangle + k \langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}} [{}^3P_0^{[8]}] \rangle, \quad (63)$$

где параметр  $k$ , равный отношению сечений рождения состояний  $c\bar{c}[{}^3P_0^{[8]}]$  и  $c\bar{c}[{}^1P_1^{[8]}]$ , принимает значения

$$k = 6.7_{-0.1}^{+0.3} \quad (64)$$

в области импульсов  $2 < p_T < 60$ . В дальнейшем мы также будем использовать обозначение

$$\langle \mathcal{O}_S \rangle \equiv \langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}} [{}^3S_1^{[8]}] \rangle$$

Согласно Таб. 1, в области с большим значением  $p_T$  сечения рождения синглетных и  $P$ -волновых октетных компонент имеют одинаковую форму, в то время как  $S$ -волновой октет имеет существенно отличную

форму сечения. Следовательно для того чтобы определить вклад  $P$ -волновой синглетной компоненты, можно использовать распределения по поперечному импульсу сечения рождения конкретного  $\chi_{cJ}$ -мезона, а для того, чтобы узнать относительные вклады синглетных и  $P$ -волновых октетных компонент, необходимо использовать какую-нибудь комбинированную переменную, например, отношение

$$r_{J_1 J_2} = \frac{d\sigma(pp \rightarrow \chi_{cJ_1} + X) / dp_T}{d\sigma(pp \rightarrow \chi_{cJ_2} + X) / dp_T}.$$

В области больших  $p_T$ , где сечения жестких подпроцессов  $gg \rightarrow \chi_{c1}g$  и  $gg \rightarrow \chi_{c2}g$  практически пропорциональны друг другу, партонные функции распределения в отношении сокращаются, и оно становится равным отношению жестких дифференциальных сечений:

$$r_{J_1 J_2} \approx \frac{d\hat{\sigma}(gg \rightarrow \chi_{cJ_1}g) / dp_T}{d\hat{\sigma}(gg \rightarrow \chi_{cJ_2}g) / dp_T}.$$

Следует отметить, что такое сокращение является универсальным и не зависит от конкретных экспериментальных условий.

Если пренебречь октетным  $S$ -волновым вкладом, то в области больших поперечных импульсов отношение стремится к пределу

$$\begin{aligned} r_{2,1} &\approx \frac{1}{3} + \langle \mathcal{O}_P \rangle \frac{1}{0.75 |R'(0)|^2 + 0.64 \langle \mathcal{O}_P \rangle}, \\ r_{0,1} &\approx \frac{1}{6} + \langle \mathcal{O}_P \rangle \frac{1}{6 |R'(0)|^2 + 5.11 \langle \mathcal{O}_P \rangle}, \\ r_{0,2} &\approx \frac{1}{2} - \langle \mathcal{O}_P \rangle \frac{1}{3.3 |R'(0)|^2 + 0.56 \langle \mathcal{O}_P \rangle}. \end{aligned}$$

Напротив, если вкладом  $S$ -волновых октетных состояний пренебречь нельзя, то в области больших  $p_T$  они будут доминировать и отношение станет равным:

$$r_{J_1 J_2}(p_T \gg M) \approx \frac{2J_1 + 1}{2J_2 + 1}. \quad (65)$$

## 1.5 Фитирование экспериментальных данных

Для определения непертурбативных параметров модели, мы провели фитирование существующих экспериментальных данных по рождению  $\chi_c$  мезонов в адронных экспериментах. На сегодняшний момент распределения по поперечному импульсу абсолютных сечений рождения  $\chi_{cJ}$  мезонов при высоких энергиях известны в первую очередь по результатам полученным коллаборацией CDF. В работе [14] измерена зависимость от поперечного импульса сечения рождения  $J/\psi$ -мезона в радиационных распадах  $\chi_{cJ} \rightarrow J/\psi\gamma$ :

$$\frac{d\sigma(pp \rightarrow J/\psi + X)}{dp_T} = \sum_{J=0}^2 \text{Br}[\chi_{cJ} \rightarrow J/\psi\gamma] \frac{d\sigma(pp \rightarrow \chi_{cJ} + X)}{dp_T}.$$

Эта зависимость была измерена в протон-антипротонном взаимодействии при энергии  $\sqrt{s} = 1.8$  ТэВ в интервале псевдобыстроты конечного чармония  $|\eta| < 0.6$ .

Совсем недавно также появились предварительные данные коллаборации ATLAS [44] по  $p_T$ -спектрам отдельных состояний  $\chi_{c1}$  и  $\chi_{c2}$ . Эти данные не вошли в анализ представленный в работах [52, 55] однако включены в рассмотрение в настоящей диссертации.

В проведенном анализе все три переменные  $|R'(0)|^2$ ,  $\langle \mathcal{O}_S \rangle$  и  $\langle \mathcal{O}_P \rangle$ , определяющие сечение рождения  $\chi_c$ -мезонов, рассматривались как независимые параметры и определялись из фита. В тоже время значение  $|R'(0)|^2$  может быть определено как из потенциальных моделей, так и исходя из фотонной ширины тензорного мезона, которая в лидирующем порядке теории возмущений равна:

$$\Gamma(\chi_{c2} \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{1024}{45} \alpha^2 \frac{|R'(0)|^2}{M^4}. \quad (66)$$

В последнем случае, анализ показывает, что КХД поправки могут существенно изменить предсказания для ширины в низшем порядке [74]. В

случае с предсказаниями потенциальных моделей, значения  $|R'(0)|$  также оказываются сильно разбросанными (см. ссылки в Табл. 6). Суммируя, можно сказать, что точное значение  $|R'(0)|^2$  на сегодняшний день неизвестно, а следовательно разумно определять его из фита.

Для проведения фитирования мы использовали критерий Пирсона  $\chi^2$ . Для построения доверительных интервалов и областей допустимых значений мы находили области параметров такие, что

$$\chi_n^2/n < \chi_{n\text{мин.}}^2/n + 1,$$

где  $n$  — число степеней свободы (количество точек минус количество фитируемых параметров). В случае фитирования отношения сечений  $\chi_{c2}/\chi_{c1}$  количество независимых параметров сводится к двум, т.к. в отношении всегда можно сократить один из параметров. В качестве определяемых параметров мы выбрали отношения  $\langle \mathcal{O}_S \rangle / |R'(0)|^2$  и  $\langle \mathcal{P}_S \rangle / |R'(0)|^2$ .

Для определения относительных вкладов  $S$ - и  $P$ -волновых октетных по цвету состояний мы используем данные по отношению дифференциальных сечений рождения  $\chi_{c1,2}$ -мезонов полученные в экспериментах CDF [40], LHCb [41, 43], CMS [45] и ATLAS [44].

Эксперимент	$\langle \mathcal{O}_S \rangle /  R'(0) ^2,$ $10^{-3} \times \Gamma \text{ЭВ}^{-2}$	Ошибка, $10^{-3} \times \Gamma \text{ЭВ}^{-2}$	Интервал, $10^{-3} \times \Gamma \text{ЭВ}^{-2}$
CDF [40]	1.12	1.82	[0, 6.43]
LHCб [41]	0	3.99	[0, 7.24]
LHCб [43]	1.62	1.17	[0, 3.80]
ATLAS [44]	0	0.53	[0, 1.27]
CMS [45]	0	0.21	[0, 0.47]
[41], [45], [44]	0	0.37	[0, 0.64]
[40], [43]	1.53	0.92	[0, 3.17]

Таблица 2: Таблица значений  $\langle \mathcal{O}_S \rangle / |R'(0)|^2$  полученных путем фитирования экспериментальных данных по отношению сечений рождения  $\chi_{c2}$  к  $\chi_{c1}$ . В первой колонке — эксперимент, во второй — значение наилучшего фита, в третьей — стандартная ошибка, в четвертой — доверительный интервал. В последних двух строках приведены результаты совместных фитов групп экспериментальных данных.

Эксперимент	$\langle \mathcal{O}_P \rangle /  R'(0) ^2$	Ошибка	Интервал
CDF [40]	0.08	0.12	[0, 0.42]
ЛНСб [41]	0.49	0.24	[0.05, 0.93]
ЛНСб [43]	0.42	0.07	[0, 0.17]
ATLAS [44]	0.45	0.10	[0.20, 0.69]
CMS [45]	0.38	0.05	[0.28, 0.48]
[41, 44, 45]	0.42	0.07	[0.30, 0.54]
[40, 43]	0.05	0.05	[0, 0.15]

Таблица 3: Таблица значений  $\langle \mathcal{O}_P \rangle / |R'(0)|^2$  полученных из фитирования экспериментальных данных по отношению сечений  $\chi_{c2}$  к  $\chi_{c1}$ . В первой колонке — эксперимент, во второй — значение лучшего фита, в третьей — стандартная ошибка, в четвертой — доверительный интервал. В последних двух строках результаты совместного фита экспериментальных данных.

Эксперимент:	[40]	[41]	[43]	[44]	[45]	[41, 44, 45]	[40, 43]
$\chi^2/n$ :	3.18	2.31	5.85	0.59	0.28	1.31	4.45

Таблица 4: Значения  $\chi^2/n$  для фитов различных экспериментов.

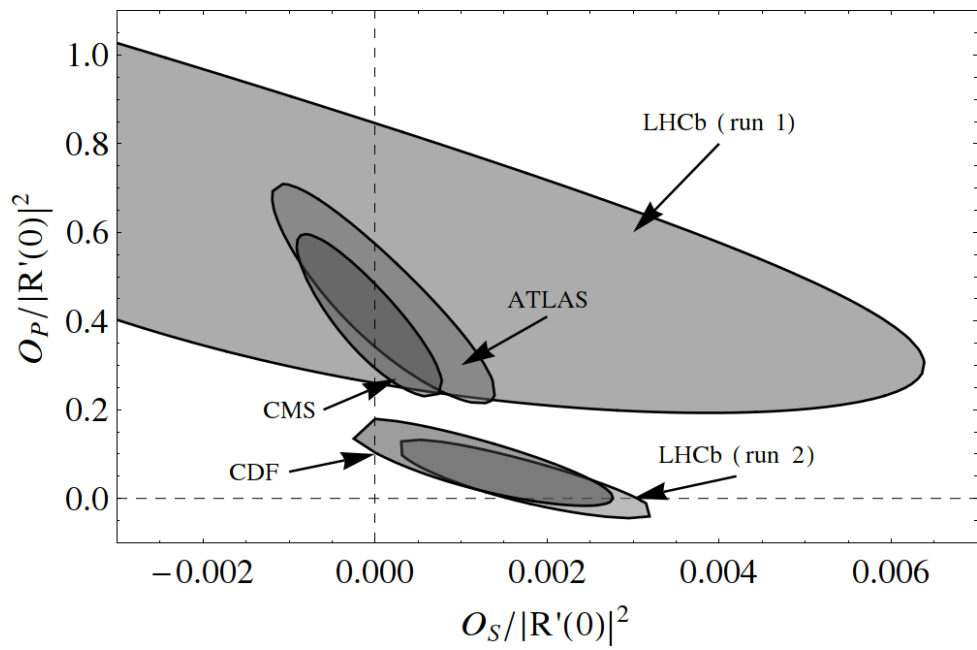
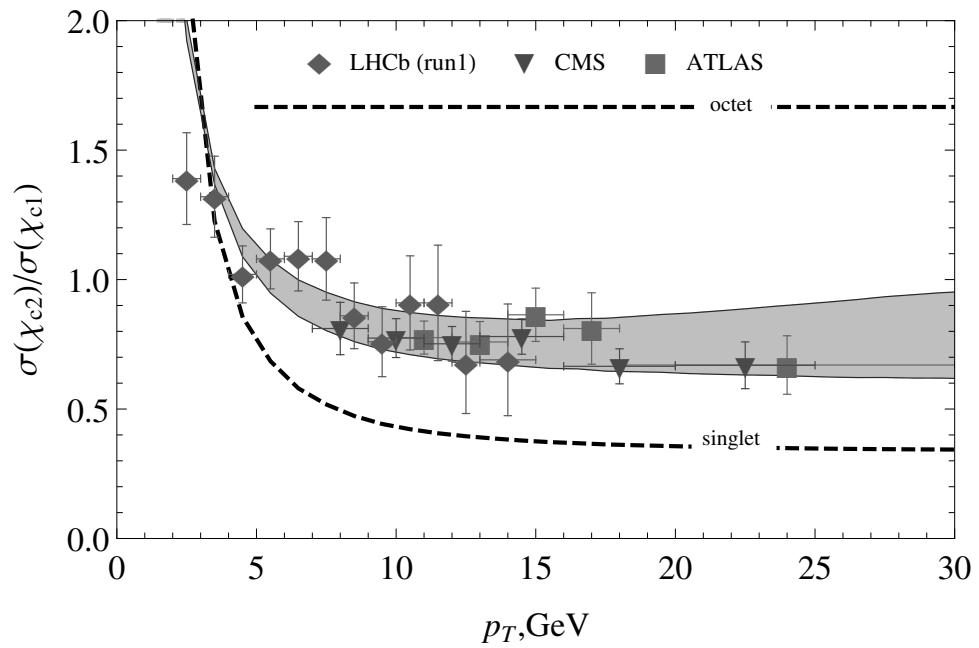
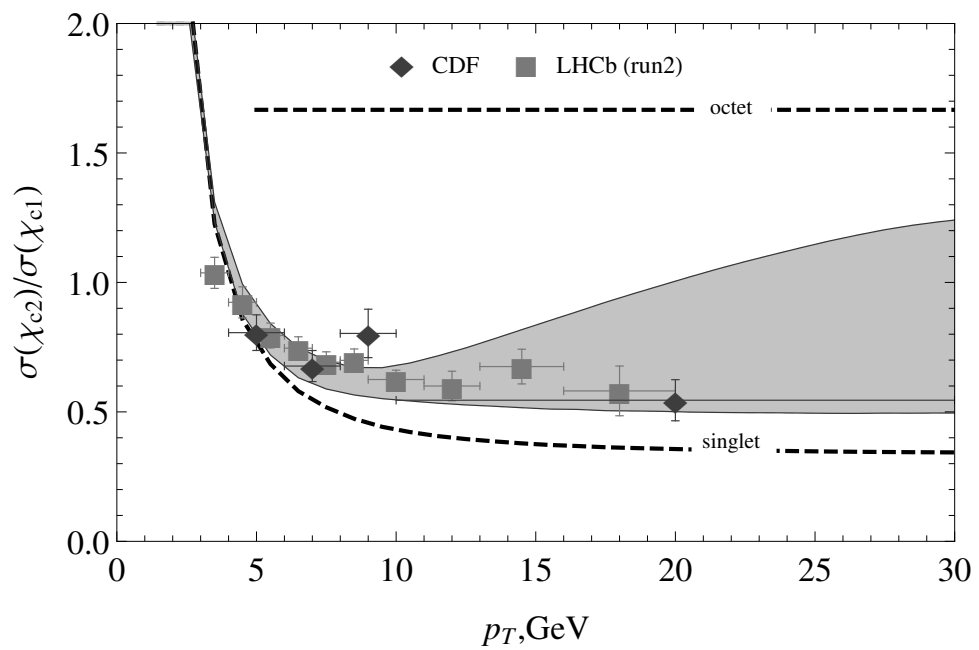


Рис. 3: Допустимые области изменения октетных параметров исходя из фита экспериментальных данных.



(a) Фит данных LHCb [41] ( $\blacklozenge$ ), CMS [45] ( $\blacktriangledown$ ) и ATLAS [44] ( $\blacksquare$ )



(b) Фит данных CDF [40] ( $\blacklozenge$ ) и LHCb [43] ( $\blacksquare$ )



Рис. 4 (*пред. стр.*): Результаты фита двух групп экспериментальных данных по отношению  $(d\sigma(\chi_{c2})/dp_T)/(d\sigma(\chi_{c1})/dp_T)$ . Нижняя пунктирная кривая — предсказания модели цветового синглета (т.е. в пренебрежении октетными вкладами). Верхняя пунктирная линия — асимптотическое значение отношения предсказываемое НРКХД.

Параметр	Первая группа данных: [14, 41, 44, 45]	Вторая группа данных: [14, 40, 43]
$\chi^2/n$	1.24	2.64
$ R'(0) ^2, \text{ГэВ}^5$	0.27	0.38
Ошибка $ R'(0) ^2, \text{ГэВ}^5$	0.03	0.05
Интервал $ R'(0) ^2, \text{ГэВ}^5$	[0.22, 0.32]	[0.29, 0.47]
$\langle \mathcal{O}_S \rangle, 10^{-4} \times \text{ГэВ}^3$	0	6.62
Ошибка $\langle \mathcal{O}_S \rangle, 10^{-4} \times \text{ГэВ}^3$	0.1	2.65
Интервал $\langle \mathcal{O}_S \rangle, 10^{-4} \times \text{ГэВ}^3$	[0, 1.61]	[2.08, 11.20]
$\langle \mathcal{O}_P \rangle, \text{ГэВ}^5$	0.11	0.01
Ошибка $\langle \mathcal{O}_P \rangle, \text{ГэВ}^5$	0.02	0.02
Интервал $\langle \mathcal{O}_P \rangle, \text{ГэВ}^5$	[0.09, 0.14]	[0, 0.04]

Таблица 5: Результаты совместного фитирования двух групп данных по отношению сечений  $\sigma(\chi_{c2})/\sigma(\chi_{c1})$  с данными по спектру рождения  $J/\psi$  мезонов в радиационных распадах  $\chi_c$  в эксперименте CDF.

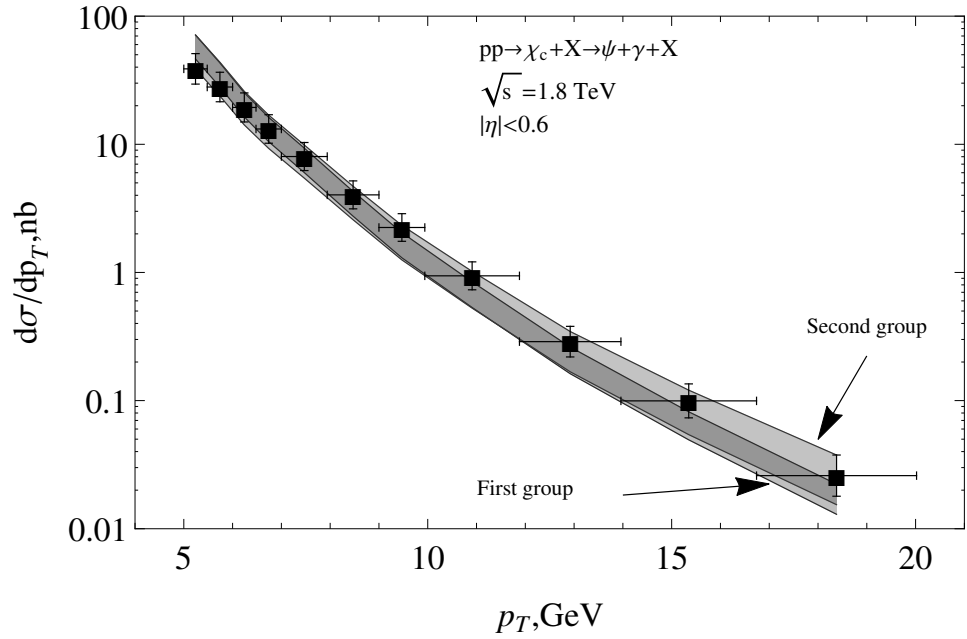
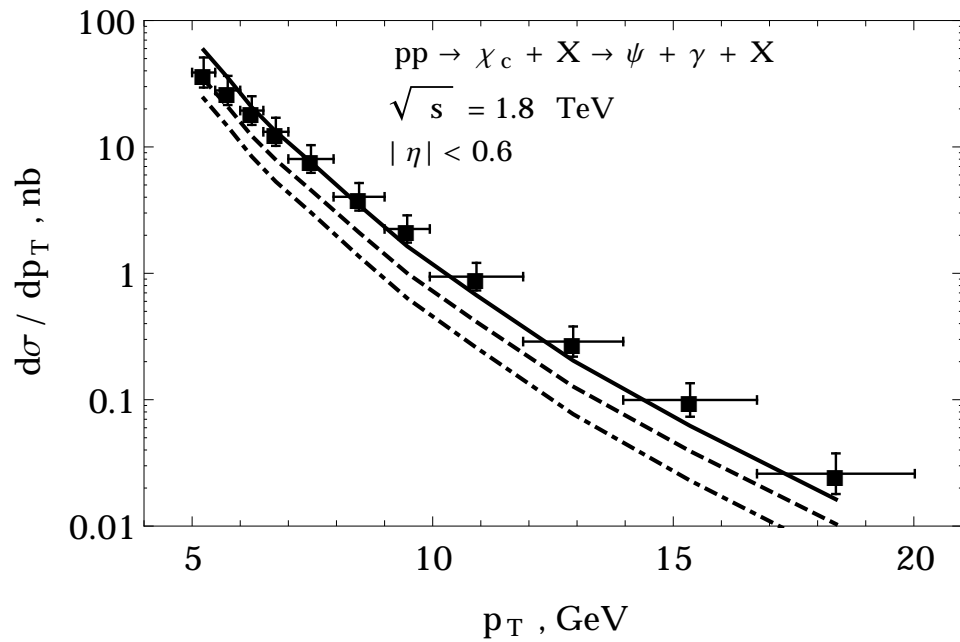
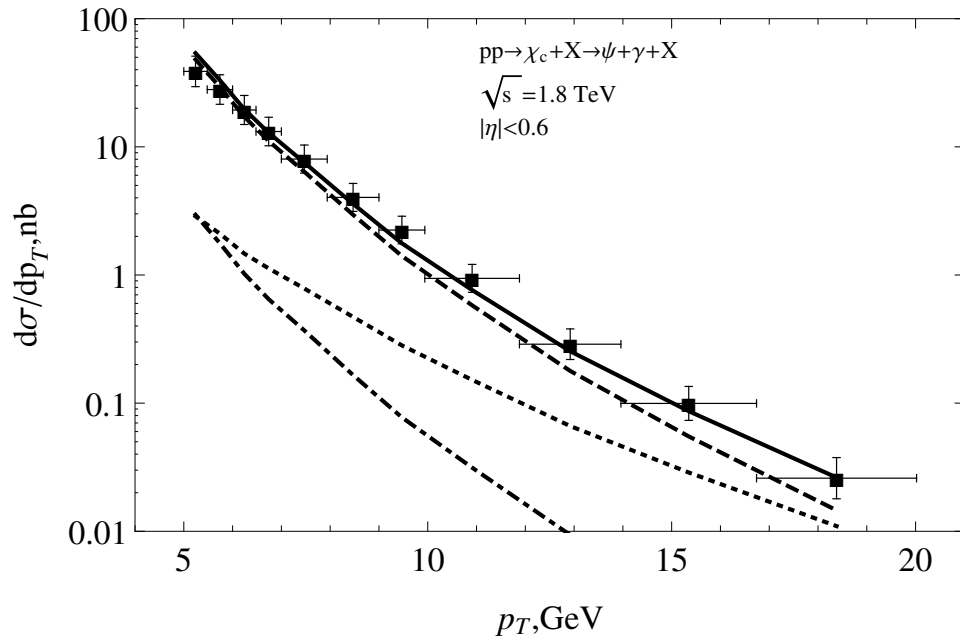


Рис. 5: Теоретическое предсказание дифференциального сечения рождения  $J/\psi$  мезонов из радиационных распадов  $\chi_c$  мезонов в условиях эксперимента CDF в сравнении с экспериментальными данными [14]. Нижняя полоса — предсказания полученные на основе параметров из фита группы данных CDF [14], LHCb [41], CMS [45], ATLAS [44] (отношение  $\sigma(\chi_{c2})/\sigma(\chi_{c1})$ ); верхняя полоса — CDF [14], CDF [40] и LHCb [43].



(a) Параметры фита экспериментов CDF [14], LHCб [41], CMS [45], ATLAS [44] (отношение  $\sigma(\chi_{c2})/\sigma(\chi_{c1})$ )



(b) Параметры фита экспериментов CDF [14], CDF [40] и LHCб [43]

Рис. 6 (*пред. стр.*): Вклады различных состояний в суммарное сечение рождения  $J/\psi$  в радиационных распадах  $\chi_c$  мезонов в условиях эксперимента CDF с параметрами модели полученными из фитирования двух групп данных. Сплошная линия — суммарное сечение, штриховая — вклад синглета, пунктирная — вклад  $S$ -волнового октета, штрихпунктирная —  $P$ -волнового октета. Приведенные линии соответствуют параметрам наилучшего фита (см. Таб. 5).

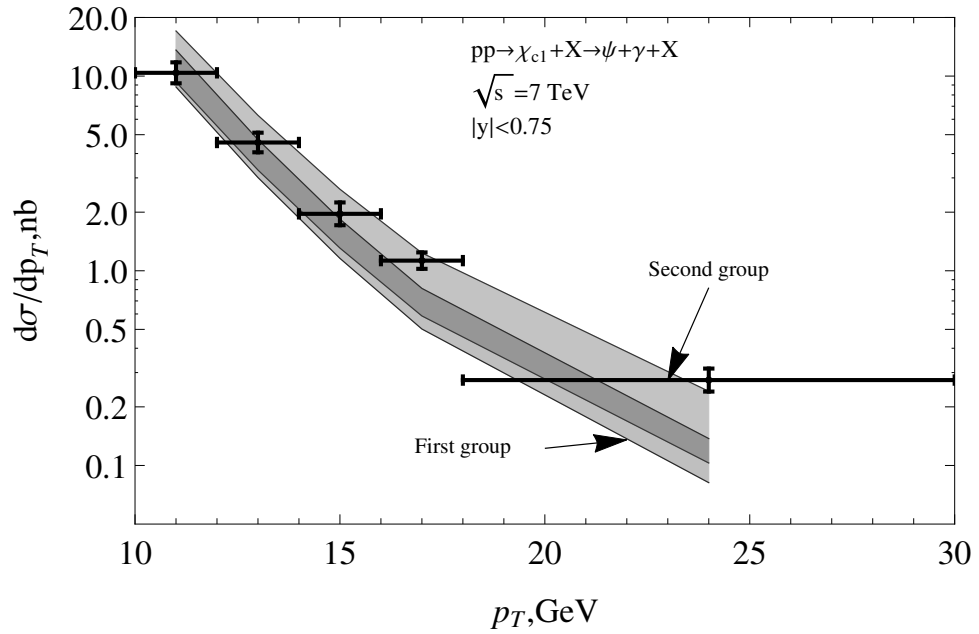
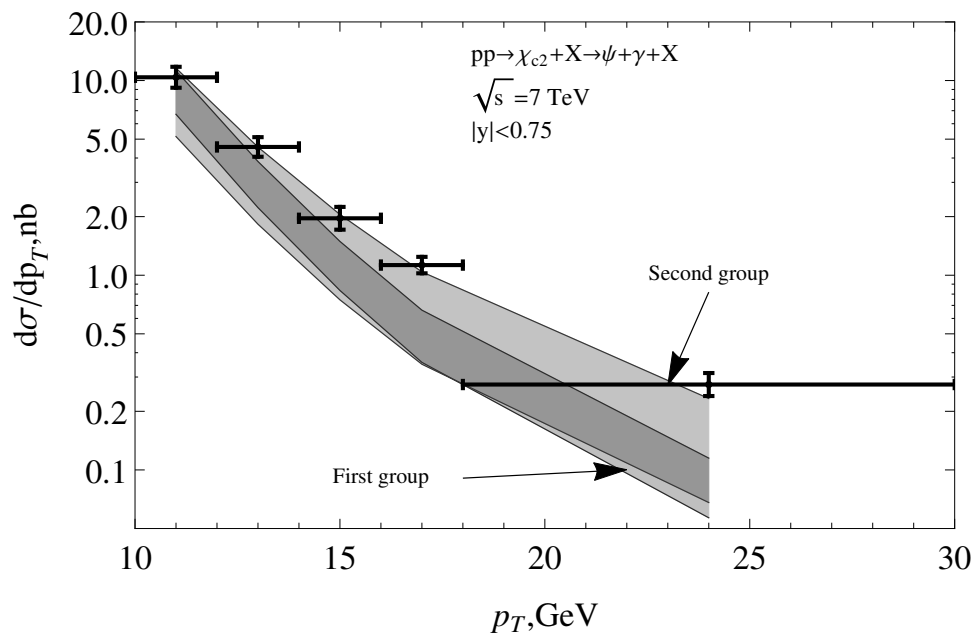
(a) Предсказание сечения рождения  $\chi_{c1}$  в сравнении с данными ATLAS [44](b) Предсказание сечения рождения  $\chi_{c2}$  в сравнении с данными ATLAS [44]

Рис. 7 (*пред. стр.*): Теоретическое предсказание дифференциального сечения рождения  $\chi_{c1,2}$  мезонов в условиях эксперимента ATLAS в сравнении с экспериментальными данными [44]. Нижняя полоса — предсказания полученные на основе параметров из фита группы данных CDF [14], LHCb [41], CMS [45], ATLAS [44] (отношение  $\sigma(\chi_{c2})/\sigma(\chi_{c1})$ ); верхняя полоса — CDF [14], CDF [40] и LHCb [43].

В Таб. 2 и 3 представлены результаты фитирования отношения сечений  $\sigma(\chi_{c2})/\sigma(\chi_{c1})$  для различных экспериментов; в Таб. 4 представлены соответствующие значения  $\chi^2/n$ . На Рис. 3 представлены области допустимых значений параметров полученные для каждого эксперимента по отдельности. Из этого рисунка видно, что экспериментальные данные разбиваются на две независимые группы: LHCb (run 1) [41], CMS [45] и ATLAS [44] с одной стороны и LHCb (run 2) [43] и CDF [40] с другой стороны. С одной стороны, такая картина может быть связана с тем, что в рассматриваемых экспериментах отношение  $\sigma(\chi_{c2})/\sigma(\chi_{c1})$  изучалось в различных интервалах  $p_T$  в том числе  $p_T \sim M$  (в экспериментах LHCb (run 1) и CDF), в том время как рассматриваемая модель не учитывает эффекты связанные с излучением коллинеарных глюонов при очень малых  $p_T \ll M$ . С другой стороны, конечно, это свидетельствует о необходимости в независимом измерении этого отношения в как можно более широком интервале поперечных импульсов. Для перекрывающихся областей возможно провести совместный фит групп экспериментальных данных и определить две независимые области изменения октетных параметров (см. последние строки а Таб. 2 и 3). Исходя из этих двух групп данных, на Рис. 4а и Рис. 4б показаны отношения сечений тензорного и аксиального мезонов в сравнении с экспериментальными точками.

Из полученных результатов следует сделать несколько выводов. Во-первых, мы видим что отношение сечений  $\sigma(\chi_{c2})/\sigma(\chi_{c1})$  является очень чувствительным инструментом для разделения различных октетных вкладов из разложения (2). Во-вторых, теория предсказывает рост этого отношения при малых  $p_T$  ( $\sim M$ ), что подтверждается данными ЛНСб, где эта область была экспериментально промерена. В рамках рассматриваемой модели, такое поведение объясняется доминированием синглетного вклада и тем, что сечение рождения  $\chi_{c1}$  зануляется при малых  $p_T$ , что является следствием теоремы Ландау-Янга (см. Гл. 1.4.1), в то время как для  $\chi_{c2}$  такого зануления не происходит и дифференциальное сечение растет вблизи малых  $p_T$  благодаря  $\hat{t}$ - и  $\hat{u}$ -канальным глюонам в диаграммах Рис. 1а). Более детально этот эффект будет обсуждаться в Главе 2.3, посвященной рождению боттомониев, где данный эффект проявляется значительно заметнее.

Для определения абсолютных вкладов, т.е. общей нормировки сечений, для каждой группы данных мы провели совместный фит этих данных с данными CDF [14] по спектру рождения  $J/\psi$  мезонов полученных из радиационных распадов  $\chi_c$ . Результаты совместных фитов двух групп данных по отношению  $\sigma(\chi_{c2})/\sigma(\chi_{c1})$  и спектру представлены в Таб. 5.

На Рис. 5 показан  $p_T$ -спектр  $J/\psi$  мезонов полученных в радиационных распадах  $\chi_c$  при различных фитах в сравнении с данными CDF. На Рис. 6 показаны вклады различных состояний из разложения (2) в полное сечение процесса (для простоты, в этих графиках в качестве параметров, мы выбрали параметры наилучшего фита из Таб. 5). Как видно, экспериментальные данные свидетельствуют о том, что синглетный вклад является доминирующим в адронном рождении  $\chi_c$  мезонов. Более того,  $S$ -волновой октетный вклад оказывается сильно подавлен даже по сравнению с октетным  $P$ -волновым вкладом. Напомним, что согласно

НРКХД ( см. формулу (1), (2) а также анализ в Главе 1.1) синглетный и  $S$ -волновой октетный вклады одного порядка по относительной скорости кварков  $\sim v^5$ , в то время  $P$ -волновой октетный вклад имеет порядок  $v^6$ , т.е. должен быть подавлен. Отметим, что в случае с рождением  $J/\psi$ , где синглетный  $S$ -волновой вклад имеет порядок  $v^4$ , а следующий за ним в разложении  $P$ -волновой октетный вклад имеет порядок  $v^5$ , последний также дает существенный вклад в полное сечение рождения  $J/\psi$  [37, 38]. Такая несогласованность с предсказаниями НРКХД остается открытым вопросом, возможным решением которого является учет высших поправок теории возмущений по  $\alpha_S$ ; существуют указания на то, что такой учет также может описать наблюдаемую поляризацию чармониев в адронных экспериментах [75].

Наконец следует отметить, что полученные из фита значения  $|R'(0)|^2$  значительно превосходят феноменологическое значение  $0.075 \text{ ГэВ}^5$ , полученное из фотонной ширины тензорного мезона (66). Как отмечалось в начале данной главы, учет низших петлевых КХД поправок может изменить это значение в сторону увеличения вдвое [74]. Также существенно, что при вычислении феноменологического значения  $|R'(0)|^2$  фактически пренебрегается относительным движением кварков в мезоне, в то время как учет этого движения может значительно увеличить теоретическое сечение (как в хорошо известном примере рождения  $e^+e^- \rightarrow J/\psi \eta_c$  на  $B$ -фабриках Belle [76–79]), и тем самым эффективно увеличить феноменологическое значение  $|R'(0)|^2$ .

## 1.6 Выводы к первой главе

На сегодняшний день известно, что модель цветового синглета не описывает имеющихся экспериментальных данных по рождению чармониев



в адронных экспериментах. Наиболее полное современное описание таких процессов дается в рамках эффективной нерелятивистской квантовой хромодинамики, описывающей динамику тяжелых кварков в связанных состояниях в тяжелых кваркониях. В рамках НРКХД синглетный канал рождения кваркониев является доминирующим, но не единственным. Октетные по цвету состояния кварк-антикварковой пары могут давать значительный вклад в спектр сечений рождения мезонов, при этом все такие вклады могут быть организованы и систематизированы по малому параметру — относительной скорости кварков в мезоне. Наличие такого малого параметра позволяет ограничиваться вкладом конечного числа октетных состояний в сечение рождения кваркониев. В случае рождения  $J/\psi$  существующие экспериментальные данные хорошо укладываются в эту модель. Полученные при этом октетные параметры находятся в согласии с правилами отбора НРКХД.

В данной главе мы проанализировали процессы рождения  $P$ -волновых чармониев  $\chi_c$  в адронных экспериментах в рамках НРКХД. Для этого мы вычислили сечения рождения лидирующих по скорости (порядка  $O(v^5)$ ) синглетных и октетных, а также следующих за лидирующими октетных (порядка  $O(v^6)$ ) состояний на партонном уровне в следующем за лидирующем порядке теории возмущений НРКХД. Проведенный анализ показал, что учет  $P$ -волновых октетных вкладов порядка  $O(v^6)$  является существенным для описания отношения сечений рождения  $\sigma(\chi_{c2})/\sigma(\chi_{c1})$  и доминирует по сравнению с октетными  $S$ -волновыми вкладами порядка  $O(v^5)$ . При этом в полные сечения рождения доминирующий вклад дают синглетные состояния.

Полученные в данной главе результаты в целом свидетельствуют о согласии теоретической модели с экспериментальными данными. При этом, было показано, что отношение сечений  $\sigma(\chi_{c2})/\sigma(\chi_{c1})$  является очень чув-

ствительным инструментом для изучения относительных вкладов октетных состояний в сечение рождения  $\chi_c$ . Было показано, что существующих экспериментальных данных пока не достаточно для однозначного определения относительной роли  $S$ - и  $P$ -волновых состояний в процессе рождения  $\chi_c$ . Исходя из имеющихся данных, были найдены две независимые области допустимых значений соответствующих параметров.

На основе полученных в данной главе результатов, даны предсказания сечений рождения  $\chi_{c1}$  и  $\chi_{c2}$  на ускорителе БАК. Показано, что имеющиеся предварительные данные эксперимента ATLAS [44] находятся в хорошем согласии с предсказаниями используемой модели.

## 2 Рождение боттомониев в адронных экспериментах при высоких энергиях

### 2.1 Введение

Теоретическое описание процессов рождения боттомониев — связанных состояний  $b\bar{b}$  абсолютно идентично рассмотренному ранее описанию чармониев. Благодаря большей массе, спектр связанных состояний боттомониев содержит гораздо больше радиальных возбуждений. Для чармониев, связанных состояний ниже порога распада с участием легких кварков (т.е. ниже порога  $D\bar{D}$ ) всего 7:  $\eta_c(1S)$ ,  $J/\psi(1S)$ ,  $h_c(1P)$ ,  $\chi_{c0,1,2}(1P)$  и  $\psi(2S)$ , при этом единственное радиально возбужденное состояние  $\psi(2S)$  находится в  $S$ -волне. Спектр боттомониев ниже порога  $B\bar{B}$  гораздо богаче радиально возбужденными состояниями и насчитывает 12 известных состояний. В частности, существует три состояния  $\Upsilon(1S, 2S, 3S)$  и  $\chi_{bJ}(1P, 2P, 3P)$ , причем состояние  $\chi_{bJ}(3P)$  было открыто совсем недавно в эксперименте ATLAS [46] на ускорителе БАК. В данном разделе мы продолжим изучение  $P$ -волновых кваркониев  $\chi_b$ . В частности, особое внимание будет уделено свойствам рождения радиальных возбуждений. На сегодняшний день пока не получено экспериментальных данных по  $p_T$ -зависимости и полным сечениям рождения  $\chi_b$ . Расчет теоретических

предсказаний этих сечений является важной задачей для дальнейшего теоретического и экспериментального анализа таких процессов.

С точки зрения, теории картина рождения  $\chi_b$  совершенно аналогична картине рождения  $\chi_c$ . Единственная разница заключается в отличных значениях непертурбативных параметров  $\langle \mathcal{O}_{\chi_{bJ}}^{(2S+1)} L_J^{[1,8]} \rangle$  из (2). Следует отметить, что относительная скорость кварков в мезоне  $v$ , которая выступает малым параметром разложения (2) в случае боттомониев существенно меньше чем в случае чармониев:

$$v_c/v_b \approx 1/3, \quad (67)$$

а следовательно ряд (2) должен сходиться быстрее и октетные вклады в рождении боттомониев должны быть сильнее подавлены по сравнению с аналогичными вкладами в случае чармониев. Поскольку на сегодняшний день не получено экспериментальных данных по рождению  $\chi_b$ , то определить НРКХД параметры для боттомониев из эксперимента невозможно. В данной главе мы оценим значения непертурбативных НРКХД параметров для  $\chi_b$  на основе полученных ранее результатов для  $\chi_c$  и дадим предсказания относительно связи между сечениями  $\chi_b$  и  $\chi_c$ . Как будет показано, особенно отчетливо эта связь проявляется на примере отношения сечений  $\sigma(\chi_2)/\sigma(\chi_1)$ , которые для боттомониев и чармониев оказываются связаны простым соотношением скейлинга. Наконец, отдельно будут проанализированы сечения и брэнчинги радиальных возбуждений  $\chi_b(nP)$ . Результаты данной главы частично опубликованы в работах [52, 53].

## 2.2 Предсказания сечений $\chi_b$

Как уже отмечалось, с точки зрения теории картина рождения боттомониев абсолютно аналогична случаю чармониев. Единственная разница

заключается в том, что вероятности в разложении фоковского столбца (2) имеют отличные значения. Разумно предположить, что относительные вклады различных состояний из разложения (2) в сечение рождения боттомониев такие же как и в случае чармониев (с поправкой на различие в относительной скорости кварков) и не зависят от радиального квантового числа  $n$ . Таким образом, например,

$$\frac{1}{v_c^2} \frac{\langle \mathcal{O}_{\chi_c} [{}^3P_J^{[8]}] \rangle}{\langle \mathcal{O}_{\chi_c} [{}^3P_J^{[1]}] \rangle} = \frac{1}{v_b^2} \frac{\langle \mathcal{O}_{\chi_b(nP)} [{}^3P_J^{[8]}] \rangle}{\langle \mathcal{O}_{\chi_b(nP)} [{}^3P_J^{[1]}] \rangle}, \quad (68)$$

где  $v_c$  и  $v_b$  — относительные скорости кварков в чармонии и боттомонии соответственно. Из размерных соображения ясно что

$$\frac{\langle \mathcal{O} [{}^3S_1^{[8]}] \rangle}{\langle \mathcal{O} [{}^3P_J^{[1]}] \rangle} \sim \frac{1}{M^2},$$

и поскольку эти вклады имеют одинаковый порядок по относительной скорости в разложении НРКХД, то для  $|{}^3S_1\rangle$  имеем:

$$\frac{\langle \mathcal{O}_{\chi_c} [{}^3S_1^{[8]}] \rangle}{\langle \mathcal{O}_{\chi_c} [{}^3P_J^{[1]}] \rangle} = \frac{M_{\chi_b}^2}{M_{\chi_c}^2} \frac{\langle \mathcal{O}_{\chi_b(nP)} [{}^3S_1^{[8]}] \rangle}{\langle \mathcal{O}_{\chi_b(nP)} [{}^3P_J^{[1]}] \rangle} \quad (69)$$

На Рис. 8 показаны предсказания дифференциальных сечений рождения аксиального и тензорного боттомониев для различных кинематических областей. Значения октетных параметров при этом были взяты из Таб. 5 и перешкалованный согласно (68) и (69). Значение волновой функции в начале координат мы положили равным единице

$$|R'_n(0)|^2 = 1 \text{ GeV}^5,$$

что в целом согласуется с результатами потенциальных моделей, которые представлены в Таб. 6. Представленные кривые позволяют легко реконструировать сечения для любого значения  $|R'_n(0)|$  простым умножением на соответствующий фактор из Таб. 6. Следует отметить, что в

большинстве приведенных в Таб. 6 работ не приведены конкретные значения  $|R'_{nP}(0)|^2$ , зато приведены ширины распадов  $\chi_{b2}(nP) \rightarrow \gamma\gamma$ ; в этом случае, мы извлекали оценку  $|R'_{nP}(0)|^2$  из формулы для двухфотонной ширины тензорного мезона, модифицированной с учетом высших КХД поправок [80]:

$$\Gamma[\chi_{b2}(nP) \rightarrow \gamma\gamma] = \frac{64\alpha^2|R'_{nP}(0)|^2}{45M^4} \left(1 - \frac{16}{3} \frac{\alpha_S}{\pi}\right) \quad (70)$$

	[81]	[74]	[82]	[83]	[84]	[85]
$\chi_b(1P)$	0.71	1.02	2.03	0.94	0.84	0.51
$\chi_b(2P)$	0.99	0.88	2.2	1.13	0.98	0.25
$\chi_b(3P)$	—	—	2.43	1.17	1.03	—

Таблица 6:  $|R'_{nP}(0)|^2$  (в единицах  $\text{GeV}^5$ ) в различных потенциальных моделях.

### 2.3 Связь отношений $\sigma(\chi_{c2})/\sigma(\chi_{c1})$ и $\sigma(\chi_{b2})/\sigma(\chi_{b1})$

В случае рождения  $\chi_c$  (см. Главу 2), было показано, что для объяснения наблюдаемых спектров  $P$ -волновых чармониев, теория предсказывает сильное подавление октетных вкладов по сравнению с синглетным. В случае боттомониев, как уже отмечалось, это подавление еще более усиливается (68), (69). Тем не менее, как и в случае с чармониями, октетные вклады существенно сказываются на поведении отношения  $\sigma(\chi_2)/\sigma(\chi_1)$ . Прежде чем перейти к детальному рассмотрению поведения отношения  $\sigma(\chi_{b2})/\sigma(\chi_{b1})$ , сделаем некоторые предварительные рассуждения.

Разумно предположить, что дифференциальное сечение рождения кваркониев зависит только от трех размерных параметров: энергии ре-

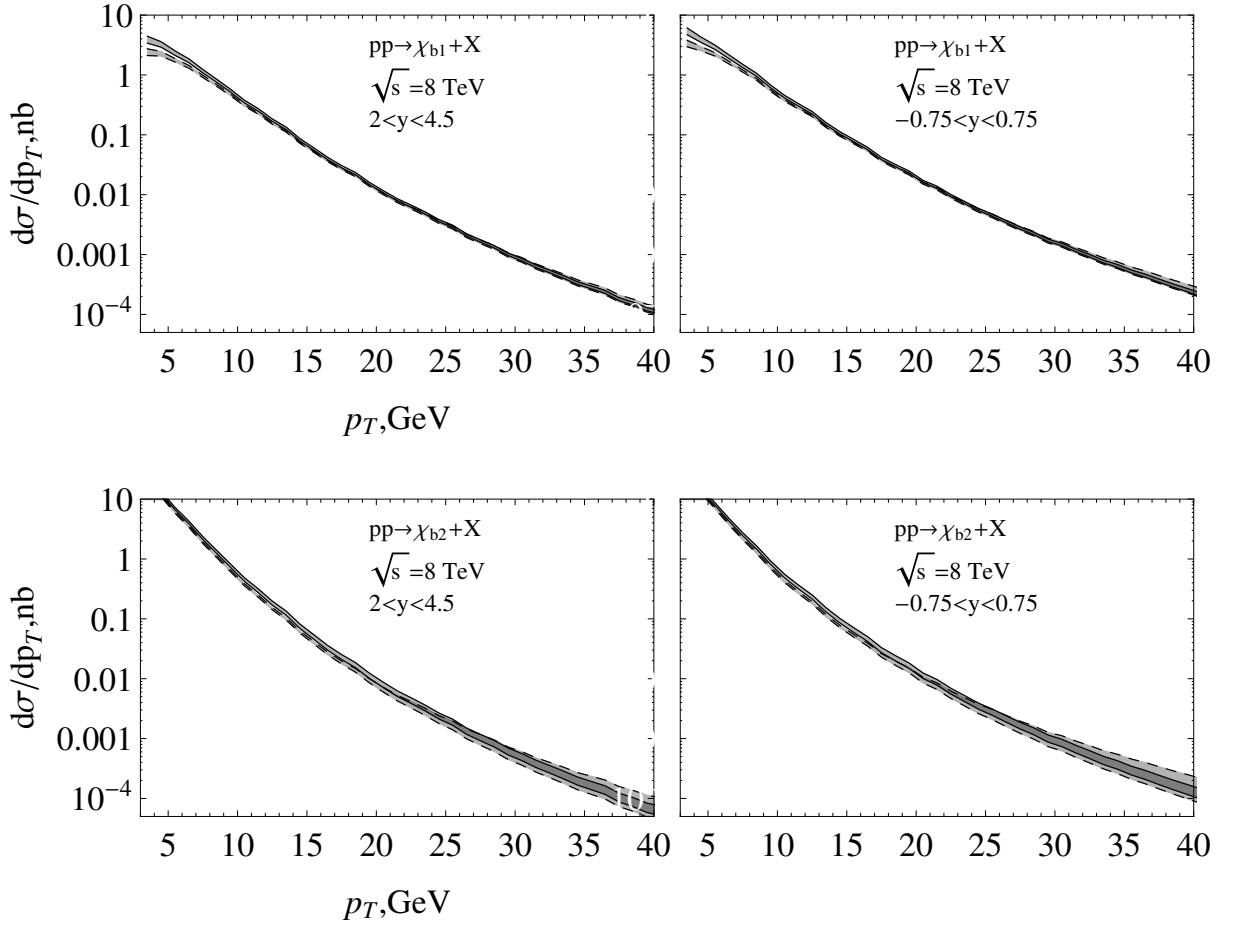


Рис. 8: Теоретические предсказания спектров  $\chi_{b1}$  (сверху) и  $\chi_{b2}$  (снизу) мезонов в условиях экспериментов LHCb (слева) и ATLAS (справа). Значение волновой функции в начале координат принято  $|R'_n(0)|^2 = 1 \text{ ГэВ}^5$ , что согласуется с потенциальными моделями представленными в Таб. 6. Остальные непертурбативные параметры определены с использованием ранее полученных в Главе 1 результатов для чармониев (см. Таб. 5) с использованием соотношений (68) и (69). Полосы со сплошными границами получены исходя из данных фита первой группы экспериментов ([14, 41, 44, 45]), штриховыми — второй ([14, 40, 43]).

акции  $s$ , поперечного импульса мезона  $p_T$  и его массы  $M$ :

$$\frac{d\sigma_J}{dp_T} \equiv \frac{d\sigma_J}{dp_T}(s, p_T, M) \quad (71)$$

В таком случае, отношение сечений  $J = 2$  и  $J = 1$  является безразмерной функцией этих параметров, а следовательно, можно записать:

$$\frac{d\sigma_2(z^2s, zp_T, zM)}{dp_T} \bigg/ \frac{d\sigma_1(z^2s, zp_T, zM)}{dp_T} = \frac{d\sigma_2(s, p_T, M)}{dp_T} \bigg/ \frac{d\sigma_1(s, p_T, M)}{dp_T} \quad (72)$$

Полагая  $M = M_{\chi_c}$  и  $z = M_{\chi_b}/M_{\chi_c}$ , получаем:

$$\frac{d\sigma_{b2}(zp_T; s)}{dp_T} \bigg/ \frac{d\sigma_{b1}(zp_T; s)}{dp_T} = \frac{d\sigma_{c2}(p_T; s/z^2)}{dp_T} \bigg/ \frac{d\sigma_{c1}(p_T; s/z^2)}{dp_T}. \quad (73)$$

Эта формула говорит о том, что если известно отношение сечений чармониев при некоторой энергии  $s$ , можно легко реконструировать распределение отношения сечений боттомониев на энергии  $s (M_{\chi_b}/M_{\chi_c})^2$ .

Интуитивно ясно, что по крайней мере для больших энергий, отношение крайне слабо зависит от  $s$ , поскольку сечения как аксиального так и тензорного мезонов обладают примерно одинаковой зависимостью от  $s$ , что приводит к сокращению этой зависимости в отношении (конечно, этот аргумент не справедлив для малых значений  $s$ , при которых другие партонные каналы начинают давать сравнимый вклад). При  $z \sim 3$  распределение отношения боттомониев на энергии  $\sqrt{s} = 8$  ТэВ соответствует распределению отношения чармониев на энергии  $\sqrt{s} \sim 2.6$  ТэВ, т.е. энергии при которой глюонный канал также доминирует. Более того, как видно из сравнения точек CDF ( $\sqrt{s} = 1.8$  ТэВ) и LHCb ( $\sqrt{s} = 7$  ТэВ) представленных на Рис. 4б, такая нечувствительность отношения к  $s$  подтверждается и экспериментальными данными. Можно ожидать, что соотношение (73) может быть аппроксимировано на высоких энергиях следующим образом:

$$\frac{d\sigma_{b2}(zp_T; s)}{dp_T} \bigg/ \frac{d\sigma_{b1}(zp_T; s)}{dp_T} = \frac{d\sigma_{c2}(p_T; s)}{dp_T} \bigg/ \frac{d\sigma_{c1}(p_T; s)}{dp_T}. \quad (74)$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении, отношение сечений



для боттомониев можно получить из отношения сечений для чармониев путем простой перешкаловки (скейлинга)  $p_T \rightarrow (M_{\chi_b}/M_{\chi_c}) \times p_T$ .

На Рис. 10 представлены предсказания отношения сечений  $\sigma(\chi_{b2})/\sigma(\chi_{b1})$  полученные двумя способами: из полученных ранее предсказаний для чармониев (см. Рис. 4) путем перешкаловки импульсной шкалы (2.3) и независимым вычислением с использованием октетных параметров полученных из (68) и (69). Как видно из Рис. 10а, для первой группы параметров (полученной из фита первой группы данных (см. Таб. 5)) скейлинг нарушается. Очевидно, что скейлинг восстановится, если в соотношении (68) пренебречь различием в относительной скорости кварков для чармониев и боттомониев; в таком случае соотношения (68) и (69) будут эквивалентны размерному анализу проведенному выше. При этом ясно, что если вклад  $P$ -волнового октета изначально мал и слабо влияет на поведение отношения, то скейлинг должен выполняться приближенно (см. Рис. 10b).

Нарушение скейлинга (2.3) связано с тем, что изначальное предположение (71) о том, что сечение рождения зависит только от трех размерных параметров  $s$ ,  $p_T$  и  $M$  несправедливо, т.к. не учитывает более тонких связанных с наличием легких кварков и конфайнментом (с равным успехом можно считать что сечение также зависит от например  $\Lambda_{\text{QCD}}$ ). С другой стороны ясно, что скейлинг выполняется тем лучше, чем слабее роль  $P$ -волнового октета, т.е. высших поправок по  $v$  в НРКХД разложении.

Отметим несколько важных деталей вытекающих из Рис. 10. Как показано в Главе 1.4.1, состояние  ${}^3S_1^{[8]}$  ведет себя как  $1/p_T^3$  и при больших  $p_T$  должно доминировать над остальными вкладами, т.к. они ведут себя как  $1/p_T^5$ . В отношении  $\sigma(\chi_2)/\sigma(\chi_1)$  это проявляется в том, что оно

ассимптотически стремится к пределу (65):

$$\sigma(\chi_2)/\sigma(\chi_1) \rightarrow \frac{2J_2 + 1}{2J_1 + 1} = \frac{5}{3}.$$

Как мы видели в Главе 2, для чармониев такого поведения не наблюдается для по крайней мере для  $p_T < 30$  ГэВ; для боттомониев, таким образом, такое поведение может проявиться при  $p_T \sim 90$  ГэВ.

Другое замечание связано с поведением отношения сечений при малых  $p_T \sim M$ . Как уже отмечалось в Главе 1.5 при малых  $p_T$  и теория и эксперимент предсказывают рост отношения  $\sigma(\chi_2)/\sigma(\chi_1)$ . С теоретической точки зрения это объясняется теоремой Ландау-Янга [56, 57], которая обуславливает зануление сечения аксиального мезона при  $p_T \rightarrow 0$  в лидирующем порядке теории возмущений. Напомним, что теорема Ландау-Янга приводит к занулению эффективной вершины  $g^*g^* \rightarrow |^3P_1^{[1,8]}\rangle$  при приближении глюонов к массовой поверхности. Фактически, эта вершина снимает одну степень с пропагатора  $\hat{t}$ -канального глюона в диаграммах Рис. 1. Если же рассмотреть процессы в высшем порядке, например диаграммы представленные на Рис. 9, то ясно, что сечение рождения состояния  $|^3P_1^{[1,8]}\rangle$  будет расти при малых  $p_T$  за счет дополнительного  $\hat{t}$ -канального глюона, однако степень роста все-же будет ниже, чем у тензорного мезона. Грубо говоря, в этой области  $p_T$ , можно ожидать, что отношение сечений будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(p\bar{p} \rightarrow \chi_2 + X)/dp_T}{d\sigma(p\bar{p} \rightarrow \chi_1 + X)/dp_T} &\approx \\ &\approx \frac{O(\alpha_S^3) \times 1/p_T + O(\alpha_S^4) \times 1/p_T^2 + O(\alpha_S^5) \times 1/p_T^3 + \dots}{O(\alpha_S^3) \times \text{const} + O(\alpha_S^4) \times 1/p_T + O(\alpha_S^5) \times 1/p_T^2 + \dots} \approx \\ &\approx \frac{1}{p_T} \times \text{const} \quad (75) \end{aligned}$$

Таким образом можно ожидать, что как для чармониев, так и для боттомониев рост отношения сечений тензорного и аксиального мезонов при

малых поперечных импульсах должен наблюдаться во всех порядках теории возмущений. Результат показывает, что если для чармониев такой рост начинается на  $p_T \sim M_{c\bar{c}}$  (как видно из экспериментальных данных), то для боттомониев, этот рост должен начинаться при  $p_T \sim M_{b\bar{b}}$ .

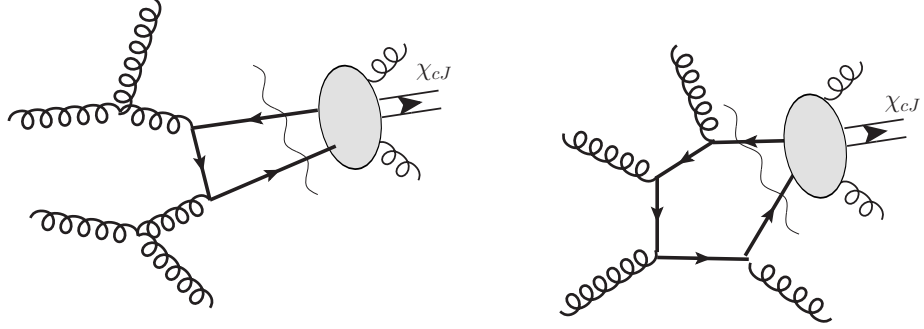
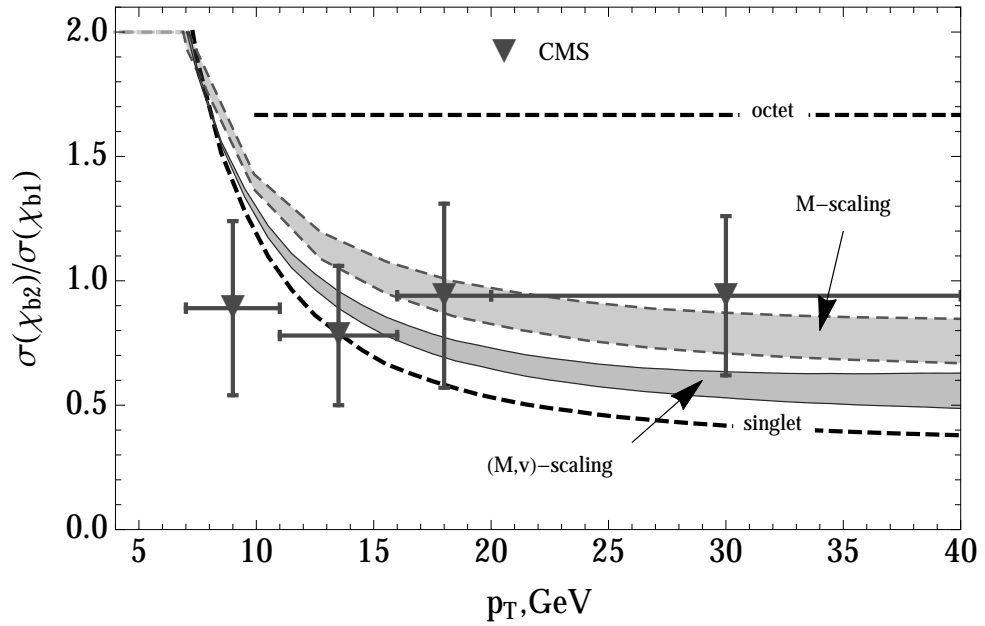
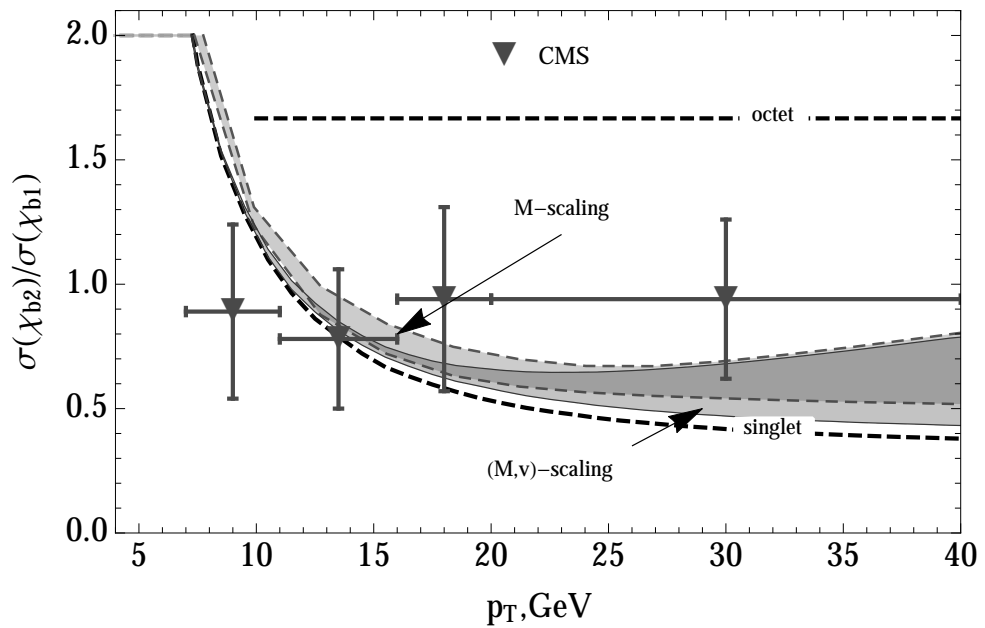


Рис. 9: Типичные диаграммы Фейнмана в высшем порядке теории возмущений, в которых сечения состояний  $|^3P_1^{[1,8]}\rangle$  растут при малых  $p_T$ .

На Рис. 10 также представлены экспериментальные данные полученные коллаборацией CMS [45]. Эти данные свидетельствуют о подавлении  $S$ -волнового октетного вклада с одной стороны, с другой — они не показывают роста отношения при малых  $p_T$ . В тоже время, точность экспериментальных данных по отношению  $\sigma(\chi_{b2})/\sigma(\chi_{b1})$  пока не велика, и мы полагаем, что последнее свойство проявится с появлением дополнительных экспериментальных данных.



(a) Предсказание отношения  $\sigma(\chi_{b2})/\sigma(\chi_{b1})$  с параметрами полученными из фита группы [41, 44, 45].



(b) Предсказание отношения  $\sigma(\chi_{b2})/\sigma(\chi_{b1})$  с параметрами полученными из фита группы [40, 43].

Рис. 10 (*пред. стр.*): Предсказание отношения  $\sigma(\chi_{b2})/\sigma(\chi_{b1})$  на основе скейлинга (2.3) и соотношений (68), (69) и результатов представленных в Таб. 5 в сравнении с данными CMS. [45]. Два типа кривых на каждом графике соответствуют простому скейлингу (без учета разницы в относительной скорости кварков) и полному пересчету на основе соотношений (68), (69).

## 2.4 Рождение радиальных возбуждений

Перейдем к рассмотрению процессов рождения возбужденных  $\chi_b$ -мезонов на ускорителе БАК. Недавно были проведены исследования процессов рождения  $\chi_b(1P)$ -,  $\chi_b(2P)$ - и  $\chi_b(3P)$ -мезонов на установке ATLAS [46] и D0 [47]. Эти частицы наблюдались в модах радиационных распадов  $\chi_b(nP) \rightarrow \Upsilon(1, 2S)\gamma$ . К сожалению, значения точные значения сечений пока не были получены экспериментально, однако мы можем вычислить их теоретически.

В эксперименте обычно наблюдаются следующие величины:

$$\begin{aligned} \sigma^{\text{th}} [nP, mS] &= \\ &= \sigma^{\text{th}} [pp \rightarrow \chi_b(nP) + X \rightarrow \Upsilon(mS)\gamma + X] = \\ &= \sum_{J=0}^2 \text{Br}_J [nP, mS] \sigma_J^{\text{th}} [nP], \quad (76) \end{aligned}$$

где используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \sigma_J^{\text{th}} [nP] &= \sigma^{\text{th}} [pp \rightarrow \chi_{bJ}(nP) + X], \\ \text{Br}_J [nP, mS] &= \text{Br} [\chi_{bJ}(nP) \rightarrow \Upsilon(1S)\gamma]. \end{aligned}$$

Бренчинги  $\chi_b(1P)$ - и  $\chi_b(2P)$ -мезонов известны их экспериментов [86]:

$$\begin{aligned} \text{Br}_1 [1P, 1S] &= 35\% \pm 8\%, & \text{Br}_2 [1P, 1S] &= 22\% \pm 4\%, \\ \text{Br}_1 [2P, 1S] &= 8.5\% \pm 1.3\%, & \text{Br}_2 [2P, 1S] &= 7.1\% \pm 1\%, \\ \text{Br}_1 [2P, 2S] &= 21\% \pm 4\%, & \text{Br}_2 [2P, 2S] &= 16\% \pm 2.4\%. \end{aligned}$$

В случае скалярных боттомониев, бренчинги пренебрежимо малы, поэтому мы не включаем их в сумму (76).

Для получения полных сечений, необходимо проинтегрировать дифференциальные сечения полученные в Главе 2.2 (см. Рис. 10) по поперечному импульсу  $p_T$  в области  $p_T$ :  $\Delta < p_T < (s - M^2)/2\sqrt{s}$ . Мы используем экспериментальные обрезания  $\Delta = 12$  ГэВ для установки ATLAS ( $|y| < 2$ ) [46], и  $\Delta = 6$  ГэВ для установки LHCb ( $2 < y < 4.5$ ) [48]. Используя эти обрезания, мы получили следующие значения полных сечений:

$$\begin{aligned} (\text{LHCb}) \quad & \frac{1}{|R'_n(0)|^2} \sigma^{\text{th}}[\chi_{b1}(nP)] = 34.4 \frac{\text{nb}}{\text{GeV}^5} \\ (\text{LHCb}) \quad & \frac{1}{|R'_n(0)|^2} \sigma^{\text{th}}[\chi_{b2}(nP)] = 43 \frac{\text{nb}}{\text{GeV}^5} \\ (\text{ATLAS}) \quad & \frac{1}{|R'_n(0)|^2} \sigma^{\text{th}}[\chi_{b1}(nP)] = 5.2 \frac{\text{nb}}{\text{GeV}^5} \\ (\text{ATLAS}) \quad & \frac{1}{|R'_n(0)|^2} \sigma^{\text{th}}[\chi_{b2}(nP)] = 5.6 \frac{\text{nb}}{\text{GeV}^5} \end{aligned}$$

и для отношения  $\sigma[\chi_b(2P)]/\sigma[\chi_b(1P)]$  в обоих случаях:

$$\frac{\sigma^{\text{th}} [2P, 1S]}{\sigma^{\text{th}} [1P, 1S]} = (0.29 \pm 0.01^{\text{th}} \pm 0.1^{\text{br}}) \left| \frac{R'_{2P}}{R'_{1P}} \right|^2,$$

где первая ошибка связана с неопределенностями в параметрах теоретической модели, а вторая — с погрешностями в измерениях бренчингов. Как видно, это отношение определяется отношением синглетных матричных элементов  $2P$ - и  $1P$ -состояний, т.е. отношением производных вол-

новых функций в нуле (см. Таб. 6). В Таб. 7 представлены предсказания для данного отношения в различных потенциальных моделях.

Потенциальная модель	Отношение $\chi_b(2P)/\chi_b(1P)$
[81]	$0.4 \pm 0.01^{th} \pm 0.14^{br}$
[74]	$0.25 \pm 0.01^{th} \pm 0.1^{br}$
[82]	$0.32 \pm 0.02^{th} \pm 0.1^{br}$
[83]	$0.34 \pm 0.01^{th} \pm 0.12^{br}$
[84]	$0.34 \pm 0.01^{th} \pm 0.12^{br}$
[85]	$0.14 \pm 0.05^{br}$

Таблица 7: Теоретические предсказания отношения сечений рождения  $\chi_b(2P)$  и  $\chi_b(1P)$  полученные с использованием различных потенциальных моделей

В случае рождения  $\chi_b(3P)$ -мезонов, значение брэнчинга в  $\Upsilon(1S)$  пока не известно экспериментально, поэтому похожий анализ пока не удастся проделать. С другой стороны, можно получить оценку радиационного брэнчинга тензорного мезона, используя следующие предположения. Можно предположить, что доминирующим инклюзивным адронным каналом распада тензорного мезона является 2-ч глюонный распад. Ограничиваясь только синглетным вкладом, имеем:

$$\Gamma[\chi_{b2}(3P) \rightarrow gg] = \frac{128}{5} \alpha_S^2 \frac{|R'_3(0)|^2}{M^4}$$

и радиационный брэнчинг  $\chi_{b2}(3P)$  равен

$$\text{Br}_2 [3P, 1S] = \frac{\Gamma[\chi_{b2}(3P) \rightarrow \Upsilon(1S)\gamma]}{\Gamma[\chi_{b2}(3P) \rightarrow \Upsilon(1, 2, 3S)\gamma] + \Gamma[\chi_{b2}(3P) \rightarrow gg]}$$

Ширина радиационного распада  $\Gamma[\chi_{b2}(3P) \rightarrow \Upsilon(1, 2, 3S)\gamma]$  может быть получена из потенциальных моделей [82, 84]. Зная сечения  $\Upsilon(1S)$  рож-

Потенциальная модель	$\text{Br}_2 [3P, 1S]$	$\text{Br}_1 [3P, 1S]$
[82]	1.7%	$((41 \pm 9) \gamma - 1.3)\%$
[84]	5.4%	$((42 \pm 9) \gamma - 4.1)\%$

Таблица 8: Бренчинг  $\chi_b(3P) \rightarrow \Upsilon(1S)\gamma$ 

денных в радиационный распадах  $\chi_{b1,2}(3P)$ :

$$\sigma^{\text{th}} [3P, 1S] = \text{Br}_1 [3P, 1S] \sigma_1^{\text{th}} [3P] + \text{Br}_2 [3P, 1S] \sigma_2^{\text{th}} [3P],$$

можно выразить неизвестный бренчинг  $\chi_{b1}(3P) \rightarrow \Upsilon(1S)\gamma$  через отношение сечений рождения состояний  $3P$   $1P$ . Результаты представлены в Таб. 8, где используется следующее обозначение:

$$\gamma = \frac{\sigma^{\text{th}} [3P, 1S]}{\sigma^{\text{th}} [1P, 1S]}$$

Таким образом, если удастся экспериментально измерить значение  $\gamma$ , то автоматически может быть получена оценка радиационной ширины  $\chi_{b1}(3P) \rightarrow \Upsilon(1S)\gamma$ . Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для случая  $\chi_b \rightarrow \Upsilon(2S)\gamma$ .

## 2.5 Выводы ко второй главе

Процессы рождения боттомониев в адронных экспериментах тесно связаны с аналогичными процессами для чармониев. На партонном уровне сечения этих процессов отличаются лишь заменой значения масс  $c$ - и  $b$ -кварков. В обоих случаях описание таких процессов дается в рамках НРКХД. Значительную роль в формировании конечных состояний дают промежуточные октетные вклады, порядок величины которых определяется значением относительной скорости кварков в мезоне. В случае боттомониев, относительная скорость кварков  $v \sim 0.1$  значительно ниже, чем в чармониях  $v \sim 0.3$ . Это приводит к тому, что для боттомониев



октетные вклады оказываются сильнее подавлены в доступных кинематических областях.

В данной главе мы провели анализ сечений рождения боттомониев. Для определения относительных вкладов различных октетных состояний (т.е. для определения непертурбативных матричных элементов  $\langle \mathcal{O}^{\chi_{bJ}}[(2S+1)L_J^{[1,8]}] \rangle$ ), мы воспользовались размерными соображениями, правилами отбора НРКХД и результатами полученными в Главе 1. Благодаря этому были получены предсказания  $p_T$ -спектров и отношений сечений состояний  $\chi_{bJ}$  в различных кинематических областях на ускорителе БАК. Было продемонстрировано, что наблюдаемая корреляция поведения отношений  $\chi$  и  $\chi_b$  может быть объяснена из размерных соображений и правил отбора НРКХД. Большое значение будет иметь дальнейшая экспериментальная проверка такого поведения. Проведенный анализ показал, что рост этого отношения при малых  $p_T$  является следствием теоремы Ландау-Янга и должен наблюдаться во всех порядках теории возмущений.

Поскольку на сегодняшний день не получено экспериментальных данных по значениям сечений  $\chi_{bJ}(nP)$ , то большое значение имеют предсказания этих сечений для разных значений радиального квантового числа  $n$ . Получение численных предсказаний осложняется тем, что  $P$ -волновые состояния наблюдаются по их радиационным распадам в  $\Upsilon(mS)\gamma$ , а соответствующие бренчинги пока не известны экспериментально для  $n = 3$ . В данной главе мы использовали результаты потенциальных моделей для получения оценок на эти бренчинги. Используя эти экспериментальные значения бренчингов для  $n = 2$ , мы получили предсказания отношения суммарного выхода  $\chi_b(2P)$  к  $\chi_b(1P)$ . Именно это отношение может быть скорее измерено экспериментально. В случае  $n = 3$ , мы использовали результаты потенциальных моделей для установления связи

между величиной бренчинга и соотношением выхода  $\chi_b(3P)$  к  $\chi_b(1P)$ .

## 3 Рождение чармониев при низких энергиях в $p\bar{p}$ аннигиляции

### 3.1 Введение

В предыдущих главах мы рассмотрели рождение  $P$ -волновых кварко-ниев в адронных взаимодействиях при высоких энергиях, где доминирующим каналом является глюон-глюонное рассеяние. При низких энергиях (т.е. на больших  $x_F$ ) открывается канал кварк-глюонного рассеяния; при энергиях порядка  $\sqrt{s} \sim 50$  ГэВ этот канал дает около 10% суммарного вклада в рождение  $J/\psi$  [87]. В аннигиляционных экспериментах открывается также канал кварк-антикварковой аннигиляции и при низких энергиях этот канал становится доминирующим. В частности, экспериментально известно, что при энергиях  $\sqrt{s} \sim 10$  ГэВ отношение сечений  $\sigma(p\bar{p} \rightarrow J/\psi + X)/\sigma(pp \rightarrow J/\psi + X) \sim 6$ , в то время как на энергиях порядка сотен ГэВ, это отношение практически равно единице. Это свидетельствует о явном доминировании аннигиляционного канала в  $p\bar{p}$  реакции при низких энергиях.

В данной главе мы остановимся на исследовании и моделировании инклюзивных процессов рождения чармониев в реакциях протон-антипротонной аннигиляции в эксперименте PANDA (*Anti-Proton ANnihilation at*

*DArmstadt*), который будет проводится в ускорительном центре FAIR в Дармштадте, Германия [49]. Экспенимент PANDA будет проводиться при фиксированной протонной мишени и ускоренном антипротонном пучке с импульсом антипротонов от 1.5 до 15 ГэВ. Ускорительное кольцо HESR (*High Energy Storage Ring*) — источник ускоренного антипротонного пучка — рассчитано на работу в двух режимах. Первый режим — режим сканирования (*high resolution mode*), в котором импульс антипротонов может изменяться с прецизионно высоким разрешением  $\Delta p/p \leq 2 \times 10^{-5}$  в интервале от 1.5 до 8.9 ГэВ, что позволяет устанавливать инвариантную массу системы  $p\bar{p}$  на значении массы конкретного мезона, тем самым давая возможность исследовать свойства мезонов, полученных в резонансном рождении в эксклюзивной реакции. Этот режим используется в первую очередь для спектроскопии и изучения свойств распадов частиц.

Другой режим работы HESR — режим рождения (*high luminosity mode*), в котором светимость пучка в десять раз выше и его максимальный импульс достигает 15 ГэВ. Импульсное разрешение антипротонов при этом значительно ниже  $\Delta p/p \sim 10^{-4}$ . Этот режим позволяет изучать именно свойства рождения частиц в  $p\bar{p}$  аннигиляции и распределения сечений рождения по различным кинематическим переменным. В данном разделе мы интересуемся свойствами рождения мезонов в режиме рождения при максимальном импульсе пучка равном 15 ГэВ. Инвариантная масса протон-антипротона при этом равна  $\sim 5.6$  ГэВ, что позволяет рожать мезоны со значительным поперечным импульсом и исследовать распределения сечений рождения по этой кинематической переменной.

Как уже отмечалось, в  $p\bar{p}$  аннигиляции при низких энергиях основным партонным каналом рождения чармониев будет квак-антикварковая аннигиляция. Однако, в этом канале рождение  $J/\psi$  подавлено (см. следующий параграф). Поэтому основным каналом рождения  $J/\psi$  будет

радиационные распады  $\chi_{cJ}$ . При этом поскольку парциальная ширина скалярного мезона пренебрежимо мала ( $\sim 1\%$ ) и, как следствие, его регистрация крайне затруднительна с экспериментальной точки зрения, мы не будем его рассматривать.

Одной из важных задач для эксперимента PANDA является разработка генератора событий рождения чармониев и их последующей регистрации в детекторах. Поскольку векторный мезон распознается по лептонным распадам  $J/\psi \rightarrow l\bar{l}$ , где  $l$  обозначает электрон или мюон, то полная цепочка реакций имеет вид

$$p + \bar{p} \rightarrow \chi_{cJ} + X \rightarrow J/\psi + \gamma + X \rightarrow l + \bar{l} + \gamma + X \quad (77)$$

В данной главе будут получены оценки сечения рождения чармониев в PANDA, а также дано описание генератора таких событий разработанного для нужд эксперимента PANDA. Результаты данной главы частично опубликованы в работе [51].

## 3.2 Оценка сечений рождение чармониев в PANDA

При высоких энергиях взаимодействия (порядка ТэВ), в адронной реакции доминирующим является глюон-глюонный канал, что обусловлено ростом структурных функций глюонов при малых  $x$ . С другой стороны, при низких энергиях становятся существенны и другие партонные каналы: в частности наряду с глюон-глюонным ( $gg$ ) каналом представленным на Рис. 1 и 2, следует принять во внимание каналы кварк-антикварковой аннигиляции ( $q\bar{q}$ ) и кварк-глюонного рассеяния ( $qg$ ).

Как показал анализ проведенный в Главе 1 в процессах рождения  $P$ -волновых кваркониев при высоких энергиях доминируют синглетные вклады. Согласно НРКХД, непертурбативные параметры, определяю-

щие относительный вклад различных компонент в сечение являются универсальными и не зависят от параметров жесткой реакции образования  $c\bar{c}$  пары. Поэтому, в данном разделе мы ограничимся рассмотрением доминирующих синглетных вкладов.

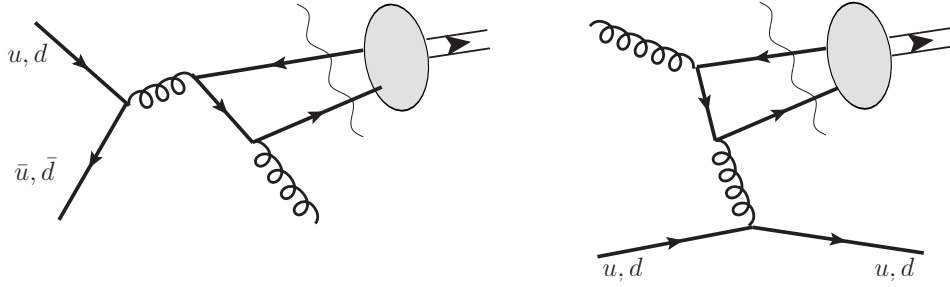


Рис. 11: Диаграммы Фейнмана соответствующие рождению синглетных состояний  $c\bar{c}$  [ ${}^3P_J^{[1]}$ ]: а) — в кварк-антикварковой аннигиляции, б) — в кварк-глюонном рассеянии. Волнистая линия отделяет пертурбативную от непертурбативной части амплитуды процесса.

На Рис. 11 представлены типичные диаграммы рождения  $c\bar{c}$  [ ${}^3P_J^{[1]}$ ] в кварк-антикварковой аннигиляции (Рис. 11а) и кварк-глюонном рассеянии (Рис. 11б). Соответствующие дифференциальные сечения могут быть получены методом аналогичным изложенному в Главе 1.3. Приведем здесь результаты:

$$\sum_{|\lambda|=0} \frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{t}}(q\bar{q} \rightarrow \chi_{c1}g) = \frac{128 \pi |R'(0)|^2 \alpha_S^3}{9 M^3 \hat{s} (\hat{s} - M^2)^4} (\hat{t}^2 + \hat{u}^2) \quad (78)$$

$$\sum_{|\lambda|=1} \frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{t}}(q\bar{q} \rightarrow \chi_{c1}g) = \frac{512 \pi |R'(0)|^2 \alpha_S^3}{9 M \hat{s}^2 (\hat{s} - M^2)^4} \hat{t} \hat{u} \quad (79)$$

$$\sum_{|\lambda|=0} \frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{t}}(q\bar{q} \rightarrow \chi_{c2}g) = \frac{128 \pi |R'(0)|^2 \alpha_S^3}{27 M^3 \hat{s} (\hat{s} - M^2)^4} (\hat{t}^2 + \hat{u}^2) \quad (80)$$

$$\sum_{|\lambda|=1} \frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{t}}(q\bar{q} \rightarrow \chi_{c2}g) = \frac{512 \pi |R'(0)|^2 \alpha_S^3}{9 M \hat{s}^2 (\hat{s} - M^2)^4} \hat{t} \hat{u} \quad (81)$$

$$\sum_{|\lambda|=2} \frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{t}}(q\bar{q} \rightarrow \chi_{c2}g) = \frac{256 M \pi |R'(0)|^2 \alpha_S^3}{9 M \hat{s}^3 (\hat{s} - M^2)^4} (\hat{t}^2 + \hat{u}^2) \quad (82)$$

Ввиду кроссинг-симметрии, сечения для канала  $qg$  получаются заменой  $\hat{t} \leftrightarrow \hat{s}$ . Данные результаты совпадают с полученными в работе [8]. Отметим, что в отличие от  $gq$  и  $gg$  реакций, реакция  $q\bar{q}$  идет в  $\hat{s}$ -канале, а следовательно, дифференциальное сечение в этом канале не обладает  $p_T$ -расходимостью.

На Рис. 12 показан относительный вклад  $u\bar{u}$  канала в полное сечение реакции. Как видно, этот канал реакции доминирует. Впервую очередь это объясняется тем, что при низких энергиях структурные функции глюонов фактически пренебрежимо малы по сравнению со структурными функциями валентных кварков. Помимо этого, значение структурной функции  $d$ -кварка также оказывается существенно меньше  $u$ -кварка.

Здесь следует остановиться на важном замечании о применимости партонной модели при низких энергиях. При использовании партонной модели, полагается, что начальные партоны находятся на массовой поверхности, т.е. пренебрегая масами легких кварков считается, что  $q^2 = 0$ . В тоже время,  $q^2 = (xP)^2 = x^2 M_p^2$ , где  $M_p$  — масса протона. Таким образом, партонная модель может быть непротиворечиво использована

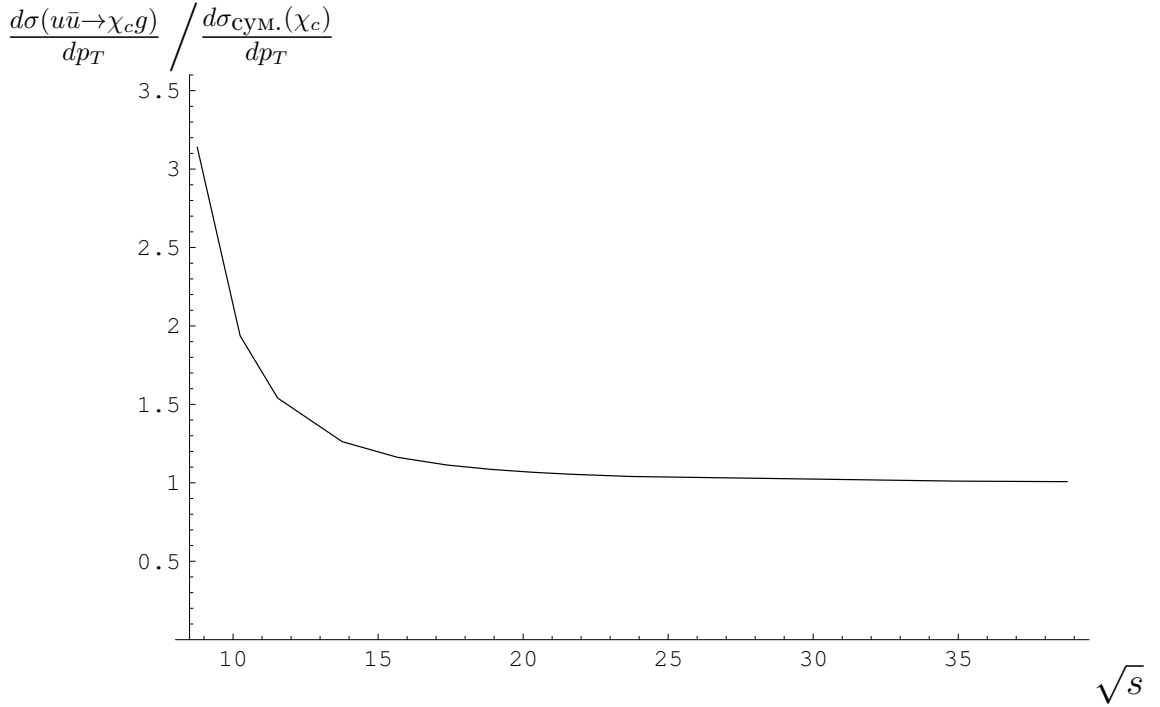


Рис. 12: Вклад  $u\bar{u}$  канала по отношению к суммарному сечению рождения  $\chi_c$  в зависимости от энергии реакции. Поскольку в рассматриваемой области  $p_T$  все каналы дают примерно одинаковую  $p_T$ -зависимость, в отношении она сокращается и оно практически не зависит от  $p_T$  (вдали от нуля, где есть коллинеарная расходимость в каналах  $gg$  и  $qg$ ).

только на энергиях  $\sqrt{s} \gg M_p$ . В тоже время, хорошо известно, что экспериментальные данные свидетельствуют о том, что даже при низких энергиях партонная модель является разумным инструментом анализа инклюзивных процессов. В рассматриваемых процессах, нарушение партонной модели можно ожидать в том, что в конечном состоянии будут оставаться барионы; при этом очевидно, что поперечный импульс чармония будет практически равен нулю. Экспериментально известно, что такая ситуация наблюдается примерно в половине событий. Это также подтверждается тем, что отношение упругого и неупругого сечений рассеяния  $p\bar{p}$  при энергиях порядка  $M_p$  равно 0.5. Таким образом, для того чтобы исключить такие события из рассмотрения необходимо умножить



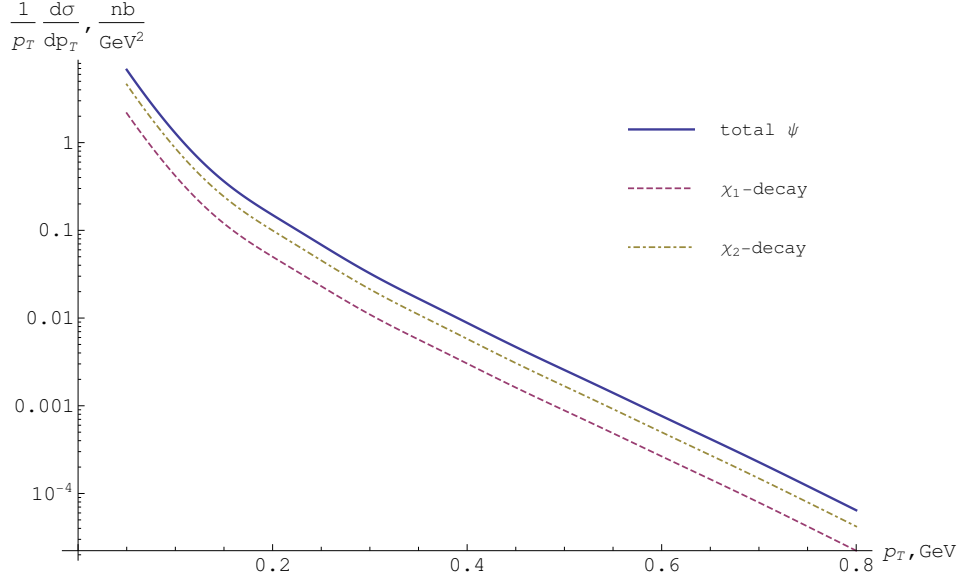


Рис. 13:  $p_T$ -зависимость сечений рождения  $\chi_c$  в эксперименте PANDA.

полученные сечения на  $k = 0.5$ .

На Рис. 13 показана  $p_T$ -зависимость сечений рождения  $\chi_c$  в условиях эксперимента PANDA. Поскольку в  $q\bar{q}$  канале отсутствует  $p_T$ -расходимость, ты можно легко посчитать полное сечение реакций. В результате получены следующие оценки на полные сечения рождения чармониев:

$$\sigma(p\bar{p} \rightarrow \chi_{c1} + X) = 0.20 \text{ нб.} \quad (83)$$

$$\sigma(p\bar{p} \rightarrow \chi_{c2} + X) = 0.75 \text{ нб.} \quad (84)$$

$$\sigma(p\bar{p} \rightarrow \chi_{c0} + X) = 0.35 \text{ нб.} \quad (85)$$

$$\sigma(p\bar{p} \rightarrow \chi_{cJ} + X \rightarrow J/\psi\gamma + X) = 0.21 \text{ нб.} \quad (86)$$

### 3.3 Генератор событий

Важным значением для эксперимента PANDA была разработка программного пакета для моделирования цепи реакций (77) в реальных условиях эксперимента. Проведение такого моделирования необходимо впервые очередь для прояснения возможностей детекторов (прежде всего элек-

тромагнитных калориметров) по реконструкции цепи реакций (77). Одна из основных трудностей в реконструкции этих реакций состоит в том, что разница масс между  $\chi_{c2}$  и  $\chi_{c1}$  очень мала и находится на грани чувствительности детекторов. Именно поэтому моделирование и набор большой статистики играют важную роль при дальнейшей разработке алгоритмов анализа и реконструкции. В конечном счете, разработанные алгоритмы будут использоваться для анализа физических данных эксперимента PANDA во время его работы.

Моделирование реакции (77) можно разбить на следующие этапы:

1. Рождение мезона и адронного остатка в протон-антипротонном взаимодействии
2. Радиационный распад состояния на векторный мезон и фотон
3. Электромагнитный распад векторного мезона на лептонную пару
4. Транспорт всех частиц через вещество детекторов PANDA
5. Регистрация частиц в детекторах
6. Анализ статистики

Поскольку время жизни чармониев очень мало ( $\sim 10^{-21}$  с), то цепочка реакций распада происходит до того, как мезоны достигнут вещества детекторов, что позволяет моделировать эти распады без учета окружающего вещества и считать, что лептонная пара и фотон имеют нулевые координаты рождения.

Коллаборацией PANDA разработана и поддерживается система моделирования PANDARoot, предназначенная специально для моделирования поведения всех частей экспериментальной установки в условиях реального запуска эксперимента. Используя интерфейс PANDARoot для

нашей задачи, нам достаточно имплементировать шаги 1-3, так как распространение частиц через вещество и их регистрация уже заложены и реализованы в PANDARoot для большинства типов детекторов.

Для моделирования инклюзивных реакций типа (77) обычно используется система Pythia [88,89], которая превосходно зарекомендовала себя для процессов при высоких энергиях. В тоже время Pythia не предназначена для работы при низких энергиях, и, начиная с версии 8, не позволяет проводить моделирование при энергиях системы ниже 10 ГэВ, в то время как мы рассматриваем процесс при энергии  $\sim 5.6$  ГэВ.

Для моделирования реакции (77) был разработан генератор событий<sup>2</sup>, процесс генерации событий в котором может быть схематично представлен следующими шагами:

1. Монте-Карло генератор событий реализованный на C++ симулирует рождение чармония на партонном уровне, т.е. случайным образом разыгрывает кинематику реакции

$$p\bar{p} \rightarrow (uud) + (\bar{u}\bar{u}\bar{d}) \rightarrow \chi_c + g + (ud) + (\bar{u}\bar{d})$$

2. Использую механизм адронизации реализованный в Pythia8 (который не зависит от энергий частиц), цветной остаток адронизуется в бесцветные частицы:

$$g + (ud) + (\bar{u}\bar{d}) \rightarrow X$$

3. Генератор распадов EvtGen [90] генерирует событие распада:

$$\chi_c \rightarrow J/\psi + \gamma \rightarrow l + \bar{l} + \gamma$$

---

<sup>2</sup>исходный код генератора находится по адресу <https://bitbucket.org/ihep/pandaroot-chigen>

4. Все сгенерированные белые частицы передаются в PANDARoot для моделирования их последующего распространения в веществе и регистрации в детекторах PANDA.

Следующий листинг иллюстрирует использование разработанного генератора на примере рождения  $\chi_{c1}$ :

---

```

1  gSystem->Load("libCHIGEN");
2  //initialize ChiGen
3  chigen::initialize(seed);
4  ...
5  FairPrimaryGenerator* primGen = new
6      FairPrimaryGenerator();
7  fRun->SetGenerator(primGen);
8  //add decay table
9  chigen::evtgen::read_dec_file("chi_c1.dec");
10 //select parton model for chi_c1
11 chigen::models::chi_1 chi1(5.5); //5.5 - ecm energy
12 //create ChiGen
13 chigen::PndChiGen chigen(&chi10);
14 //add ChiGen to PANDA global generator
15 primGen->AddGenerator(&chigen);
16 ...

```

---

Данный листинг - это стандартный код макроса PANDARoot, в который добавлен процесс с использованием разработанного генератора инклюзивного рождения чармониев (в дальнейшем ChiGen). В строке 3 происходит инициализация генератора ChiGen с заданным значением случайного седа. В строке 9 мы сообщаем генератору ChiGen какие распады следует учитывать (файл формата EvtGen). В строке 12 объявляется модель партонной реакции (рождение продольно поляризованных  $\chi_{c1}$ ), которая затем передается главному генератору ChiGen (в строке 14), который отвечает за симулирование всей цепочки реакций и передает сгенерированное событие PANDARoot для дальнейшего симулирования распространения образовавшихся частиц через вещество и их регистрацию.

В Таб. 9 продемонстрирован типичный листинг события, полученного

		<b>no</b>	<b>id</b>	<b>name</b>	<b>...</b>	<b>m</b>	
C++ Монте-Карло генератор	→	{	0	90	(system)	...	5.500
			1	9998	(chi_c1)	...	3.510
			2	21	(g)	...	0.000
			3	2	(u)	...	0.000
			4	1	(d)	...	0.000
			5	-2	(ubar)	...	0.000
			6	-1	(dbar)	...	0.000
.....							
Адронизация в Pythia8	→	{	13	9998	(chi_c1)	...	3.510
			14	211	pi+	...	0.140
			15	-211	pi-	...	0.140
.....							
Распад в EvtGen	→	{	22	443	J/psi	...	3.510
			23	22	gamma	...	3.510
			24	211	pi+	...	0.140
			25	-211	pi-	...	0.140

Таблица 9: Структура типичного события сгенерированного разработанным генератором. Три блока группируют части события заполняемые на разных этапах генерации: (сверху вниз) генерация партонного события, адронизация, радиационный распад. Опущенные коронки соответствуют различным кинематическим переменным.

с помощью представленного кода.

### 3.4 Выводы к третьей главе

Механизм рождения чармониев при низких энергиях существенно отличаются от механизма при энергиях порядка сотен ГэВ. Это связано с тем, что при низких энергиях заметные вклады начинают давать каналы кварк-глюонного рассеяния. В процессах аннигиляции адронов, доминирующим оказывается канал  $u\bar{u}$  аннигиляции.

В данной главе были рассмотрены процессы рождения чармониев при энергии адронной реакции  $\sim 5.6$  ГэВ в эксперименте PANDA. Радиационные распады  $P$ -волновых чармониев  $\chi_{c1,2}$  являются основным каналом рождения  $J/\psi$ , т.к. прямое рождение векторного мезона запрещено по зарядовой четности. Доминирующим партонным каналом реакции при этом оказывается  $u\bar{u}$  аннигиляция. Были получены предсказания сечений и  $p_T$ -спектров рождения чармониев. Для того чтобы исключить события с барионами в конечном состоянии (при этом поперечный импульс чармония становится равным к нулю), где партонная модель не применима, мы, исходя из эвристических соображений и отношения сечений упругого и неупругого  $p\bar{p}$  рассеяний, умножили сечения на  $k$ -фактор  $\sim 0.5$ .

Большую важность для коллаборации PANDA представляла разработка генератора событий рождения  $\chi_c$  в реальных условиях экспериментальной установки. Такой генератор (ChiGen) был реализован в среде PANDARoot. Для его реализации на языке C++ был реализован Монте-Карло генератор партонной реакции. В качестве механизм адронизации партонов использовался механизм системы Pythia8. Для моделирования радиационных распадов использовался генератор EvtGen.

Наконец все части ChiGen объединены в единый интерфейс, встроенный в PANADARoot для использования коллаборацией PANDA.

## 4 Аналитические расчеты в системе компьютерной алгебры Redberry

### 4.1 Введение

Сегодня системы компьютерной алгебры (СКА) общего назначения стали неотъемлемой частью большинства научных расчетов. В теоретической физике и особенно в физике высоких энергий приходится решать задачи, в которых часто встречаются тензорные выражения тензорами (или более общо — объекты с индексами). Автором была разработана система компьютерной алгебры Redberry<sup>3</sup> [50], которая специально предназначена для проведения расчетов с выражениями, содержащими объекты с индексами — т.е. для расчетов, которые составляют значительную часть аналитических вычислений в физике высоких энергий. На сегодняшний день существует ряд пакетов созданных на основе СКА общего назначения (Maple Physics [91], xAct [92], Tensorial и т.п.), а также автономных систем (Cadabra [93, 94], SymPy [95], GiNaC [96, 97] и т.п.), которые покрывают различные области компьютерных вычисления с тензорами. Тем не менее нельзя сказать, что научный запрос на такие программные пакеты удовлетворен [98].

---

<sup>3</sup>исходный код и полная документация доступны по адресу <http://redberry.cc>



Основная отличительная особенность тензорных выражений (по сравнению с обычными безиндексными) заключается в том, что эйнштейновская нотация привносит дополнительную структуру в математические выражения, а именно: свертки между индексами образуют математический граф (иногда такое представление принято называть графической нотацией Пенроуза). Эта дополнительная структура должна быть отражена в компьютерном представлении объектов с индексами, что делает обычные системы, основанные на одномерной структуре списков, неподходящими в качестве основы для реализации алгоритмов работы с тензорами [94]. В частности, компьютерная реализация таких фундаментальных атомарных операций, как сравнение выражений становится намного более сложной, что в свою очередь усложняет реализацию таких базовых процедур, как например раскрытие скобок и приведение подобных слагаемых. Поскольку любая рутинная процедура состоит из цепочки подобных базовых операций, их производительность является критической для решения реальных задач физики.

Разработанная автором система Redberry направлена на решение задач, связанных с алгебраическими преобразованиями абстрактных тензорных выражений. При этом Redberry является открытой и расширяемой системой с нативной поддержкой специфических для тензорных объектов процедур; таким образом, пользователю становится достаточно легко реализовать широкий набор функций необходимых для решения конкретных задач. Хотя Redberry не создана специально для решения задач физики высоких энергий, она содержит ряд высокоуровневых функций для расчетов в этой области (алгебра матриц Дирака и  $SU(N)$ , вычисление однопетлевых контрчленов и т.п.). В следующем разделе функциональность Redberry будет продемонстрирована именно на этих примерах.

Ключевыми особенностями Redberry являются: встроенная поддерж-

ка немых индексов (включая автоматическое разрешение конфликтов), поддержка симметрий тензоров, средства для сравнения выражений, наличие нескольких типов индексов,  $\text{\LaTeX}$ -формат ввода/вывода, а также широкий набор специфичных для тензоров процедур. Помимо этого, Redberry содержит пакет для расчета диаграмм Фейнмана в физике высоких энергий (следы матриц Дирака и  $SU(N)$  матриц, упрощение выражений с тензором Леви-Чивиты и т.п.) и пакет для вычисления однопетлевых расходимостей в теории поля.

Ядро Redberry написано на языке Java, в то время как пользовательский интерфейс реализован на языке Groovy и предназначен для использования именно в среде Groovy; таким образом, функциональность Redberry доступна через современный высокоуровневый язык программирования общего назначения, тем самым давая возможность пользователю использовать общие программные средства и функции СКА в едином программном окружении. В качестве удачного примера такого подхода можно упомянуть СКА SymPy [95], которая написана на языке Python и использует Python в качестве основного пользовательского интерфейса. Хотя Redberry не предоставляет графический интерфейс, современные интегрированные среды разработки<sup>4</sup> предоставляют очень удобный способ работы с Redberry, включая автодополнение кода и подсветку синтаксиса.

Все аналитические расчеты выполненные в данной диссертации выполнены с использованием системы Redberry. В данной главе мы, не вдаваясь в подробное описание особенностей Redberry, продемонстрируем ее функциональность на нескольких типовых примерах из физики высоких энергий: вычисление дифференциального сечения комптоновского рас-

---

<sup>4</sup>на наш взгляд наиболее удобной является IntelliJIDEA, которая имеет превосходную поддержку Groovy

сеяния и вычисление однопетлевых контрчленов оператора векторного поля в искривленном пространстве. Результаты данной главы опубликованы в работе [50], в которой также дано более полное описание системы Redberry.

## 4.2 Примеры использования Redberry

### 4.2.1 Расчет диаграмм Фейнмана

Одно из прямых применений Redberry это расчет фейнмановских диаграмм в квантовой теории поля. Redberry предоставляет несколько базовых функций таких как взятие следов унитарных и гамма матриц, упрощение комбинаций тензоров Леви-Чивиты и т.п., а также удобные средства для ввода некоммутативных выражений. В этом разделе в качестве иллюстрации работы Redberry мы продемонстрируем хорошо известное вычисление дифференциального сечения комптоновского рассеяния в квантовой электродинамике.

Прежде всего следует отметить, что Redberry не поддерживает некоммутативные произведения обычных символов. Тем не менее, многие некоммутативные объекты, которые встречаются в физических расчетах (например спиноры или матрицы Дирака), имеют матричную природу, что означает, что они имеют дополнительные матричные индексы, которые для удобства принято опускать в записи. Например, следующее произведение дираковских спиноров и гамма матриц:

$$T_{\mu\nu} = \bar{u} \gamma_\mu \gamma_\nu \quad (87)$$

на самом деле содержит дополнительные матричные индексы, которые могут быть выписаны в полной записи этого выражения:

$$T_{\mu\nu b'} = \bar{u}_{a'} \gamma_\mu^{a'} c' \gamma_\nu^c b'. \quad (88)$$

В этой записи матричные индексы  $a', b', c'$  выписаны явно. С такой точки зрения, эти "некоммутативные" произведения на самом деле представляют обычные произведения тензоров со свертками индексов. Такие матричные индексы, очевидно, не имеют метрики и их нельзя опускать или поднимать. Redberry предоставляет функциональность для удобного ввода таких выражений аналогично записи (87). Матричные индексы будут автоматически вставлены при синтаксическом разборе выражения, и дальнейшая работа с таким выражением ничем не отличается от работы с обычными тензорными выражениями. Более детальное описание этой функциональности можно найти в [50].

Перейдем к физической проблеме. В следующем листинге вычисляется квадрат матричного элемента комптоновского рассеяния в квантовой электродинамике:

---

```

1  defineMatrices 'G_a', 'V_i', 'D[x_m]', Matrix1.matrix,
2                    'vu[p_a]', Matrix1.vector,
3                    'cu[p_a]', Matrix1.covector
4  //photon-electron vertex
5  def V = 'V_m = -I*e*G_m'.t,
6  //electron propagator
7  D = 'D[p_m] = -I*(m + p_m*G^m)/(m**2 - p_m*p^m)'.t,
8  //diagram a)
9  Ma = 'cu[p2_m]*V_m*e^m[k2_m]*D[k1_m+p1_m]*V_n*e^n[k1_m]*
        vu[p1_m]'.t,
10 //diagram b)
11 Mb = 'cu[p2_m]*V_m*e^m[k1_m]*D[p1_m-k2_m]*V_n*e^n[k2_m]*
        vu[p1_m]'.t,
12 //matrix element
13 M = Ma + Mb
14 M = (V & D) >> M
15 //mandelstam variables
16 def mandelstam = setMandelstam(
17     ['p1_m': 'm', 'k1_m': '0', 'p2_m': 'm', 'k2_m': '0'])
18 M = (ExpandAll & mandelstam) >> M
19 //complex conjugation
20 def MC = M
21 MC = 'vu[p1_m]*cu[p2_m] = vu[p2_m]*cu[p1_m]'.t >> MC
22 MC = (Conjugate & Reverse[Matrix1]) >> MC
23 //squared matrix element
24 def M2 = ExpandAll >> (M * MC / 4)

```

```

25 //photon polarizations
26 M2 = 'e_m[k1_a]*e_n[k1_a] = -g_mn'.t >> M2
27 M2 = 'e_m[k2_a]*e_n[k2_a] = -g_mn'.t >> M2
28 //electron polarizations
29 M2 = 'vu[p2_m]*cu[p2_m] = m + p2^m*G_m'.t >> M2
30 M2 = 'vu[p1_m]*cu[p1_m] = m + p1^m*G_m'.t >> M2
31 //applying trace of gamma matrices
32 M2 = DiracTrace['G_a'] >> M2
33 //final simplifications
34 M2 = (ExpandAndEliminate & 'd^m_m = 4'.t & mandelstam)
    >> M2
35 M2 = ('u = 2*m**2 - s - t'.t & Factor) >> M2
36 println M2

▷ 2*(-m**2+s+t)**(-2)*e**4*(-8*s**2*m**2*t+4*s**3*t+2*s
  **4+t**3*s+2*m**8+4*m**4*s*t-m**2*t**3-2*m**2*t
  **2*s+3*m**4*t**2-8*s**3*m**2+12*s**2*m**4+3*s**2*
  t**2-8*m**6*s)*(m**2-s)**(-2)

```

---

Представленный код воспроизводит стандартные шаги вычисления диаграмм Фейнмана и выводит на экран квадрат матричного элемента комптоновского рассеяния усредненный по начальным и просуммированный по конечным спинам частиц:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{2e^4}{(m^2 - s)^2(-m^2 + s + t)^2} \times \\
&\times \left( -8s^2m^2t + 4s^3t + 2s^4 + t^3s + 2m^8 + 4m^4st - m^2t^3 \right. \\
&\quad \left. - 2m^2t^2s + 3m^4t^2 - 8s^3m^2 + 12s^2m^4 + 3s^2t^2 - 8m^6s \right) \quad (89)
\end{aligned}$$

Представленный код интуитивно ясен, однако требует несколько предварительных пояснений. Конструкция `'...'.t` переводит математическое выражение записанное в виде строки в компьютерный объект. Синтаксис ввода тензорных выражений такой же как и в  $\text{\LaTeX}$ . Redberry использует зарезервированные символы для обозначения встроенных тензоров, например `i` для мнимой единицы, или `g_ij` и `d^i_j` для метрики и символа Кронекера соответственно. Таким образом, например,

при свертке метрик, Redberry автоматически учитывает  $g_{ai} g^{aj} = \delta_i^j$ . Redberry не использует какое-либо определенное значение размерности пространства, так что след символа Кронекера должен быть подставлен вручную (в строке 34). Как видно из примера, Redberry различает верхний и нижние индексы. Все преобразования (например подстановки, `Expand`, `EliminateMetrics` и т.п.) являются объектами первого класса и могут быть присвоены переменным. Трансформации в Redberry могут быть применены к выражениям с помощью оператора сдвига `>>`.

Рассмотрим теперь представленный код более детально. В начале, в строках 1 — 3 мы сообщаем Redberry, что некоторые объекты следует рассматривать как матрицы, векторы или ковекторы; эти объекты: гамма матрицы (`G_a`), вершина электрон-фотон (`v_i`), пропагатор электрона (`D[p_m]`), волновая функция электрона  $u(p)$  (`vu[p_m]`) и ее сопряжение  $\bar{u}(p)$  (`cu[p_m]`). Для того чтобы сделать это, вызывается функция `defineMatrices(...)` с аргументами — тензорами и следующими за ними дескрипторами. Каждый дескриптор задает тип матричных индексов и тип матричного объекта (например `Matrix1.matrix`, `Matrix1.covector`). В данном примере используется единственный матричный тип (`Matrix1`). Как результат, такие комбинации как например  $\bar{u}(p_1) \gamma_\mu u(p_2)$  будет рассматриваться как скаляр (по отношению к матричным индексам), а комбинация  $u(p_1) \bar{u}(p_2)$  будет рассматриваться как матрица. В выражениях типа  $m + p_\mu \gamma^\mu$  первое слагаемое будет автоматически помножено на единичную матрицу (символ Кронекера).

Следующий шаг заключается в построении матричного элемента. Комптоновскому рассеянию в низшем порядке теории возмущений отвечают две диаграммы. Эти две диаграммы вводятся строках 9 - 14, где `e_n[k_m]` обозначает поляризацию фотонов.

В строке 16 объявляются мандельстамовские переменные. Функция

```
setMandelstam(['p1':'m1','p2':'m2','p3':'m3','p4':'m4'])
```

без ассоциированный массив 'импульс — масса частицы' в качестве аргумента и возвращает список трансформаций, следующий из обозначений:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 \end{aligned}$$

Следующий шаг (строки 20 - 22) построить комплексное сопряжение матричного элемента. Хорошо известно, что

$$\left( \bar{u}(p_2) \hat{M} u(p_1) \right)^* = \bar{u}(p_1) \hat{M} u(p_2), \quad (90)$$

где

$$\hat{M} = \sum_i c_i \hat{a}_1 \hat{a}_2 \dots \hat{a}_i, \quad \hat{\hat{M}} = \sum_i c_i^* \hat{a}_i \hat{a}_{i-1} \dots \hat{a}_1 \quad (91)$$

и используется стандартное обозначение  $\hat{a} = \gamma_\mu a^\mu$ . Такое преобразование эквивалентно двум подстановкам:

$$u(p_1) \bar{u}(p_2) \rightarrow u(p_2) \bar{u}(p_1) \quad \text{и} \quad \hat{M} \rightarrow \hat{\hat{M}} \quad (92)$$

Первая подстановка применяется в строке 21, вторая — в строке 22. Смысл трансформации `Reverse[Matrix1]` ясен исходя из ее названия: она просто переписывает произведение матриц в обратном порядке.

Теперь имеются все необходимые части для вычисления квадрата матричного элемента, что делается в строке 24. В строках 26 - 27 производится суммирование по поляризациям фотонов, а в строках 29 -30 — по поляризациям электронов. На последнем шаге, все произведения гамма матриц превращаются в комбинации их следов. Таким образом,

следующий шаг — это взятие следов гамма матриц путем применения трансформации `DiracTrace`. После этого осталось только свернуть метрические тензоры и применить мандельстамовские подстановки (строка 34) для получения символьного, т.е. свободного от тензорных величин, выражения. Для его финального упрощения мы применили трансформацию `Factor`, которая факторизует многочлены.

#### 4.2.2 Вычисление однопетлевых расходимостей функциональных детерминантов в искривленном пространстве

Другое интересное применение `Redberry` состоит в вычислении расходящейся части однопетлевого эффективного действия произвольных лагранжианов. Теоретический формализм, основанный на методе фонового поля т'Хофта-Вельтмана, описан работе [99] и с успехом применен для вычислений в ряде теоритических моделей используя СКА `Reduce` [100]. Этот алгоритм позволяет вычислять однопетлевые расходимости в произвольных теориях в четырех измерениях в произвольном фоновом поле в искривленном пространстве в размерной регуляризации. `Redberry` имплементирует этот алгоритм для дифференциальных операторов второго и четвертого порядка и предоставляет простой и удобный пользовательский интерфейс.

Начнем с минимального физического введения. Хорошо известно, что однопетлевое эффективное действие в произвольной теории поля с действием  $S[\phi]$  может быть выражено в терминах функциональных производных действия:

$$\Gamma^{(1)} = \frac{i\hbar}{2} \text{Tr} \left( \ln \frac{\delta^2 S}{\delta\phi^i \delta\phi_j} \right),$$

где  $\phi_i$  обозначает поле и латинские буквы обозначают весь набор его



индексов<sup>5</sup>. Таким образом, основная величина, определяющая эффективное действие — это дифференциальный оператор

$$D_i{}^j = \frac{\delta^2 S}{\delta\phi^i \delta\phi_j}. \quad (93)$$

В наиболее общем случае этот оператор имеет вид:

$$\begin{aligned} D_i{}^j &= K^{\mu_1\mu_2\dots\mu_L}{}_i{}^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_L} \\ &+ S^{\mu_1\mu_2\dots\mu_{L-1}}{}_i{}^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{L-1}} \\ &+ W^{\mu_1\mu_2\dots\mu_{L-2}}{}_i{}^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{L-2}} \\ &+ N^{\mu_1\mu_2\dots\mu_{L-3}}{}_i{}^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{L-3}} \\ &+ M^{\mu_1\mu_2\dots\mu_{L-4}}{}_i{}^j \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} \dots \nabla_{\mu_{L-4}} + \dots, \end{aligned} \quad (94)$$

где  $\nabla_\mu$  — ковариантная производная по отношению к пространственно-временным и внутренним индексам:

$$\nabla_\alpha T^\mu{}_i{}^j = \partial_\alpha T^\mu{}_i{}^j + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu T^\gamma{}_i{}^j + \omega_{\alpha i}{}^k T^\mu{}_k{}^j - \omega_{\alpha k}{}^j T^\mu{}_i{}^k \quad (95)$$

$$\nabla_\mu \Phi_i = \partial_\mu \Phi_i + \omega_{\mu i}{}^j \Phi_j, \quad (96)$$

где  $\Gamma_{\alpha\gamma}^\mu$  — символы Кристоффеля и  $\omega_{\mu i}{}^j$  — связность на главном расслоении. Коммутируя ковариантные производные, всегда можно сделать тензоры  $K$ ,  $S$ ,  $W$ ,  $N$ ,  $M$  симметричными по греческим индексам. В дальнейшем, мы будем предполагать это условие выполненным.

Введем также следующие величины:

$$(Kn)_j{}^i = K^{\mu_1\mu_2\dots\mu_L}{}_j{}^i n_{\mu_1} n_{\mu_2} \dots n_{\mu_L}, \quad (Kn)^{-1}{}_i{}^j (Kn)_j{}^k = \delta_i{}^k, \quad (97)$$

где  $n_\mu$  — единичный вектор. Второе уравнение определяет тензор  $(Kn)^{-1}$ , обратный к тензору  $Kn$ , который является входным параметром ал-

---

<sup>5</sup>Здесь конкретный тип этих индексов неважен (например, этот набор может содержать одновременно и пространственно-временные и  $SU(N)$  индексы), так что латинские буквы используются исключительно для удобства.

горитма<sup>6</sup>. Еще одной входной величиной является тензор кривизны на главном расслоении:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\Phi_i = F_{\mu\nu}{}^j{}_i \Phi_j \quad (98)$$

Имея набор входных параметров  $K, W, M, (Kn)^{-1}$  и  $F$ , Redberry позволяет вычислять контрчлены для операторов второго и четвертого порядков следующего вида:

$$D^{(2)}{}_i{}^j = K^{\mu\nu}{}_i{}^j \nabla_\mu \nabla_\nu + W_i{}^j \quad (99)$$

$$D^{(4)}{}_i{}^j = K^{\mu\nu\alpha\beta}{}_i{}^j \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\alpha \nabla_\beta + W^{\mu\nu}{}_i{}^j \nabla_\mu \nabla_\nu + M_i{}^j \quad (100)$$

В качестве примера, рассмотрим вычисление однопетлевых расходимостей для оператора векторного поля, который, например, возникает в теории массивного векторного поля:

$$D_\alpha{}^\beta = \delta_\alpha{}^\beta \square - \lambda \nabla_\alpha \nabla^\beta + P_\alpha{}^\beta, \quad (101)$$

где  $\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$  и  $\lambda = 1 + 1/\xi$ . Это оператор второго порядка, и для того, чтобы переписать его в виде (99), необходимо симметризовать второе слагаемое путем коммутирования ковариантных производных:

$$D_\alpha{}^\beta = \left( g^{\mu\nu} \delta_\alpha{}^\beta - \frac{\lambda}{2} (g^{\mu\beta} \delta_\alpha{}^\nu + g^{\nu\beta} \delta_\alpha{}^\mu) \right) \nabla_\mu \nabla_\nu + P_\alpha{}^\beta + \frac{\lambda}{2} R_\alpha{}^\beta,$$

где  $R_{\alpha\beta}$  — тензор Риччи.

Используя уравнения (97) легко находим:

$$(Kn)_\alpha{}^\beta = \delta_\alpha{}^\beta - \lambda n_\alpha n^\beta, \quad (Kn)^{-1}{}_\alpha{}^\beta = \delta_\alpha{}^\beta + \frac{\lambda}{1-\lambda} n_\alpha n^\beta. \quad (102)$$

Таким образом, мы имеем полный набор входных данных алгоритма,

---

<sup>6</sup>Redberry также позволяет находить обратный тензор (см. документацию на сайте Redberry).

которые имеют вид:

$$F_{\mu\nu\alpha}{}^\beta = R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta \quad (103)$$

$$K^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\beta = g^{\mu\nu}\delta_\alpha^\beta - \frac{\lambda}{2}(g^{\mu\beta}\delta_\alpha^\nu + g^{\nu\beta}\delta_\alpha^\mu) \quad (104)$$

$$S^\mu{}_\alpha{}^\beta = 0 \quad (105)$$

$$W_\alpha{}^\beta = P_\alpha{}^\beta + \frac{\lambda}{2}R_\alpha{}^\beta \quad (106)$$

$$(Kn)^{-1}{}_\alpha{}^\beta = \delta_\alpha^\beta + \frac{\lambda}{1-\lambda}n_\alpha n^\beta \quad (107)$$

В дальнейших вычислениях для удобства используется обозначение  $\lambda = \gamma/(1 + \gamma)$  (так что  $\gamma = \lambda/(1 - \lambda)$ ).

Следующий код вычисляет однопетлевые контрчлены оператора векторного поля в искривленном пространстве (символ  $g$  используется для обозначения  $\gamma$ ):

---

```

1  addSymmetries 'R_abcd', -[1, 0, 2, 3].p, [2, 3, 0, 1].p
2  setSymmetric 'R_ab', 'P_ab'
3  def iK = 'iK_a^b = d_a^b + g*n_a*n^b'.t
4  def K = 'K^mn_a^b = g^mn*d_a^b - g/(2*(1+g))*(g^mb*d_a^n
      + g^nb*d_a^m)'.t
5  def S = 'S^r^m_n = 0'.t
6  def W = 'W^a_b = P^a_b+g/(2*(1+g))*R^a_b'.t
7  def F = 'F_mnab = R_mnab'.t
8  //calculates one-loop counterterms of the second order
      operator
9  def div = oneloopdiv2(iK, K, S, W, F)
10 def counterterms = 'P^a_a = P'.t >> div.counterterms[1]
11 counterterms = Collect['R', 'P', Factor[['FactorScalars'
      : false]]] >> counterterms
12 println counterterms

▷ counterterms = (1/240)*R**2*(5*g**2+20*g+28)+(1/24)
      *(6*g+12+g**2)*P^{b}_{a}*P^{a}_{b}+(1/120)*(5*g
      **2+10*g-32)*R_{fp}*R^{fp}+(1/48)*P**2*g**2+(1/24)
      *(2*g+4+g**2)*P*R+(1/12)*g*(4+g)*R_{a_{5}}^{b}*P^{
      a_{5}}_{b}

```

---

Для того, чтобы получить контрчлены в размерной регуляризации, необходимо умножить результат выданный Redberry на  $1/16\pi(d - 4)$  и

проинтегрировать по пространству-времени:

$$\Gamma_{\infty}^{(1)} = \frac{1}{16\pi(d-4)} \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{120}(-32 + 5\gamma^2 + 10\gamma)R_{\epsilon\mu}R^{\epsilon\mu} + \frac{1}{48}\gamma^2 P^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{240}R^2(28 + 5\gamma^2 + 20\gamma) + \frac{1}{24}(\gamma^2 + 12 + 6\gamma)P_{\beta\alpha}P^{\alpha\beta} + \right. \\ \left. + \frac{1}{12}\gamma(4 + \gamma)R_{\nu\epsilon}P^{\nu\epsilon} + \frac{1}{24}R(\gamma^2 + 4 + 2\gamma)P \right)$$

Представленный код достаточно ясен, однако несколько замечаний все же необходимо сделать. В первую очередь, основной метод `oneloopdiv2` (`...`), в котором собственно и происходят все вычисления для оператора второго порядка, возвращает специальный объект, который также содержит некоторые промежуточные результаты (например тензора  $RR$ ,  $RF$ ,  $FF$  введенные в оригинальной работе [99]). Полный результат для контрчленов доступен как свойство `.counterterms` у возвращенного объекта. Все вводимые выражения должны быть в таких же обозначениях, как и в оригинальной работе [99], кроме тензора  $(Kn)^{-1}$ , который должен быть обозначен как `ik`. На данный момент, реализация ограничивает возможные типы индексов только латинскими строчными. Помимо этого, предполагается, что индексы полей записаны в конце, так что например первые два индекса тензора  $K_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}$  сворачиваются с индексами ковариантных производных в (94), в то время как последние два индекса соответствуют индексам векторного поля. `Redberry` пока не поддерживает ненулевое значение тензора  $S$  из (94). Тем не менее, это должно быть указано явно, как это сделано в строке 11.

### 4.3 Выводы к четвертой главе

Сегодня компьютерные средства стали неотъемлемой частью большинства научных расчетов в физике высоких энергий. Важной частью таких расчетов являются аналитические вычисления. В данной главе

на примерах конкретных вычислений кратко описана функциональность системы компьютерной алгебры Redberry, которая разрабатывается автором на протяжении пяти лет. Все аналитические вычисления представленные в данной диссертации выполнены в системе Redberry.

В большинстве аналитических расчетов, встречающихся в физике высоких энергий, приходится сталкиваться с тензорными выражениями. Система компьютерной алгебры Redberry уделяет особое внимание работе с такими выражениями и проведению алгебраических преобразований над тензорными выражениями. При этом возможности Redberry позволяют проводить вычисления в разных областях физики высоких энергий. В качестве примеров в данной главе было подробно рассмотрено вычисление фейнмановских диаграмм в КЭД и вычисления однопетлевых расходимостей функциональных детерминантов в квантовой гравитации.

С точки зрения внутренней архитектуры в Redberry применен новый подход к описанию тензорных выражений. Данный подход основан на том, что свертки между индексами приносят структуру графов в тензорные выражения. Это в свою очередь позволяет использовать алгоритмы на графах для реализации основных операций с тензорами. В частности, для установления того, что два выражения равны, необходимо определить, являются ли изоморфными графы, которые их представляют. Хотя эта задача и принадлежит скорее всего к классу вычислительной сложности  $\mathcal{NP}$ , существуют высокопроизводительные алгоритмы ее решения. Эти алгоритмы обычно основаны на алгоритме поиска с возвратом в конечных группах перестановок. Именно такой алгоритм реализован в Redberry. Другие существующие системы основаны на алгоритме каноникализации тензорных индексов, который эквивалентен поиску представителей двойных классов смежности в группе перестановок, который в свою очередь принадлежит классу  $\mathcal{NP}$ -полных задач и не

имеет решения за полиномиальное время. В статье [50] приводится сравнение производительности Redberry с другими системами; там в частности показывается, что даже на типичных примерах производительность Redberry лучше других систем в десятки раз. Это обусловлено именно используемым подходом, основанным на алгоритмах на графах.

## Заключение

В диссертации был рассмотрен ряд задач, связанных с рождением  $P$ -волновых кваркониев в адронных экспериментах.

Первая из них связана с исследованием механизмов рождения  $P$ -волновых чармониев  $\chi_c$  в экспериментах на ускорителях Тэватрон и БАК. Основным теоретическим инструментом исследования тяжелых кваркониев является НРКХД. В предыдущих работах, посвященных данной проблеме (см. например обзоры [39, 101]), полагалось что  $S$ -волновой октетный и синглетный вклады в сечения должны быть сравнимы. Это в свою очередь является следствием разложения НРКХД по относительной скорости кварков в мезоне  $v$ : эти два вклада имеют одинаковый порядок по  $v$ . В данной работе проанализированы последние данные полученные на ускорителе БАК и показано, что подавляющий вклад в рождение  $\chi_c$  дает синглетный по цвету канал реакции, в то время как  $S$ -волновой октетный вклад значительно подавлен. Как показано в данной работе, этот вклад подавлен даже по сравнению с  $P$ -волновым октетным вкладом, который имеет более высокий порядок по  $v$ . Установлено, что  $p_T$ -спектр отношения  $\chi_{c2}/\chi_{c1}$  является крайне чувствительным индикатором различных октетных вкладов в сечения рождения мезонов. Более того, как показано в данной работе, несмотря на наличие значительного

числа экспериментальных данных по этому отношению, в совокупности эти данные не вписываются в современную модель НРКХД: фиты различных экспериментов на основе критерия Пирсона  $\chi^2$  дают непересекающиеся области допустимых значений октетных параметров модели. В целом можно выделить две группы экспериментов, в каждой из которых имеется согласие различных экспериментальных данных друг с другом. Этот результат является вторым важным выводом данной работы.

Полученные значения непертурбативных матричных элементов НРКХД позволили решить следующую задачу данной работы — получение теоретических предсказания сечений рождения  $P$ -волновых боттомониев в ускорителе БАК. Экспериментальных данных по  $p_T$ -спектрам рождения  $\chi_b$  пока не получено, поэтому такие предсказания представляют большой интерес. Следующим важным физическим результатом работы было установление соотношения между  $p_T$ -спектром отношения  $\chi_{c2}/\chi_{c1}$  и  $\chi_{b2}/\chi_{b1}$ : показано, что с хорошей точностью  $p_T$ -спектр отношения  $\chi_{b2}/\chi_{b1}$  получается из спектра отношения  $\chi_{c2}/\chi_{c1}$  заменой  $p_T \rightarrow (M_{\chi_b}/M_{\chi_c})p_T$ . Следующей важной задачей стала оценка относительного выхода  $\chi_b(nP)$ -мезонов с различными значениями радиального квантового числа  $n$ . Эта величина поддается прямому экспериментальному измерению. На основе результатов потенциальных моделей, были получены оценки отношения наблюдаемого выхода состояния  $n = 2$  и  $n = 1$ , а также получено соотношение между относительным выходом состояний  $n = 3$  и  $n = 2$  и шириной радиационного брэнчинга  $\chi_b(3P) \rightarrow \Upsilon(1S)\gamma$ .

Третья глава была посвящена рождению  $P$ -волновых кваркониев в протон-антипротонной аннигиляции при низких энергиях. В этом случае доминантным каналом становится канал  $u\bar{u}$ -аннигиляции. Основным результатом данной главы является получение предсказаний сечений рождения  $\chi_{c1,2}$  в условиях эксперимента PANDA. Для нужд этого экспери-



мента был разработан Монте-Карло генератор событий инклюзивного рождения чармониев. Данный результат имеет прямую практическую значимость, т.к. такой генератор играет большую роль для моделирования и оценке эффективностей калориметров установки PANDA по идентификации и реконструкции реакций с участием чармониев.

Наконец в последняя глава посвящена компьютерным методам для проведения аналитических вычислений в физике высоких энергий. В рамках данной работы была разработана система компьютерной алгебры Redberry специально для проведения вычислений в физике высоких энергий. Все аналитические результаты и вычисления представленные в данной работе выполнены с использованием системы Redberry. Ее практическая значимость продемонстрирована на примере вычисления диаграмм Фейнмана и однопетлевых контрчленов в квантовой гравитации. Для реализации алгоритмов алгебраических преобразований тензорных выражений впервые применен подход на основе представления произведений тензоров графами и использования алгоритмов с графами, что позволило производить масштабные аналитические вычисления, необходимые, например, для вычисления дифференциальных сечений, представленных в Главе 1, за минимальное время.

Автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность своему научному руководителю А. К. Лиходеду.

Автор глубоко признателен своим соавторам А.В. Лучинскому и Д.А. Болотину, совместно с которыми был получен ряд результатов, вошедших в диссертацию.

Наконец, автор признателен всем сотрудникам ОТФ ИФВЭ, принявшим участие в обсуждении полученных результатов.

Исследования, представленные в диссертации, выполнялись при финансовой поддержке РФФИ (гранты #12-02-31249, #12-02-31408, #14-

02-00096), гранта Президента РФ МК-3513.2012.2 и гранта Helmholtz Association IK-RU-002.

## 5 Список литературы

- [1] Aubert J. J., Becker U., Biggs P. J. et al. Experimental Observation of a Heavy Particle  $J$  // Phys. Rev. Lett. — 1974. — Dec. — Vol. 33. — P. 1404–1406.
- [2] Augustin J. E., Boyarski A. M., Breidenbach M. et al. Discovery of a Narrow Resonance in  $e^+e^-$  Annihilation // Phys. Rev. Lett. — 1974. — Dec. — Vol. 33. — P. 1406–1408.
- [3] Glashow S. L., Iliopoulos J., Maiani L. Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry // Phys. Rev. D. — 1970. — Oct. — Vol. 2. — P. 1285–1292.
- [4] Herb S. W., Hom D. C., Lederman L. M. et al. Observation of a Dimuon Resonance at 9.5 GeV in 400-GeV Proton-Nucleus Collisions // Phys. Rev. Lett. — 1977. — Aug. — Vol. 39. — P. 252–255.
- [5] В. Г. Картвелишвили, А. К. Лиходед, С. Р. Слабоспицкий. Рождение  $D$ - и  $J/\psi$ - мезонов в адронных столкновениях // Ядерная Физика. — 1978. — Т. 28. — С. 1315.
- [6] В. Г. Картвелишвили, А. К. Лиходед, С. Р. Слабоспицкий. Адронное рождение мезонов, содержащих тяжелые кварки // Ядерная Физика. — 1980. — Т. 32. — С. 236.
- [7] С. С. Гернштейн, А. К. Лиходед, С. Р. Слабоспицкий. Инклюзивные спектры очарованных частиц в процессах фоторождения // Ядерная Физика. — 1981. — Т. 34. — С. 227.

- [8] Baier, R. and Ruckl, R. Hadronic Collisions: A Quarkonium Factory // Z.Phys. — 1983. — Vol. C19. — P. 251.
- [9] Fritzsche, Harald. Producing Heavy Quark Flavors in Hadronic Collisions: A Test of Quantum Chromodynamics // Phys.Lett. — 1977. — Vol. B67. — P. 217.
- [10] Halzen, F. Cvc for Gluons and Hadroproduction of Quark Flavors // Phys.Lett. — 1977. — Vol. B69. — P. 105.
- [11] Schuler, Gerhard A. Quarkonium production and decays // CERN-TH-7170-94. — 1994. — hep-ph/9403387.
- [12] Abe, F. et al. Inclusive  $J/\psi$ ,  $\psi(2S)$  and  $b$  quark production in  $\bar{p}p$  collisions at  $\sqrt{s} = 1.8$  TeV // Phys.Rev.Lett. — 1992. — Vol. 69. — P. 3704–3708.
- [13] Abe F. et al. Inclusive  $\chi_c$  and  $b$  quark production in  $\bar{p}p$  collisions at  $\sqrt{s} = 1.8$  TeV // Phys.Rev.Lett. — 1993. — Vol. 71. — P. 2537–2541.
- [14] Abe F. et al. Production of  $J/\psi$  mesons from  $\chi_c$  meson decays in  $p\bar{p}$  collisions at  $\sqrt{s} = 1.8$  TeV // Phys.Rev.Lett. — 1997. — Vol. 79. — P. 578–583.
- [15] Antoniazzi L. et al. A Measurement of J / psi and psi-prime production in 300-GeV/c proton, anti-proton and pi+- nucleon interactions // Phys.Rev. — 1992. — Vol. D46. — P. 4828–4835.
- [16] Antoniazzi L. et al. Production of J / Psi via psi-prime and chi decay in 300-GeV/c proton and pi+- nucleon interactions // Phys.Rev.Lett. — 1993. — Vol. 70. — P. 383–386.

- [17] Antoniazzi L. et al. Production of chi charmonium via 300-GeV/c pion and proton interactions on a lithium target // Phys.Rev. — 1994. — Vol. D49. — P. 543–546.
- [18] Alexopoulos T. et al. Measurement of J / psi, psi-prime and upsilon total cross-sections in 800-GeV/c p - Si interactions // Phys.Lett. — 1996. — Vol. B374. — P. 271–276.
- [19] Koreshev V. et al. Production of charmonium states in  $\pi^-$  Be collisions at 515-GeV/c // Phys.Rev.Lett. — 1996. — Vol. 77. — P. 4294–4297.
- [20] Caswell, W.E. and Lepage, G.P. Effective Lagrangians for Bound State Problems in QED, QCD, and Other Field Theories // Phys.Lett. — 1986. — Vol. B167. — P. 437.
- [21] Lepage, G. Peter and Magnea, Lorenzo and Nakhleh, Charles and Magnea, Ulrika and Hornbostel, Kent. Improved nonrelativistic QCD for heavy quark physics // Phys.Rev. — 1992. — Vol. D46. — P. 4052–4067. — hep-lat/9205007.
- [22] Bodwin, Geoffrey T. and Braaten, Eric and Lepage, G. Peter. Rigorous QCD analysis of inclusive annihilation and production of heavy quarkonium // Phys.Rev. — 1995. — Vol. D51. — P. 1125–1171. — hep-ph/9407339.
- [23] Cho, Peter L. and Leibovich, Adam K. Color octet quarkonia production // Phys.Rev. — 1996. — Vol. D53. — P. 150–162. — hep-ph/9505329.
- [24] Cho, Peter L. and Leibovich, Adam K. Color octet quarkonia production. 2. // Phys.Rev. — 1996. — Vol. D53. — P. 6203–6217. — hep-ph/9511315.

- [25] Abelev B. et al.  $J/\psi$  polarization in  $pp$  collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV // Phys.Rev.Lett. — 2012. — Vol. 108. — P. 082001.
- [26] Aad G. et al. Measurement of the differential cross-sections of inclusive, prompt and non-prompt  $J/\psi$  production in proton-proton collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV // Nucl.Phys. — 2011. — Vol. B850. — P. 387–444.
- [27] Pakhlov P. et al. Measurement of the  $e^+ e^- \rightarrow J/\psi c \bar{c}$  cross section at  $\sqrt{s} = 10.6$ -GeV // Phys.Rev. — 2009. — Vol. D79. — P. 071101.
- [28] Abe F. et al.  $J/\psi$  and  $\psi(2S)$  production in  $p\bar{p}$  collisions at  $\sqrt{s} = 1.8$  TeV // Phys.Rev.Lett. — 1997. — Vol. 79. — P. 572–577.
- [29] Acosta D. et al. Measurement of the  $J/\psi$  meson and  $b$ -hadron production cross sections in  $p\bar{p}$  collisions at  $\sqrt{s} = 1960$  GeV // Phys.Rev. — 2005. — Vol. D71. — P. 032001. — hep-ex/0412071.
- [30] Khachatryan V. et al. Prompt and non-prompt  $J/\psi$  production in  $pp$  collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV // Eur.Phys.J. — 2011. — Vol. C71. — P. 1575. — hep-ex/1011.4193.
- [31] Abdallah J. et al. Study of inclusive  $J/\psi$  production in two photon collisions at LEP-2 with the DELPHI detector // Phys.Lett. — 2003. — Vol. B565. — P. 76–86. — hep-ex/0307049.
- [32] Aaij R. et al. Measurement of  $J/\psi$  production in  $pp$  collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV // Eur.Phys.J. — 2011. — Vol. C71. — P. 1645.
- [33] Adare A. et al. Transverse momentum dependence of  $J/\psi$  polarization at midrapidity in  $p+p$  collisions at  $\sqrt{s} = 200$ -GeV // Phys.Rev. — 2010. — Vol. D82. — P. 012001. — hep-ex/0912.2082.

- [34] Chekanov S. et al. Measurements of inelastic  $J/\psi$  and  $\psi$ -prime photoproduction at HERA // Eur.Phys.J. — 2003. — Vol. C27. — P. 173–188. — hep-ex/0211011.
- [35] Adloff C. et al. Inelastic photoproduction of  $J/\psi$  mesons at HERA // Eur.Phys.J. — 2002. — Vol. C25. — P. 25–39. — hep-ex/0205064.
- [36] Aaron F. et al. Inelastic Production of  $J/\psi$  Mesons in Photoproduction and Deep Inelastic Scattering at HERA // Eur.Phys.J. — 2010. — Vol. C68. — P. 401–420. — hep-ex/1002.0234.
- [37] Butenschoen, Mathias and Kniehl, Bernd A. World data of  $J/\psi$  production consolidate NRQCD factorization at NLO // Phys.Rev. — 2011. — Vol. D84. — P. 051501. — hep-ph/1105.0820.
- [38] Butenschoen, Mathias and Kniehl, Bernd A.  $J/\psi$  production in NRQCD: A global analysis of yield and polarization // Nucl.Phys.Proc.Suppl. — 2012. — Vol. 222-224. — P. 151–161. — hep-ph/1201.3862.
- [39] Bodwin, Geoffrey T. and Braaten, Eric and Eichten, Estia and Olsen, Stephen Lars and Pedlar, Todd K. and others. Quarkonium at the Frontiers of High Energy Physics: A Snowmass White Paper. — 2013. — hep-ph/1307.7425.
- [40] Abulencia A. et al. Measurement of  $\sigma_{\chi_{c2}}\mathcal{B}(\chi_{c2} \rightarrow J/\psi\gamma)/\sigma_{\chi_{c1}}\mathcal{B}(\chi_{c1} \rightarrow J/\psi\gamma)$  in  $p\bar{p}$  collisions at  $\sqrt{s} = 1.96$ -TeV // Phys.Rev.Lett. — 2007. — Vol. 98. — P. 232001. — hep-ex/0703028.
- [41] Aaij R. et al. Measurement of the cross-section ratio  $\sigma(\chi_{c2})/\sigma(\chi_{c1})$  for prompt  $\chi_c$  production at  $\sqrt{s} = 7$  TeV // Phys.Lett. — 2012. — Vol. B714. — P. 215–223. — hep-ex/1202.1080.

- [42] Chatrchyan S. et al. Measurement of the relative prompt production rate of  $\chi(c2)$  and  $\chi(c1)$  in  $pp$  collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV // Eur.Phys.J. — 2012. — Vol. C72. — P. 2251. — hep-ex/1210.0875.
- [43] Aaij R. et al. Measurement of the relative rate of prompt  $\chi_{c0}$ ,  $\chi_{c1}$  and  $\chi_{c2}$  production at  $\sqrt{s} = 7$ TeV // JHEP. — 2013. — Vol. 1310. — P. 115. — hep-ex/1307.4285.
- [44] Aad G. et al. Measurement of  $\chi_{c1}$  and  $\chi_{c2}$  production with  $\sqrt{s} = 7$  TeV  $pp$  collisions at ATLAS // CERN REPORT. — 2013. — ATLAS-CONF-2013-095, ATLAS-COM-CONF-2013-115.
- [45] Chatrchyan S. et al. Measurement of the  $\chi_{c2}/\chi_{c1}$  production cross section ratio in  $pp$  collisions at  $\sqrt{s} = 8$  TeV // CERN REPORT. — 2013. — CMS-PAS-BPH-13-005.
- [46] Aad G. et al. Observation of a new  $\chi_b$  state in radiative transitions to  $\Upsilon(1S)$  and  $\Upsilon(2S)$  at ATLAS // Phys.Rev.Lett. — 2012. — Vol. 108. — P. 152001. — hep-ex/1112.5154.
- [47] Abazov V. M. et al. Observation of a narrow mass state decaying into  $\Upsilon(1S) + \gamma$  in  $p\bar{p}$  collisions at  $\sqrt{s} = 1.96$  TeV // Phys.Rev. — 2012. — Vol. D86. — P. 031103. — hep-ex/1203.6034.
- [48] Aaij R. et al. Observation of the  $\chi_b(3P)$  state at LHCb in  $pp$  collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV // CERN REPORT. — 2012. — LHCb-CONF-2012-020, CERN-LHCb-CONF-2012-020.
- [49] Lutz M. et al. Physics Performance Report for PANDA: Strong Interaction Studies with Antiprotons. — 2009. — hep-ex/0903.3905.



- [50] Bolotin, D.A. and Poslavsky, S.V. Introduction to Redberry: the computer algebra system designed for tensor manipulation. — 2013. — cs.SC/1302.1219.
- [51] Luchinsky, A.V. and Poslavsky, S.V. Inclusive charmonium production at PANDA experiment // Phys.Rev. — 2012. — Vol. D85. — P. 074016. — hep-ph/1110.4989.
- [52] Likhoded, A.K. and Luchinsky, A.V. and Poslavsky, S.V. Production of  $\chi_b$ -mesons at LHC // Phys.Rev. — 2012. — Vol. D86. — P. 074027. — hep-ph/1203.4893.
- [53] Braguta, V.V. and Likhoded, A.K. and Luchinsky, A.V. and Poslavsky, S.V. Analytical calculation of heavy quarkonia production processes in computer // Journal of Physics: Conference Series. — 2014. — Vol. 523, no. 1. — P. 012038. — Proceedings of 15th International Workshop on Advanced Computing and Analysis Techniques in Physics (ACAT2013). hep-ph/1309.3093.
- [54] А.К. Лиходед, А.В. Лучинский, С.В. Пославский. Адронное рождение  $\chi_c$ -мезонов на LHC // Ядерная физика. — 2014. — Т. 77 7. — С. 966 – 973.
- [55] Likhoded, A.K. and Luchinsky, A.V. and Poslavsky, S.V. Hadronic Production of  $\chi_c$ -mesons at LHC. — 2013. — hep-ph/1305.2389.
- [56] Ландау Л. Д. О моменте системы из двух фотонов // ДАН СССР. — 1948. — Т. 60. — С. 207–209.
- [57] Yang C.-N. Selection Rules for the Dematerialization of a Particle Into Two Photons // Phys.Rev. — 1950. — Vol. 77. — P. 242–245.

- [58] Gribov L., Levin E., Ryskin M. Semihard Processes in QCD // Phys.Rept. — 1983. — Vol. 100. — P. 1–150.
- [59] Levin E., Ryskin M. High-energy hadron collisions in QCD // Phys.Rept. — 1990. — Vol. 189. — P. 267–382.
- [60] Catani S., Ciafaloni M., Hautmann F. High-energy factorization and small  $x$  heavy flavor production // Nucl.Phys. — 1991. — Vol. B366. — P. 135–188.
- [61] Baranov S. P. Highlights from the  $k_T$  factorization approach on the quarkonium production puzzles // Phys.Rev. — 2002. — Vol. D66. — P. 114003.
- [62] Baranov S. On the  $\sigma(\chi(c1))/\sigma(\chi(c2))$  ratio in the  $k(t)$ -factorization approach // Phys.Rev. — 2011. — Vol. D83. — P. 034035.
- [63] Kuhn J. H., Kaplan J., Safiani E. G. O. Electromagnetic Annihilation of  $e^+ e^-$  Into Quarkonium States with Even Charge Conjugation // Nucl.Phys. — 1979. — Vol. B157. — P. 125.
- [64] Guberina B., Kuhn J. H., Peccei R., Ruckl R. Rare Decays of the  $Z^0$  // Nucl.Phys. — 1980. — Vol. B174. — P. 317.
- [65] Bodwin G. T., Petrelli A. Order  $v^4$  corrections to  $S$  wave quarkonium decay // Phys.Rev. — 2002. — Vol. D66, no. 3. — P. 094011. — hep-ph/0205210.
- [66] Gastmans R., Troost W., Wu T. T. Production of heavy quarkonia from gluons // Nucl.Phys. — 1987. — Vol. B291. — P. 731.

- [67] Meijer M., Smith J., van Neerven W. Helicity amplitudes for charmonium production in hadron-hadron and photon-hadron collisions // Phys.Rev. — 2008. — Vol. D77. — P. 034014. — hep-ph/0710.3090.
- [68] Klasen M., Kniehl B., Mihaila L., Steinhauser M. Charmonium production in polarized high-energy collisions // Phys.Rev. — 2003. — Vol. D68. — P. 034017. — hep-ph/0306080.
- [69] В.Н. Грибов, Л.Н. Липатов. Глубоконеупругое электрон-протонное рассеяние в теории возмущений. // Ядерная Физика. — 1972. — Т. 15. — С. 781.
- [70] Ю. Л. Докшицер. Вычисление структурных функций для глубоко неупругого рассеяния и  $e e^-$  аннигиляция в теории возмущений квантовой хромодинамики. // ЖЭТФ. — 1977. — Т. 46. — С. 641–653.
- [71] Altarelli G., Parisi G. Asymptotic Freedom in Parton Language // Nucl.Phys. — 1977. — Vol. B126. — P. 298.
- [72] Pumplin J., Stump D., Huston J. et al. New generation of parton distributions with uncertainties from global QCD analysis // JHEP. — 2002. — Vol. 0207. — P. 012. — hep-ph/0201195.
- [73] Whalley M., Bourilkov D., Group R. The Les Houches accord PDFs (LHAPDF) and LHAGLUE. — 2005. — hep-ph/0508110.
- [74] Ebert D., Faustov R., Galkin V. Two photon decay rates of heavy quarkonia in the relativistic quark model // Mod.Phys.Lett. — 2003. — Vol. A18. — P. 601–608. — hep-ph/0302044.

- [75] Kang Z.-B., Qiu J.-W., Sterman G. Heavy quarkonium production and polarization // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Mar. — Vol. 108. — P. 102002.
- [76] Bondar A., Chernyak V. Is the BELLE result for the cross section  $\sigma(e^+ e^- \rightarrow J/\psi + \eta(c))$  a real difficulty for QCD? // *Phys.Lett.* — 2005. — Vol. B612. — P. 215–222. — hep-ph/0412335.
- [77] Abe K. et al. Observation of double  $c$  anti- $c$  production in  $e^+ e^-$  annihilation at  $s^{*1/2}$  approximately 10.6-GeV // *Phys.Rev.Lett.* — 2002. — Vol. 89. — P. 142001. — hep-ex/0205104.
- [78] Braguta V., Likhoded A., Luchinsky A. Leading twist distribution amplitudes of P-wave nonrelativistic mesons // *Phys.Rev.* — 2009. — Vol. D79. — P. 074004. — hep-ph/0810.3607.
- [79] Braguta V., Likhoded A., Luchinsky A. Study of exclusive processes  $e^+ e^- \rightarrow VP$  // *Phys.Rev.* — 2008. — Vol. D78. — P. 074032. — hep-ph/0808.2118.
- [80] Kwong W., Mackenzie P. B., Rosenfeld R., Rosner J. L. Quarkonium annihilation rates // *Phys. Rev. D.* — 1988. — Jun. — Vol. 37. — P. 3210–3215.
- [81] Munz C. R. Two photon decays of mesons in a relativistic quark model // *Nucl.Phys.* — 1996. — Vol. A609. — P. 364–376. — hep-ph/9601206.
- [82] Anisovich V., Dakhno L., Matveev M. et al. Quark-antiquark states and their radiative transitions in terms of the spectral integral equation. I. Bottomonia // *Phys.Atom.Nucl.* — 2007. — Vol. 70. — P. 63–92. — hep-ph/0510410.

- [83] Wang G.-L. Annihilation Rate of  $2^{++}$  Charmonium and Bottomonium // *Phys.Lett.* — 2009. — Vol. B674. — P. 172–175. — hep-ph/0904.1604.
- [84] Li B.-Q., Chao K.-T. Bottomonium Spectrum with Screened Potential // *Commun.Theor.Phys.* — 2009. — Vol. 52. — P. 653–661. — hep-ph/0909.1369.
- [85] Hwang C.-W., Guo R.-S. Two-photon and two-gluon decays of p-wave heavy quarkonium using a covariant light-front approach // *Phys.Rev.* — 2010. — Vol. D82. — P. 034021. — hep-ph/1005.2811.
- [86] K. Nakamura et al. (Particle Data Group). Review of particle physics // *Journal of Physics G.* — 2010. — Vol. 37. — P. 075021.
- [87] Likhoded A., Luchinsky A. Charmonium production in hadronic experiments at the energy 70- GeV // *Phys.Atom.Nucl.* — 2008. — Vol. 71. — P. 294–308. — hep-ph/0703091.
- [88] Sjostrand T., Mrenna S., Skands P. Z. PYTHIA 6.4 Physics and Manual // *JHEP.* — 2006. — Vol. 0605. — P. 026. — hep-ph/0603175.
- [89] Sjostrand T., Mrenna S., Skands P. Z. A Brief Introduction to PYTHIA 8.1 // *Comput.Phys.Commun.* — 2008. — Vol. 178. — P. 852–867. — hep-ph/0710.3820.
- [90] Lange D. The EvtGen particle decay simulation package // *Nucl.Instrum.Meth.* — 2001. — Vol. A462. — P. 152–155.
- [91] Maple Inc. Maple Physics package. — URL: [www.maplesoft.com](http://www.maplesoft.com).
- [92] J. Martin-Garcia. The xAct package. — URL: [www.xact.es](http://www.xact.es).

- [93] Peeters K. Introducing Cadabra: A Symbolic computer algebra system for field theory problems. — 2007. — hep-th/0701238.
- [94] Peeters K. Cadabra: a field-theory motivated symbolic computer algebra system // Comput.Phys.Commun. — 2007. — apr. — Vol. 176. — P. 550–558. — arXiv:cs/0608005.
- [95] SymPy Development Team. — SymPy: Python library for symbolic mathematics, 2010. — URL: [www.sympy.org](http://www.sympy.org).
- [96] Bauer C., Frink A., Kreckel R. Introduction to the ginac framework for symbolic computation within the c++ programming language // Journal of Symbolic Computation. — 2002. — Vol. 33, no. 1. — P. 1 – 12.
- [97] Vollinga J. GiNaC: Symbolic computation with C++ // Nucl.Instrum.Meth. — 2006. — Vol. A559. — P. 282–284. — hep-ph/0510057.
- [98] А. В. Королькова, Д. С. Кулябов, Л. А. Севастьянов. Тензорные расчеты в системах компьютерной алгебры // Программирование. — 2013. — Т. 39, № 3. — С. 135–142.
- [99] Pronin P. I., Stepanyantz K. V. One loop counterterms for the dimensional regularization of arbitrary lagrangians // Nucl.Phys. — 1997. — Vol. B485. — P. 517–544. — hep-th/9605206.
- [100] Pronin P., Stepanyantz K. New Tensor Package for REDUCE system // New Computation Technique in Physics Research / Ed. by B.Denby, D.Perred-Gallix. — Vol. 4. — Word Scientific, Singapore, 187, 1995.

- [101] Brambilla, N. and Eidelman, S. and Heltsley, B.K. and Vogt, R. and Bodwin, G.T. and others. Heavy quarkonium: progress, puzzles, and opportunities // Eur.Phys.J. — 2011. — Vol. C71. — P. 1534. — hep-ph/1010.5827.