Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Факультет общей и прикладной физики
Институт физики высоких энергий

Фермионный мультиплет в модели теории Великого Объединения

Выпускная квалификационная работа
на степень бакалавра студента 723 гр.
Шакирова В. В.

Научный руководитель:
д.ф-м.н. Киселёв Валерий Валерьевич

Москва
2011

CONTENTS

I. Введение 3

II. Одно поколение 6

A. Стандартная модель: киральные фермионы и скаляр Хиггса 6

B. Квантование заряда 7

C. Суперсимметрия 8

D. Массы нейтрино 9

E. Вакуум 11

F. Мультиплет E_6 12

III. Три поколения 14

A. Гауджино E_6 14

B. Горизонтальная симметрия поколений 14

C. Механизм иерархии 15

D. Суперсимметрия 16

IV. Заключение 17

A. Смешивание зеркальных нейтрино 19

Список литературы 20

I. Введение

В рамках локальной квантовой теории поля идея теории Великого объединения калибровочных взаимодействий (GUT) логически опирается на три факта [1, 2]:

1. известные фермионы — киральные поля,
2. сумма электрических зарядов этих фермионов (кварков и лептонов) в каждом поколении равна нулю,
3. ренормгрупповая эволюция констант связи электрослабого и сильного взаимодействий (калибровочная группа Стандартной модели $G_{\rm EW} = U_Y(1) \times SU(2)_L \times SU_c(3)$) приводит почти к точному равенству этих трех “бегущих” зарядов друг другу на масштабе “объединения” $\Lambda_{\rm GUT}$ порядка 10^{16} ГэВ, выше которого становится существенным учет распространения тяжелых полей и таким образом восстанавливается исходная калибровочная симметрия с единым зарядом.

Согласно структуре калибровочной группы $G_{\rm EW}$ физические поля имеют 4 независимых квантовых числа: гиперзаряд Y, проекцию электрослабого изоспина для левых дублетов и правых синглетов T_3 и цветовые аналоги «изоспина» λ_3^c и «странности» λ_8^c, что задает ранг группы, равный 4. При Великом объединении число квантовых чисел не может уменьшиться, так что ранг группы Великого объединения не может быть меньше 4. Однако, введение единой константы взаимодействия предполагает, что группа GUT простая, а значит сумма квантовых чисел в мультиплете должна быть равна нулю (след генератора простой неабелевой группы равен нулю), что в точности дает указанное нами выше свойство 2, а согласно пункту 1 в этой схеме сама группа должна допускать невещественные представления, отвечающие киральным полям.

При этом отношения зарядов в мультиплете целиком определяются структурой группы, а значит, имеет место квантование, например, электрического заряда фермионов. Подчеркнем, что должно существовать такое представление группы, в которое включены только известные заряженные фермионы, так как добавление новых заряженных фермионов в такое представление повлекло бы за собой и произвол в квантовании электрического заряда, если только сумма зарядов дополнительных фермионов не равна нулю. Но в последнем случае можно говорить, что и дополнительные фермионы образуют неприводимое представление той группы, которая обеспечивает квантование заряда известных фермионов. В этом смысле актуальной была задача нахождения простой группы с минимальным допустимым рангом, отвечающей квантованию заряда киральных полей фермионов Стандартной модели. Эта задача была успешно решена [1]: группа квантования заряда — $SU(5)$, она имеет минимально допустимый ранг, равный 4, а известные фермионы Стандартной модели распределены в ней по двум фундаментальным представлениям – квинтету и декуплету левых полей[1] (формулировка с двумя сопряженными к этим фундаментальными представлениями является эквивалентной).

Далее в разделе II мы резюмируем свойства исходного набора киральных полей Стандартной модели и распространяем действие группы квантования заряда на хиггсовский бозонный сектор Стандартной модели, обеспечивающий естественное введение дираковских масс кварков и заряженных лептонов при спонтанном нарушении симметрии вакуумным состоянием скалярного поля, а также включаем в рассмотрение суперсимметрию, что делает необходимым добавление в мультиплет представления группы теории Великого объединения киральных суперпартнеров хиггсовских полей, заряды которых также однозначно квантуются. Затем мы обсуждаем необходимость введения механизма, обеспечивающего требуемый масштаб масс для нейтрино, как это следует из феноменологии: единственный способ связать масштаб нарушения электрослабой симметрии с массой нейтрино — это смешивание синглетного по электрослабой группе нейтрино с нейтральной майорановской тяжелой частицей, что завершает формирование мультиплета калибровочной группы для одного поколения, фундаментального представления группы E_6, для которого однозначно определены квантовые числа всех компонент.

В разделе III мы рассматриваем n_g поколений киральных фермионов группы E_6 в качестве компонент одного мультиплета с майорановскими суперпартнерами калибровочных векторных полей E_6, т.е. с гауджино. При этом суперсимметрия требует включить в этот мультиплет n_g сопряженных фундаментальных представлений группы E_6 для киральных полей, для того чтобы обеспечить их объединение с майорановскими гауджино из присоединенного представления E_6, т.е. для объединения этих полей в одном расширенном самосопряженном представлении. Более того, эквивалентность поколений киральных полей означает, по сути, введение унитарных преобразований самих поколений, и следовательно, в окончательную группу теории Великого объединения необходимо включить «горизонтальную» симметрию поколений $SU_H(n_g)$, а майорановские суперпартнеры калибровочных векторных бозонов $SU_H(n_g)$, которые являются синглетами по группе E_6, как и калибровочные бозоны горизонтальной симметрии, также добавить в мультиплет фермионов. При этом нужно учесть, что гауджино группы E_6 — синглеты по группе «горизонтальных» преобразований поколений фермионов. Оказывается, что фермионный мультиплет с указанными свойствами существует и он единственный, причем $n_g = 3$, а группа симметрии — это исключительная группа E_8. Затем мы обсуждаем свойства окончательной теории Великого объединения.

С другой стороны, в рамках теории суперструн феноменология юкавского сектора Стандартной модели указывает на выделенность специфического способа компактификации дополнительных измерений — F-теории [3–5] с двумя иерархическими масштабами энергии $\Lambda \ll M$, где M — струнный планковский масштаб, а Λ — шкала GUT. В этой теории также делается вывод об уникальной роли группы E_8 [6].

---

[1] В этом случае гиперзаряд Y пропорционален одному из картановских генераторов группы $SU(5)$, а коэффициент легко вычисляется из одинакового условия нормировки генераторов группы – суммы квадратов зарядов в мультиплете, что является существенным при выводе утверждения о равенстве “бегущих” констант взаимодействия на масштабе объединения (основное содержание пункта 3).

Таким образом, нам удается построить, на наш взгляд, единственно верное решение задачи нахождения группы великого объединения и ее фермионного мультиплета, исходя из уже имеющихся данных феноменологии и требования суперсимметрии. Это решение перекликается с упомянутой нами схемой в рамках модели суперструн, но, как мы покажем, оно существенно отличается от подобных моделей, поскольку в фундаментальный мультиплет калибровочной группы включены состояния с планковской массой, в отличии от мультиплетов, мотивированных суперструными, когда мультиплет образуют легкие субпланковские состояния. При этом мы оставляем за рамками рассмотрения механизм нарушения калибровочной симметрии и суперсимметрии.

II. Одно поколение

Следуя принципам, обозначенным во Введении, проведем детальное рассмотрение логического построения мультиплета киральных фермионных полей для одного поколения Стандартной модели.

A. Стандартная модель: киральные фермионы и скаляр Хиггса

Наблюдаемые лептоны и кварки Стандартной модели образуют набор левых киральных спиноров слабых дублетов и синглетов по группе $SU(2)_L$:

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix}\nu \\ e\end{pmatrix}_L,\ e^c_L, \\ \begin{pmatrix}u \\ d\end{pmatrix}_L,\ u^c_L,\ d^c_L,\end{gathered} \tag{1}$$

где верхний индекс "c" относится к зарядово сопряженным частицам, т.е. античастицам. Скалярное поле Хиггса — слабый дублет:

$$\begin{pmatrix}H^0 \\ H^-\end{pmatrix}, \tag{2}$$

который несет нулевые лептонное и барионное числа

$$B[H] = L[H] = 0.$$

Дираковские массы заряженных лептонов и кварков задаются матрицами для киральных спиноров, так что, например, для электрона

$$(e, e^c)_L \begin{pmatrix}0 & m_e \\ m_e & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}e \\ e^c\end{pmatrix}_L, \tag{3}$$

где двухкомпонентные индексы киральных спиноров сворачиваются посредством спинорной метрики — полностью антисиметричного тензора второго ранга, тензора Леви-Чивита. При этом сами массы возникают в результате спонтанного нарушения исходной калибровочной группы $G_{\rm EW}$ за счет вакуумного среднего нейтральной компоненты хиггсовского поля $\langle H^0\rangle = v/\sqrt{2}$ и юкавского, контактного, калибровочно инвариантного взаимодействия скаляра Хиггса с фермионами, так что $m_e = \lambda_e\langle H^0\rangle$.

При этом важно отметить, что наблюдаемая иерархия масс трех известных поколений фермионов: два поколения существенно легче третьего, — естественно может объясняться *единственным* масштабом энергии – вакуумным средним хиггсовского скаляра. В самом деле, введение для дираковских спиноров ψ_α, отличающихся по своим квантовым числам только номером поколения $\alpha = \{1, 2, 3\}$, симметричной, «демократической» по индексу поколений массовой матрицы в соответствующем члене лагранжиана $\mathcal{L}_M$ с единой константой λ в виде

$$\mathcal{M}_D = \lambda\,\langle H^0\rangle \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \ \mapsto\ \mathcal{L}_M = \bar\psi\,\mathcal{M}_D\psi, \tag{4}$$

приводит к двум безмассовым поколениям и одному тяжелому, в то время как малые поправки к симметрии «демократии» поколений обусловливают возможность описания спектра масс заряженных лептонов и кварков с использованием механизма «seesaw» [7], т.е. малого смешивания с тяжелым состоянием, но, что важно, без введения новых физических масштабов, ответственных за различие масс, например, электрона, мюона и τ-лептона.

В случае кварков эти же поправки к массовой матрице «демократического» типа обусловливают и формирование матрицы смешивания слабых заряженных токов – матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскава, которая, как следствие, также обладает иерархией, поскольку она формируется как раз матрицами перехода от исходного базиса кварковых полей к базису физических, массивных состояний для поколений с разными значениями слабого изоспина, а эти матрицы несут на себе все указанные нами свойства симметрии поколений в юкавском секторе теории, а значит, также не требуют введения дополнительных энергетических масштабов за исключением вакуумного среднего хиггсовского поля.

Ситуация с массами существенно изменяется при рассмотрении феноменологии нейтрино, поскольку максимально возможная масса нейтрино ограничена условием $m_\nu < 0.2$ эВ [2], а значит, аналогичный механизм генерации масс у поколений нейтрино предполагает, что исходная юкавская константа для матрицы дираковских масс «демократического» типа должна быть на двенадцать порядков меньше, чем такая же константа у заряженных лептонов, что явно говорит о существенном различии в механизме генерации масс у заряженных и нейтральных частиц[2]. Таким образом, нейтрино привносят необходимость модификации теории генерации масс за счет введения дополнительного масштаба энергии[3], причем наивное введение низкоэнергетического масштаба вступает в противоречие с феноменологией, поскольку кроме масс нейтрино не наблюдаются какие-либо необычные для Стандартной модели явления с энергиями, существенно ниже масштаба нарушения электрослабой симметрии, что свидетельствует о том, что малый масштаб не связан с низкоэнергетической динамикой, а является производным от высокоэнергетической динамики, явления которой еще не наблюдаются при энергиях порядка вакуумного среднего хиггсовского поля. Тем не менее, механизм «seesaw» и в этом секторе теории позволяет сделать шаг в выводе структуры теории Великого объединения (см. раздел II D), однако при этом связь масс с вакуумными средними предполагает введение дополнительного нейтрального поля с новым масштабом его среднего, что и будет явно сделано чуть ниже.

B. Квантование заряда

Как мы уже упоминали во Введении, решение задачи квантования электрического заряда фермионных полей Стандартной модели — группа объединения $SU(5)$, причем поля распределены по

[2] Различие юкавских констант «демократической» симметрии поколений у кварков и заряженных лептонов ограничено двумя порядками вариации, что вполне может объясняться, например, ренормгрупповой эволюцией этих констант от масштаба истинной «демократии», где эти константы имеют один порядок величины, до масштаба нарушения электрослабой симметрии, так как ренормгрупповые уравнения зависят от квантовых чисел, которые отличаются у кварков и лептонов и зависят от проекции слабого изоспина у этих полей.

[3] Одного или нескольких.

фундаментальным представлениям, так что антиквинтет $\bar{\mathbf{5}}$ —

$$\begin{pmatrix} d^c \\ \nu \\ e \end{pmatrix}_L , \tag{5}$$

а декуплет $\mathbf{10}$ составлен из u, d, u^c, e^c в виде антисимметричной матрицы 5×5 (см. обзор по теории групп в [8]).

Из вида антиквинтета следует, что в число калибровочных бозонов $SU(5)$ входят векторные лептокварки, переводящие лептоны в d^c-антикварки. Если теперь считать, что эта же группа отвечает за квантование заряда скалярных хиггсовских бозонов, то мы приходим к выводу, что скаляры Хиггса с необходимостью формируют антиквинтет $\bar{\mathbf{5}}$:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}^c \\ H^0 \\ H^- \end{pmatrix} , \tag{6}$$

с цветным антитриплетным скалярным лептокварком $\mathcal{K}^c$, обладающим зарядом $Q = \frac{1}{3}$, лептонным числом $L = -1$ и барионным числом $B = -\frac{1}{3}$, поскольку этот скалярный антиквинтет взаимодействует с теми же калибровочными векторными бозонами, что и киральный антиквинтет[4].

C. Суперсимметрия

Вполне естественно предположить, что окончательная теория Великого объединения является суперсимметричной. Тогда фермионы и хиггсовские бозоны являются компонентами киральных суперполей, включающих в себя соответствующие суперпартнеры этих частиц Стандартной модели (см. учебник [9]). Новое квантовое число – R-четность – позволяет ввести маркер для частиц и их суперпартнеров: частицам приписывается $R = +1$, а их суперпартнерам — отрицательная R-четность.

В терминах киральных суперполей суперсимметричный лагранжиан их взаимодействия строится как полином третьей степени, причем массовый член для полей с положительной и отрицательной проекцией слабого изоспина возникает лишь при введении двух хиггсовских скаляров с сопряженными квантовыми числами

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}^c \\ H_u^0 \\ H^- \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} \mathcal{K} \\ H^+ \\ H_d^0 \end{pmatrix} . \tag{7}$$

Это явное следствие суперсимметрии лагранжиана в виде удвоения числа хиггсовских скаляров обусловлено также необходимостью сокращения треугольной квантовой аномалии для киральных

---

[4] Если не использовать аргумент о переходах между компонентами фермионного и скалярного антиквинтета за счет излучения калибровочных бозонов с идентичными квантовыми числами, то триплетное поле $\mathcal{K}$ может иметь другие значения лептонного и баронного чисел.

токов: введение фермионного суперпартнера только для хиггсовского бозона Стандартной модели приводит к дополнительному вкладу этого суперпартнера в треугольную диаграмму и, как следствие, к квантовой аномалии, в то время как сопряженный по квантовым числам фермионный суперпартнер сокращает эту аномалию.

В итоге, киральный сектор следует расширить за счет добавления суперпартнеров хиггсовских частиц, т.е. антиквинтетом $\bar{\mathbf{5}}$ и квинтетом $\mathbf{5}$ по отношению к $SU(5)$:

$$\begin{pmatrix} \varkappa^c \\ \chi_u^0 \\ \chi^- \end{pmatrix}_L \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \varkappa \\ \chi^+ \\ \chi_d^0 \end{pmatrix}_L , \tag{8}$$

с отрицательной R-четостью.

D. Массы нейтрино

Как мы уже говорили во Введении, наблюдаемая шкала масс нейтрино не является истинно фундаментальной, этот масштаб — производный от динамически обусловленных факторов, т.е. массы нейтрино могут быть вычислены в терминах высокоэнергетических масштабов и их отношений. При этом первичные масштабы энергий естественно возникают в динамике калибровочной теории.

Так, дираковский тип массы m_D связан с нарушением электрослабой симетрии, и $m_D \sim v \sim 10^2$ ГэВ, так что эта масса нарушает слабый изоспин, но она сохраняет лептонное и барионное числа, а также R-четность. Следовательно, нейтрино могли бы приобретать массу дираковского типа при введении электрослабого левокирального синглетного антинетрино ν_L^c (лептонное число $L = -1$, R-четность как у обычной материи $R = +1$, и конечно, барионное число $B = 0$). Однако, одного дираковского вклада в массу нейтрино недостаточно, для того чтобы получить необходимый масштаб массы нейтрино.

Массовый член майорановского типа предполагает сохранение электрослабой симметрии за счет нулевых электрослабых зарядов у майорановской частицы, т.е. майорановская компонента ν_S должна быть синглетом по отношению к группе электрослабой симметрии. Более того квадратичный по ν_S вклад должен сохранять как лептонное, так и барионное числа. Значит, майорановская компонента — это стерильная частица с нулевыми лептонным и барионным числами (стерино), в то время как ее связь с нейтрино $\{\nu_L, \nu_L^c\}$ при условии сохранения R-четности приводит к $R[\nu_S] = +1$ и дает нулевые константы смешивания с нейтральными компонентами суперпартнеров хиггсовских частиц χ_u^0 и χ_d^0, поскольку их R-четность отрицательна.

Отсюда следует, что массовая матрица нейтрино — это матрица 3×3 для компонент $\{\nu_L, \nu_L^c, \nu_S\}$ вида

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & m_D & 0 \\ m_D & 0 & \Lambda \\ 0 & \Lambda & M \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где m_D — масса дираковского типа, майорановская масса обозначена символом M, а масштаб Λ определяет смешивание между синглетным по электрослабой группе антинейтрино ν_L^c и стерино ν_S.

Этот механизм, следовательно, предполагает явное нарушение лептонного числа[5] на масштабе Λ, поэтому естественно считать, что $\Lambda \sim \Lambda_{\rm GUT}$, ибо Великое объединение калибровочных взаимодействий сводит лептоны и кварки в один мультиплет и делает их неразличимыми при калибровочных преобразованиях, а значит, и нарушение лептонного числа, вероятнее всего, связано с динамическим масштабом нарушения симметрии группы Великого объединения.

Что касается члена майорановской массы с масштабом M, то за счет него нет нарушения квантовых чисел, входящих в заряды Стандартной модели и маркирующих лептоны и барионы, что может указывать на связь с более универсальными динамическими характеристиками, как то нарушение локальной суперсимметрии, т.е. супергравитации. Поэтому в качестве рабочей гипотезы можно полагать, что M имеет масштаб, характерный для гравитации, т.е. порядка планковской массы $m_{\rm Pl}$. Это означает, что рассматриваемый нами механизм введения малого масштаба масс нейтрино приводит к теории великого объединения, существенно отличной от моделей, инспирированных теорией суперструн, когда фермионный мультиплет великого объединения составляют частицы с массами, масштаб которых сравним с энергией великого объединения или существенно меньше этой энергии, поскольку рассматриваются частицы низкоэнергетического сектора спектра, а поля с массами планковского масштаба относятся к спектру возбуждений суперструны. В нашей же конструкции стерино, а также ряд других полей, которые будут рассмотрены ниже, явно относятся к сектору частиц с планковским масштабом масс.

Собственные значения матрицы (9) и отвечающие им квантовые состояния можно легко вычислить, предполагая иерархию масштабов m_D, Λ и M. В самом деле, полагая параметры матрицы вещественными, совершим сначала поворот для двух тяжелых состояний на угол θ_{23}, удовлетворяющий условию

$$\tan 2\theta_{23} = \frac{2\Lambda}{M}, \tag{10}$$

с помощью матрицы

$$U_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $c_{23} = \cos\theta_{23}$, $s_{23} = \sin\theta_{23}$, так что массовая матрица принимает вид

$$\mathcal{M}_{23} = U_{23}^\dagger \cdot \mathcal{M} \cdot U_{23} \approx \begin{pmatrix} 0 & m_D & m_D\,\frac{\Lambda}{M} \\ m_D & -\Lambda\,\frac{\Lambda}{M} & 0 \\ m_D\,\frac{\Lambda}{M} & 0 & M + \Lambda\,\frac{\Lambda}{M} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

[5] Если приписать стерино ненулевое лептонное число, такое же как и у левого дублетного по электрослабой группе нейтрино, то смешивание стерино с синглетным антинейтрино сохрало бы лептонное число, но оно тогда нарушалось бы при введении майорановской массы стерино, которое, таким образом, переставало бы быть истинно майорановским.

где мы использовали малость отношения $\Lambda/M \ll 1$, откуда

$$\sin\theta_{23} \approx \frac{\Lambda}{M}, \qquad \cos\theta_{23} \approx 1 - \frac{\Lambda^2}{2M^2}.$$

Матрица (12) допускает рассмотрение в рамках стационарной теории возмущений, так что с учетом иерархии масштабов и определения композитной шкалы $\Lambda_X = \Lambda^2/M \gg m_D$ находим

$$m_1 \approx \frac{m_D^2}{\Lambda_X}, \quad m_2 \approx \Lambda_X - m_1, \quad m_3 \approx M - \Lambda_X, \tag{13}$$

где мы специально показали ведущие поправки к массам тяжелых нейтрино, чтобы продемонстрировать корректную связь с исходным значением следа массовой матрицы $\mathrm{tr}\mathcal{M} = M$. Имеет место иерархия масс

$$m_1 \ll m_2 \ll m_3.$$

В проведенной нами схеме расчета собственных значений массовой матрицы нейтрино легко найти и выражения для собственных состояний:

$$\begin{aligned} |\nu_3\rangle &\approx s_{23}|\nu_L^c\rangle + c_{23}|\nu_S\rangle + \frac{m_D\Lambda}{M^2}\,|\nu_L\rangle, \\ |\nu_2\rangle &\approx c_{23}|\nu_L^c\rangle - s_{23}|\nu_S\rangle - \frac{m_D}{\Lambda_X}\,|\nu_L\rangle, \\ |\nu_1\rangle &\approx |\nu_L\rangle + \frac{m_D}{\Lambda_X}\,(c_{23}|\nu_L^c\rangle - s_{23}|\nu_S\rangle). \end{aligned} \tag{14}$$

Отсюда ясно, что легчайшее нейтрино практически является левым нейтрино Стандартной модели, но имеет примесь как правого антинейтрино, так и стерино.

Для численных оценок положим $m_D \sim 10^2$ ГэВ, как это и следует ожидать согласно известному масштабу нарушения электрослабой симметрии, а также примем для массы нейтрино $m_1 \sim 10^{-2}$ эВ, откуда находим $\Lambda_X \sim 10^{15}$ ГэВ. Тогда при $M \sim 10^{19}$ ГэВ получаем $\Lambda \sim 10^{17}$ ГэВ, что вполне согласуется с характерной величиной масштаба нарушения симметрии в теории великого объединения. Следовательно, нарушение лептонного числа в выражении для массивного нейтрино (14) имеет амплитуду порядка 10^{-13}.

E. Вакуум

При спонтанном нарушении калибровочной симметрии массы киральных фермионов генерируются за счет вакуумных средних скалярных полей, которые в рассматриваемом нами случае с сохранением электрического заряда возникают только для электрически нейтральных полей. При этом вакуум может нести ненулевые заряды, сохранение которых он нарушает. Если предполагать, что R-четность сохраняется, то

$$Q[\mathrm{vac}] = L[\mathrm{vac}] = B[\mathrm{vac}] = 0, \quad R[\mathrm{vac}] = +1, \tag{15}$$

в то время как слабый изоспин $T_3[\mathrm{vac}] = \pm\frac{1}{2}$ нарушен за счет конденсатов хиггсовских полей $\langle H_u^0\rangle = v_u$ и $\langle H_d^0\rangle = v_d$.

Далее, нейтральными являются скалярные суперпартнеры дублетного нейтрино, синглетного антинейтрино и стерино, т.е. частицы $\{\tilde{\nu}_L,\, \tilde{\nu}^c_L,\, \tilde{\nu}_S\}$. Вакуумному среднему терино $\langle\tilde{\nu}_S\rangle$ можно было бы сопоставить стерильный масштаб M, который входит в массовую матрицу нейтрино, но терино как суперпартнер обычной частицы обладает отрицательной R-четностью, а это значит, что матрица масс нейтрино при условии спонтанного нарушения симметрии предполагает и введение сопряженного по R-четности поля для стерино и его суперпартнера, а следовательно и сопряженного, зеркального мультиплета для всего набора полей одного поколения, если считать, что при спонтанном нарушении R-четность сохраняется.

Вакуумное среднее анти-снейтрино $\langle\tilde{\nu}^c_L\rangle$ нарушает только лептонное число и отвечает масштабу Λ с теми же оговорками о R-четности, что и в предыдущем абзаце.

Введение ненулевого вакуумного среднего для снейтрино $\langle\tilde{\nu}_L\rangle$ нарушало бы как слабый изоспин, так и лептонное число, а следовательно, оно, вообще говоря, приводило бы к матричному элементу смешивания стерино и нейтрино $\mathcal{M}_{13}$ (и $\mathcal{M}_{31}$) в (9). Для простоты и определенности мы рассматриваем сейчас вариант с нулевым средним снейтрино, хотя его введение означает существование дополнительного источника нарушения электрослабой симметрии, который не проявляет себя при низких энергиях.

Проведенное перечисление допустимых вакуумных средних позволяет поставить вопрос о массах суперпартнеров хиггсовских частиц: сразу становится ясно, что триплетные хиггсино $\{\varkappa, \varkappa^c\}$ могут быть только сверхтяжелыми за счет масштаба M, поскольку их массовый член не нарушает ни слабый изоспин, ни лептонное число. Казалось бы, введение масс дублетных хиггсино также должно следовать тому же аргументу, но тогда становится проблематичным введение шкалы нарушения электрослабой симметрии, которая при наличии суперсимметрии органически связана с масштабом смешивания нейтральных полей $\{H^0_u, H^0_d\}$ и их суперпартнеров за счет μ-члена в лагранжиане суперполей. Это — известная проблема расщепления масс между триплетными по цвету и дублетными по электрослабому изоспину состояниями хиггсовского поля, которая не только сводится к иерархии масштабов, но оказывается существенной при рассмотрении времени жизни протона, поскольку легкие триплетные хиггсовские лептокварки исключены экспериментальными ограничениями на распад протона. Однако механизм иерархии масштабов нарушения электрослабой симметрии и калибровочной группы Великого объединения, $v \ll \Lambda$, может быть естественно введен при наличии нескольких поколений фермионов, что мы обсуждаем в разделе III.

F. Мультиплет E_6

Итак, суммируя описанные нами выше компоненты, необходимые для построения кирального мультиплета одного поколения, мы получаем квантованный по заряду **27**-плет:

1. лептоны e_L, e^c_L, ν_L, ν^c_L (4 компоненты),
2. стерино ν_S (1 компонента),
3. триплетные по цвету лептокварковое хиггсино $\varkappa$, дублетные по слабому изоспину χ^0_u, χ^- и сопряженные к ним хиггсино (10 компонент),

4. цветнфе кварки u_L, u_L^c, d_L, d_L^c (12 компонент).

Такой набор в точности и единственным образом отвечает неприводимому фундаментальному представлению группы E_6 [8]. Примечательно, что эта группа не имеет киральных аномалий.

III. Три поколения

Дальнейшее объединение фермионов в окончательной теории Великого объединения должно учитывать как существование нескольких поколений фермионов Стандартной модели, так и суперпартнеров калибровочных бозонов группы E_6 — гауджино.

A. Гауджино E_6

В суперсимметричной теории гауджино преобразуются по присоединенному представлению группы симметрии и являются майорановскими частицами, так что для E_6 имеется **78**-плет гауджино [8]. Поэтому объединение гауджино в один мультиплет с киральными фермионами фундаментального представления группы E_6, с **27**-плетом, требует построения расширенного самосопряженного мультиплета, а значит, введения сопряженного кирального фундаментального представления группы E_6, $\overline{\mathbf{27}}$-плета. Только при таком расширении возможно самосопряжение мультиплета. Такой сопряженный фундаментальный мультиплет по группе E_6 логично назвать «зеркальной» материей. Каждое поколение фермионов Стандартной модели при построении окончательной теории Великого объединения сопровождается поколением зеркальной материи.

B. Горизонтальная симметрия поколений

Если на время отвлечься от юкавского сектора теории, ответственного за введение масс фермионов и смешивания их токов, то с точки зрения калибровочной группы преобразований наблюдаемые поколения ферминов совершенно эквивалентны друг другу, а значит, можно ввести калибровочную симметрию поколений, которая унитарным образов смешивает поколения, т.е., как говорят, «горизонтальную» группу симметрии — группу унитарных вращений поколений $SU_H(n_g)$, где n_g — число поколений, т.е. фундаментальных представлений группы E_6, которое не меньше 3.

Калибровочные бозоны горизонтальной симметрии являются синглетами по группе E_6. Майорановские суперпартнеры этих калибровочных бозонов следует включить в мультиплет окончательной теории Великого объединения. Их число равно $n_g^2 - 1$.

Наконец, гауджино группы E_6 не несут на себе квантовых чисел поколений, т.е. являются синглетами по группе горизонтальной симметрии.

Таким образом, самосопряженный мультиплет окончательной теории Великого объединения включает в себя

- n_g фундаментальных представлений группы E_6 и n_g сопряженных им представлений зеркальной материи,
- $n_g^2 - 1$ самосопряженных гауджино горизонтальной симметрии, синглетных по E_6,
- синглетные по группе горизонтальной симметрии гауджино группы E_6.

В итоге, разложение мультиплета теории по прямому произведению групп горизонтальной симметрии и симметрии одного поколения $SU_H(n_g) \times E_6$ должно иметь вид

$$(\boldsymbol{n}_g, \mathbf{27}) + (\bar{\boldsymbol{n}}_g, \overline{\mathbf{27}}) + (\mathbf{1}, \mathbf{78}) + (\boldsymbol{n_g^2} - \mathbf{1}, \mathbf{1}).$$

Интересно, что существует только единственная простая группа с таким разложением неприводимого мультиплета при $n_g > 1$, это — исключительная группа E_8 [8], причем $n_g = 3$, так что $\mathrm{E}_8 \supset \mathrm{SU}(3) \times \mathrm{E}_6$, а фундаментальное представление наименьшей размерности — это самосопряженный **248**-плет [8]:

$$\mathbf{248} = (\mathbf{3}, \mathbf{27}) + (\bar{\mathbf{3}}, \overline{\mathbf{27}}) + (\mathbf{1}, \mathbf{78}) + (\mathbf{8}, \mathbf{1}). \tag{16}$$

Значит, приведенная нами логика построения окончательной теории Великого объединения приводит к уникальному результату — группе E_8. Неотъемлемым атрибутом такого построения является введение зеркальных поколений материи и хиггсовских частиц. Причем, отметим, что условие сохранения R-четности может приводить, например, к тому, что массовые члены в секторе материи генерируются за счет вакуумных средних скалярных частиц в зеркальном секторе, что, впрочем, не изменяет обоснованность изложенной нами логики построения мультиплета фермионных полей в теории Великого объединения.

C. Механизм иерархии

Наличие нескольких поколений хиггсовских суперполей позволяет естественным образом ввести иерархию масштабов нарушения электрослабой симметрии и симметрии Великого объединения точно таким же образом, как это имеет место при описании иерархии масс поколений фермионов: массовая матрица дублетных компонент хиггсовских полей может иметь вид, отвечающий «демократии» поколений хиггсовских частиц, а значит, только одно из этих поколений будет сверхмассивным, т.е. с массой порядка планковской шкалы M. Например, для нейтральных хиггсино трех поколений смешивание с единственным масштабом M можно записать в виде

$$\mathcal{L}_{\mathrm{ud}} = \lambda_{\mathrm{ud}} \cdot (\chi^0_{u1}, \chi^0_{u2}, \chi^0_{u3}) \begin{pmatrix} M & M & M \\ M & M & M \\ M & M & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^0_{d1} \\ \chi^0_{d2} \\ \chi^0_{d3} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

что естественно суперсимметричным образом отражается и в массовой матрице для скалярных бозонов Хиггса.

Два других поколения хиггсовских дублетов получат μ-член[6] за счет малого нарушения демократической симметрии в хиггсовском секторе, причем и здесь также возможна иерархия, точно также как и для кварков и заряженных лептонов, и лишь одно из поколений хиггсовских частиц

[6] Вклад в суперпотенциал вида $\mu \cdot \tilde{H}_u \tilde{H}_d$ [9], где поля с волной отвечают базису собственных состояний массовой матрицы после учета поправок к симметрии демократии поколений.

будет определять физику на легчайшем масштабе, отвечающем шкале нарушения электрослабой симметрии.

Интересно, что для триплетных по цвету компонент хиггсовских полей вместо демократии необходимо ввести другой тип симметрии: невырожденная массовая матрица поколений диагонального вида с элементами порядка все того же M, но без смешивания[7], что решает проблему расщепления между триплетными и дублетными компонентами хиггсовского поля, поскольку можно явно указать вполне естественный механизм подобного расщепления с единственным исходным масштабом M. В самом деле, для триплетных хиггсино

$$\mathcal{L}_{\varkappa} = \lambda_{\varkappa} \cdot (\varkappa_1^c, \varkappa_2^c, \varkappa_3^c) \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varkappa_1 \\ \varkappa_2 \\ \varkappa_3 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

что переходит в аналогичный вклад для скалярных триплетных частиц Хиггса.

В итоге, проблема иерархии масштабов становится тесно связанной с проблемой расщепления триплета и дублета хиггсовского поля, эти проблемы допускают решение с единственным динамическим масштабом M и сводятся к задаче о механизме малого нарушения «демократической» симметрии поколений в хиггсовском секторе, вполне аналогичной задаче о механизме нарушения «демократической» симметрии поколений в юкавском секторе теории.

Эта же идея может быть полезна для отщепления зеркальной материи: в зеркальном хиггсовском секторе смешивание задается невырожденной диагональной матрицей со стерильным масштабом $M \sim m_{\rm Pl}$, а значит, все хиггсовские частицы и фермионы с дираковской массой зеркальной материи являются сверхтяжелыми. Как следствие, нарушение электрослабой симметрии в зеркальном мире определяется масштабом M. Массы зеркальных нейтрино оказываются планковскими (см. Приложение A).

D. Суперсимметрия

Объединение фермионных компонент киральных суперполей материи с одном мультиплете с майорановскими компонентами вещественных калибровочных суперполей показывает, что в одном суперполе E_8 оказываются безмассовые частицы спина 1, $\frac{1}{2}$ и 0, что предполагает два шага с инкрементом $\frac{1}{2}$ в рамках одного представления супермультиплета, т.е. суперсимметрию $N = 2$.

---

[7] Малое смешивание в виде поправок без нарушения невырожденности, конечно, допустимо, и оно по-прежнему оставит верным вариант с тремя сверхтяжелыми поколениями.

IV. Заключение

Итак, мы показали, как можно логически прийти к единственному варианту окончательной суперсимметричной теории Великого объединения с группой E_6 для фундаментального **27**-плета одного поколения фермионов материи и хиггсино и группой E_8 для фундаментального **248**-плета трех поколений фермионов и гауджино.

Конечно, само по себе рассмотрение этих групп в качестве GUT не является новым: см. оригинальные статьи [10–12] и детальный обзор по E_6 в [13], а также работы по E_8 [14, 15]. Однако наше построение позволяет не только уникальным образом обосновать поименный состав неприводимых представлений, но и ввести естественный механизм генерации иерархии масштабов и отщепления сверхтяжелых состояний, который отличен от рассматриваемых в литературе подходов: механизм Димополуса–Вильчека [16], псевдо-симметрии с бозоном Намбу–Голдстоуна [17, 18] и др. [19, 20].

Интересно отметить, что алгебры генераторов изометрий проективных пространств вещественных $\mathbb{R}$ и комплексных $\mathbb{C}$ чисел, а также кватернионов $\mathbb{H}$ изоморфны алгебрам генераторов бесконечных серий классических простых компактных ортогональных, унитарных и симплектических групп [21]:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{isom}(\mathbb{RP}^n) &\cong \mathfrak{so}(n+1),\\
\mathfrak{isom}(\mathbb{CP}^n) &\cong \mathfrak{su}(n+1),\\
\mathfrak{isom}(\mathbb{HP}^n) &\cong \mathfrak{sp}(n+1),
\end{aligned}
\tag{19}
$$

в то время как исключительные группы E_k связаны с октонионами $\mathbb{O}$, так что имеет тесто изоморфизм изометрий проективных плоскостей [21]:

$$
\begin{aligned}
E_6 &\cong \mathrm{Isom}((\mathbb{C}\otimes\mathbb{O})\mathbb{P}^2),\\
E_7 &\cong \mathrm{Isom}((\mathbb{H}\otimes\mathbb{O})\mathbb{P}^2),\\
E_8 &\cong \mathrm{Isom}((\mathbb{O}\otimes\mathbb{O})\mathbb{P}^2),
\end{aligned}
\tag{20}
$$

и число этих групп конечно вследствие неассоциативности алгебры октонионов. Итак, окончательная группа GUT математически основана на максимально возможном обобщении чисел — октонионах.

Октонионы являются неассоциативным обобщением кватернионов, которые в представлении эрмитовых матриц 2×2 широко применяются для описания лоренцевой симметрии 4-мерного пространства-времени Минковского. Кроме того, для алгебр специальных линейных преобразований двухкомпонентных векторов также установлены изоморфизмы

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) &\cong \mathfrak{so}(3,1),\\
\mathfrak{sl}(2,\mathbb{H}) &\cong \mathfrak{so}(5,1),\\
\mathfrak{sl}(2,\mathbb{O}) &\cong \mathfrak{so}(9,1),
\end{aligned}
\tag{21}
$$

что, по-видимому, указывает на связь окончательной группы Великого объединения с 10-мерным пространством Минковского, естественно вводимого в теории суперструн. В этом смысле, становится более предсказуемой взаимосвязь построения теории Великого объединения по двум существенно различным путям: из феноменологии локальной квантовой теории поля, как в данной работе, и согласно F-теории в суперструнах [5], которые, в итоге, приводят к единому результату — группе E_8. Напомним однако, что в построенный нами мультиплет входят поля с планковским масштабом масс, так что он существенно отличается от мультиплетов моделей великого объединения, инспирированных теорией суперструн.

Приложение A: Смешивание зеркальных нейтрино

Для зеркальных нейтрино: дублетного, синлетного и стерильного, — матрица смешивания с точностью до общего юкавского фактора принимает вид

$$\mathcal{M}_{\text{mir.}} = \begin{pmatrix} 0 & M' & 0 \\ M' & 0 & \Lambda \\ 0 & \Lambda & M \end{pmatrix}, \tag{A1}$$

где $M' \sim M \sim m_{\text{Pl}}$. Поскольку $\det \mathcal{M}_{\text{mir.}} = -MM'^2$, эта матрица невырождена, и мы ожидаем, что все три массовых состояния имеют один и тот же масштаб порядка M. В самом деле, совершим сначала поворот двух первых состояний с помощью матрицы

$$U_{12}^{\text{mir.}} = \begin{pmatrix} c_{12}^{\text{mir.}} & s_{12}^{\text{mir.}} & 0 \\ -s_{12}^{\text{mir.}} & c_{12}^{\text{mir.}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $c_{12}^{\text{mir.}} = s_{12}^{\text{mir.}} = 1/\sqrt{2}$, так что

$$U_{12}^{\text{mir.}\,\dagger} \cdot \mathcal{M}_{\text{mir.}} \cdot U_{12}^{\text{mir.}} = \begin{pmatrix} -M' & 0 & -\frac{\Lambda}{\sqrt{2}} \\ 0 & M' & \frac{\Lambda}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\Lambda}{\sqrt{2}} & \frac{\Lambda}{\sqrt{2}} & M \end{pmatrix},$$

а затем поворот на угол $\theta_{23}^{\text{mir.}}$, заданный условием

$$\tan 2\theta_{23}^{\text{mir.}} = \frac{\Lambda\sqrt{2}}{M - M'},$$

после чего матрица масс зеркальных нейтрино $\tilde{\mathcal{M}}_{\text{mir.}} = U_{23}^{\text{mir.}\,\dagger} U_{12}^{\text{mir.}\,\dagger} \cdot \mathcal{M} \cdot U_{12}^{\text{mir.}} U_{23}^{\text{mir.}}$ примет вид

$$\tilde{\mathcal{M}}_{\text{mir.}} = \begin{pmatrix} -M' & \Lambda\,\frac{s_{23}^{\text{mir.}}}{\sqrt{2}} & -\Lambda\,\frac{c_{23}^{\text{mir.}}}{\sqrt{2}} \\ \Lambda\,\frac{s_{23}^{\text{mir.}}}{\sqrt{2}} & M_2 - \tilde{\Lambda} & 0 \\ -\Lambda\,\frac{c_{23}^{\text{mir.}}}{\sqrt{2}} & 0 & M_3 + \tilde{\Lambda} \end{pmatrix}, \tag{A2}$$

где введены обозначения

$$M_2 = M'(c_{23}^{\text{mir.}})^2 + M(s_{23}^{\text{mir.}})^2,$$
$$M_3 = M'(s_{23}^{\text{mir.}})^2 + M(c_{23}^{\text{mir.}})^2,$$
$$\tilde{\Lambda} = \Lambda\,\frac{\sin 2\theta_{23}^{\text{mir.}}}{\sqrt{2}}.$$

Для матрицы (A2) применима теория возмущений, согласно которой зеркальные нейтрино приобретают массы

$$\begin{aligned} m_1^{\text{mir.}} &\approx -M' - \frac{\Lambda^2 (s_{23}^{\text{mir.}})^2}{2(M'+M_2)} - \frac{\Lambda^2 (c_{23}^{\text{mir.}})^2}{2(M'+M_3)}, \\ m_2^{\text{mir.}} &\approx M_2 - \tilde{\Lambda} + \frac{\Lambda^2 (s_{23}^{\text{mir.}})^2}{2(M'+M_2)}, \\ m_3^{\text{mir.}} &\approx M_2 + \tilde{\Lambda} + \frac{\Lambda^2 (c_{23}^{\text{mir.}})^2}{2(M'+M_3)}. \end{aligned} \tag{A3}$$

Как мы и предполагали, эти значения масс имеют один и тот же порядок планковской шкалы энергии. Именно на этом масштабе становится существенным для нарушения лептонного числа зеркальных нейтрино за счет смешивания состояний, которое задается описанными нами поворотами и поправками в теории возмущений, но мы его здесь не рассматриваем.

---

[1] H. Georgi and S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett. **32**, 438 (1974).

[2] K. Nakamura *et al.* [Particle Data Group], J. Phys. G **37**, 075021 (2010).

[3] C. Beasley, J. J. Heckman and C. Vafa, JHEP **0901**, 058 (2009) [arXiv:0802.3391 [hep-th]].

[4] C. Beasley, J. J. Heckman and C. Vafa, JHEP **0901**, 059 (2009) [arXiv:0806.0102 [hep-th]].

[5] J. J. Heckman, arXiv:1001.0577 [hep-th].

[6] J. J. Heckman, A. Tavanfar and C. Vafa, JHEP **1008**, 040 (2010) [arXiv:0906.0581 [hep-th]].

[7] H. Fritzsch, Phys. Lett. B **70**, 436 (1977);
H. Harari, H. Haut and J. Weyers, Phys. Lett. B **78**, 459 (1978);
H. Fritzsch, Nucl. Phys. B **155**, 189 (1979);
Y. Koide, Phys. Rev. D **28**, 252 (1983);
P. Kaus and S. Meshkov, Mod. Phys. Lett. A **3**, 1251 (1988) [Erratum-ibid. A **4**, 603 (1989)];
Y. Koide, Phys. Rev. D **39**, 1391 (1989);
H. Fritzsch and J. Plankl, Phys. Lett. B **237**, 451 (1990).

[8] R. Slansky, Phys. Rept. **79**, 1 (1981).

[9] S. Weinberg, "The quantum theory of fields", Volume III "Supersymmetry", Cambridge University Press, 2000.

[10] F. Gursey, P. Ramond and P. Sikivie, Phys. Lett. B **60**, 177 (1976).

[11] S. F. King, S. Moretti and R. Nevzorov, Phys. Rev. D **73**, 035009 (2006) [arXiv:hep-ph/0510419].

[12] S. F. King, S. Moretti and R. Nevzorov, Phys. Lett. B **634**, 278 (2006) [arXiv:hep-ph/0511256].

[13] J. L. Hewett and T. G. Rizzo, Phys. Rept. **183**, 193 (1989).

[14] I. Bars and M. Gunaydin, Phys. Rev. Lett. **45**, 859 (1980).

[15] V. Braun, Y. H. He, B. A. Ovrut and T. Pantev, JHEP **0506**, 039 (2005) [arXiv:hep-th/0502155].

[16] S. Dimopoulos and F. Wilczek, *In the Proceedings of 19th International School of Subnuclear Physics: The Unity of the Fundamental Interactions, Erice, Italy, 31 Jul - 11 Aug 1981, pp 237-249.*

[17] R. Barbieri, G. R. Dvali and A. Strumia, Nucl. Phys. B **391**, 487 (1993).

[18] L. Randall and C. Csaki, arXiv:hep-ph/9508208.

[19] G. F. Giudice and A. Masiero, Phys. Lett. B **206**, 480 (1988).

[20] J. E. Kim and H. P. Nilles, Mod. Phys. Lett. A **9**, 3575 (1994) [arXiv:hep-ph/9406296].

[21] J. C. Baez, arXiv:math/0105155.