Примерный перечень вопросов к экзамену и зачету

1. Примеры применения ускорителей в науке и технике.
2. Встречные пучки, светимость коллайдера.
3. Высоковольтные ускорители прямого действия.
4. Линейные индукционные ускорители.
5. Циклические ускорители с постоянной орбитой.
6. Циклические ускорители с переменной орбитой.
7. В чем принцип резонансного ускорения.
8. Ускоритель Альвареца.
9. Синхротроны с совмещенными и разделенными функциями магнитной структуры. Примеры: У-70, Бустер ИФВЭ, УНК, проект Омега в ИФВЭ.
10. Проектная орбита (r.o.–*reference orbit*) и подвижная система координат на этой орбите.
11. Коэффициент расширения орбиты.
12. Автофазировка в синхротроне, синхронная энергия и синхронная фаза, критическая энергия в синхротроне.
13. Уравнения синхротронных колебаний.
14. “Масса” и частота синхротронных колебаний.
15. Сепаратриса в продольном фазовом пространстве, продольный эмиттанс пучка и аксептанс.
16. Теорема Лиувилля в фазовом пространстве синхротронных колебаний.
17. Адиабатическое изменение параметров синхротронных колебаний.
18. Уравнения поперечного движения в синхротроне.
19. Уравнение Хилла, период магнитной структуры.
20. Слабая и сильная фокусировка.
21. Основные типы электромагнитов в синхротроне.
22. Матричный метод решения уравнения Хилла.
23. Критерий устойчивости поперечного движения.
24. Описание бетатронных колебаний посредством непрерывных бета и фазовых функций.
25. Параметры Куранта-Снайдера, матрица Твисса.
26. Частота бетатронных колебаний, фазовый эллипс.
27. Согласованные и не согласованные пучки.
28. Эмиттанс пучка и аксептанс вакуумной камеры.
29. Инвариантный (нормализованный) эмиттанс пучка.
30. Естественная хроматичность ускорителя.
31. Хроматический разброс бетатронных частот в пучке.
32. Принцип коррекции хроматичности.
33. Коррекция искажений орбиты.
34. Создание бампов орбиты.
35. Скалярный потенциал плоского магнитного поля.
36. Нормальные и косые мультиполи.
37. Краевые поля. Краевая фокусировка в диполях.
38. Нелинейные уравнения бетатронного движения в канонических переменных.
39. Суммовые и разностные бетатронные резонансы.
40. Сдвиг бетатронных частот.
41. Ширина резонанса. Биения размеров пучка. Параметрический резонанс.
42. Косой квадруполь и линейный резонанс связи.
43. Использование секступольного резонанса для медленного вывода пучка из синхротрона.
44. Зависимость сдвигов частот от амплитуд колебаний.
45. Разброс частот в пучке и системы его коррекции.
46. Влияние нормальных паразитных мультиполей на процесс медленного вывода.
47. Некогерентный кулоновский сдвиг бетатронных частот.

48. Нелинейный кулоновский разброс бетатронных частот.
49 Кулоновское взаимодействие сталкивающихся сгустков в коллайдере.
50. Ограничение светимости коллайдера.
51. Диффузионные процессы: кулоновское и ядерное рассеяние на остаточном газе.
Требование к вакууму в протонных синхротронах.

Примеры задач, взятых из книги D.A. Edwards & M.J. Syphers “An Introduction to the Physics of High Energy Accelerators”, рассматриваемых на лекциях и предлагаемых для домашнего решения.

1 Некоторые космические пучки протонов входят в верхние слои атмосферы с энергией протонов 1 *дж* или больше. Рассчитайте разницу между скоростью света и скоростью протона с энергией 1 *дж*.

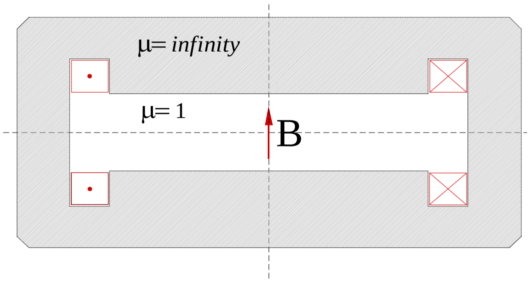
2. В следующем мы будем использовать связь между относительным изменением по энергии $\Delta E/E$ и соответствующим относительным изменением по импульсу $\Delta p/p$. Покажите, что

$$\frac{\Delta E}{E} = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \frac{\Delta p}{p},$$

где v – скорость объекта, c – скорость света.

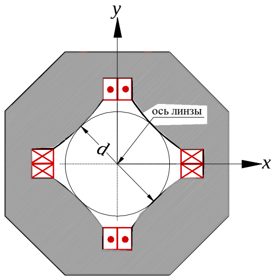
3. Магнитное поле Земли около $B \sim 1$ гаусса. При какой скорости протона сила от магнитного поля B равна гравитационной силе. Рассчитайте соответствующую кинетическую энергию протона.

4. Найти магнитное поле B на оси симметрии простого дипольного магнита при условиях:
- пренебрегаем продольными краями магнита;
- относительная магнитная проницаемость: $\mu_{\text{полюс}} = \infty$ в полюсах, $\mu = 1$ в камере (см. рисунок);
- в верхней и нижней катушках заданы IN ампер-витков;
- $h = 4.8\ cm$– межполюсное расстояние.



5. Квадрупольный магнит показан на следующем рисунке. На каждом полюсе размещается катушка, состоящая из N витков и током I. Полагаем что магнитное поле не имеет s-компоненты, т.е. магнит бесконечно длинный. При таких условиях магнитное поле может быть выражено через скалярный магнитный скалярный потенциал

$$\vec{B} = \nabla\Phi.$$



a) В квадрупольном магните, где $\partial B_x/\partial y = \partial B_y/\partial x = B' = constant$, покажите что кривые постоянного Φ – гиперболы.

b) Поверхность каждого полюса квадрупольного магнита является эквипотенциальной поверхностью определяемой соотношением:

$$\Phi = B'xy = constant\,.$$

Если расстояние между полюсами $d = 2R$ и если в железе предполагается $\mu = \infty$, покажите что "градиент" B' магнитного поля вдоль горизонтальной x оси и вертикальной y оси даются выражением:

$$B' = \frac{2\mu_o NI}{R^2}\ ,$$

где μ_o – магнитная постоянная.

6. Высокая светимость более легко получается в физике с неподвижной мишенью чем в работе коллайдера. Предположим что пучок с 10^{11} протонов в секунду попадает на мишень из жидкого водорода длиной 1 *m*. Вычислите светимость. Плотность жидкого водорода равна $0.07\frac{g}{cm^3}$. Предположим что протоны являются достаточно энергичными, что они движутся со скоростью близкой к скорости света.

7. Бетатрон ускоряет электроны до энергии 300 *MeV*. При радиусе орбиты 1 *m* вычислите поле на орбите и поток поля через орбиту при 300 *MeV*. Учитывая то обстоятельство, что насыщение железа магнита происходит при около 2 *tesla*, оцените сечение ярма магнита. Прокомментируйте реализуемость 10 *GeV* бетатрона.

8. Кольцо синхротрона с периметром $\Pi_o = 87$ км ускоряет протоны от 2 *TeV* до 20 *TeV* в течение 1500 секунд. Ускоряющая система с амплитудой $U_o = 15\,MV$ работает с частотой $f_{rf} = 360\,MHz$. Найти синхронную фазу φ_s и частоту малых фазовых колебаний предполагая $\gamma_{tr} = 105$ в приближении $\gamma \gg \gamma_{tr}$.

9. Выведите выражение для площади стационарного *bucket*[a]. Оцените эту площадь для протонного синхротрона с периметром $\Pi = 2\pi 10^3$м, работающего с кратностью ускорения $q = 1113$ при синхронной энергии $E_s = 150\,GeV$, с амплитудой ускоряющего поля $\mathrm{U} = 1\,MV$ и $\gamma_{tr} = 18$.

10. Вывести выражение для продольного эмиттанса пучка с максимальной амплитудой фазовых колебаний φ_m в стационарном bucket[e]. Используйте это выражение для оценки продольного эмиттанса банча при $\varphi_m = 0.5$ в синхротроне предыдущей задачи.

11. Синхротрон со стационарным *bucket*[ом], т.е. $\varphi_s = \pm\pi/2$. Покажите что отношение частоты синхротронных колебаний частицы с фазовой амплитудой φ_m к частоте частицы с малыми ("нулевыми") фазовыми колебаниями равно

$$\frac{\Omega(\varphi_m)}{\Omega(0)} \equiv \frac{\Omega(\varphi_m)}{\Omega_o} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{K\left(sin^2(\varphi_m/2)\right)}\ ,$$

где K – полный эллиптический интеграл первого рода:

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} (1 - x\, sin^2\theta)^{-1/2} d\theta \ .$$

12. Рассчитайте максимальное относительное отклонение $\Delta E/E_s$, которое может содержаться в стационарном бакете (*bucket*) при инжекции в протонный SSC коллайдер. При этом используйте: 2 TeV – энергия инжекции, 8 MV – RF ускоряющее напряжение, 10^5 – гармоническое число, $\gamma_{tr} = 0.01$ – критическая энергия.

13. Циклический ускоритель со слабой фокусировкой представляется одним дипольным магнитом, обеспечивающим полный поворот плоской r.o. (*reference orbit*) на угол 2π.
Заданы:

ρ – радиус кривизны r.o,
n – показатель спада магнитного поля на r.o.

$$n \equiv -\frac{\rho}{B}\frac{\partial B_y}{\partial x} \ .$$

Определить:

$Q_{x,y}$ – частоты бетатронных колебаний;
$\beta_{x,y}$ – бета-функции;
D – дисперсионную функцию;
α – коэффициент расширения орбиты

14. В ускорителе (синхротроне) со “слабой фокусировкой” индекс магнитного поля n определяется как

$$n \equiv -\frac{\rho}{B}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}\right)_{\text{r.o.}} = -\frac{\rho}{B} G \ .$$

а) Показать, что уравнение движения частицы в вертикальной (аксиальной) степени свободы есть

$$\ddot{y} + \omega^2 n y = 0 \ ,$$

где ω – угловая частота обращения. Таким образом, вертикальные колебания устойчивы до тех пор, пока $n > 0$.
б) Если проектный радиус машины есть R и радиальная координата частицы есть $r = R + x$, где $x \ll R$, показать, что уравнение движения по радиальной (горизонтальной) степени свободы есть

$$\ddot{x} + \omega^2(1-n)x = 0 \ .$$

Поэтому радиальная устойчивость требует $n < 1$.

Таким образом, устойчивость по обоим поперечным степеням свободы одновременно гарантирована только, если $0 < n < 1$.

15. Рассмотрите систему, состоящую из двух тонких квадрупольных линз с одинаковыми фокусными расстояниями f, одна линза – фокусирующая, а другая – дефокусирующая, линзы разделены расстоянием L. Покажите что эта система фокусирующая, если $|f| > L$.

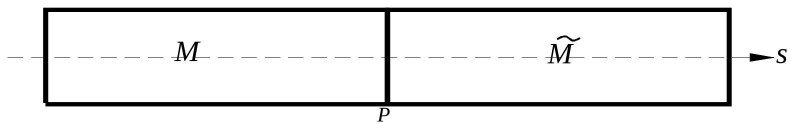
16. Предположим что частица пересекает сначала фокусирующую квадрупольную линзу с фокусным расстоянием F, за тем – свободный промежуток длиной L, за тем – дефокусирующую линзу с фокусным расстоянием F , за тем – свободный промежуток длиной L. Покажите что матрица такой системы определяется как

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{L}{F} - \left(\frac{L}{F}\right)^2 & 2L + \frac{L^2}{F} \\ -\frac{L}{F^2} & 1 + \frac{L}{F} \end{pmatrix}.$$

17. Участок магнитной структуры состоит из двух “половинок”. Матрица первой половины

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{с} \quad \det M = 1\,.$$

$\widetilde{M}$ -матрица второй половины, магнитная структура которой зеркально симметрична структуре первой половины относительно точки симметрии S.



Найти матрицу $\widetilde{M}$.

18. Идя от точки 1 до точки 2, вы пересекаете последовательность элементов, которая дает матрицу

$$M(1,2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

От точки 2 до точки 3 вы проходите те же элементы, но в обратном порядке. Покажите, что матрица от 2 до 3 равна

$$M(2,3) = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}.$$

19. Покажите, что амплитудная β-функция есть решение дифференциального уравнения

$$\beta''' + 4\beta' K + 2\beta K' = 0\,.$$

В пределах элемента магнитной структуры, где $K = const$, решение должно быть в одной из форм:

$$\beta(s) = a + bs + cs^2\;,$$
$$\beta(s) = a\cos\left(2\sqrt{K}s\right) + b\sin\left(2\sqrt{K}s\right) + c\,,$$
$$\beta(s) = \text{a ch}\left(2\sqrt{|K|}s\right) + b\,\text{sh}\left(2\sqrt{|K|}s\right) + c\;.$$

В каждом случае ($K = 0\,, K > 0\,, K < 0$) определите a, b, c через значения α_0 и β_0 в начале элемента.

20. Предположим, что частица движется вдоль проектной орбиты (*reference orbit*) и испытывает угловое отклонение θ (например, из-за рассеяния на ядре атома молекулы остаточного газа) в точке $s = 0$. Покажите, что после этого движение по ζ задается выражением

$$\zeta(s \geq 0) = \theta\sqrt{\beta(s)\beta_0}\sin\psi(s)\;,$$

где $\beta_0 = \beta(0)$ – амплитудная функция в точке отклонения и фаза $\psi(s)$ измеряется от точки отклонения, т.е. $\psi(0) = 0$.

21. Показать, что набег фазы от точки s_1 до точки s_2 через участок, описываемый матрицей $M(s_2|s_1)$ в кольце или канале, дается выражением

$$\text{tg}\,\Delta\mu = \frac{m_{12}}{\beta_1 m_{11} - \alpha_1 m_{12}}\;,$$

где m_{ij} –элементы матрицы $M(s_2|s_1) \equiv \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ и β_1, α_1 –значения параметров β, α в точке s_1.

22. Для достижения большой светимости в ускорителе со сталкивающимися пучками амплитудная β функция делается малой в точке IP, где пучки приводятся в столкновение. Длина детектора, занимающего эту прямолинейную секцию, будет больше по сравнению в величиной β в точке IP взаимодействия. Покажите, что набег фазы на этой прямолинейной секции будет приблизительно равен 180^{o} .

23. Покажите, что в кольце синхротрона $\mathrm{J}(s_0)^2 = -\mathrm{I}$, а n оборотов кольца задаются матрицей

$$M^n = \mathrm{I}\cos(n\mu_0) + \mathrm{J}(s_0)\sin(n\mu_0)$$

Напомню, что $\mathrm{J}(s_0) \equiv \begin{pmatrix} \alpha(s_0) & \beta(s_0) \\ -\gamma(s_0) & -\alpha(s_0) \end{pmatrix}$ в начальной точке s_0 кольца и μ_0 –набег фазы на всем кольце.

24. Предположим, что существует много некоррелированных угловых отклонений распределенных по кольцу с нулевым средним и rms величиной θ_{rms}. Покажите, что rms (по ансамблю синхротронов) искажение орбиты в некоторой точке наблюдения, где амплитудная функция равна β_{o} , определяется выражением

$$\langle x^2\rangle^{1/2} = \frac{\beta_o^{1/2}}{2|sin(\pi Q)|}\left(\sum_i \theta_{\mathrm{rms}}^2\,\beta_i\;sin^2(\pi Q - \mu_i)\right)^{1/2}$$

$$= \frac{\left(\beta_{\mathrm{o}}\bar{\beta}\right)^{1/2}}{2\sqrt{2}|sin(\pi Q)|}\;N^{1/2}\,\theta_{\mathrm{rms}}\;,$$

где $\bar{\beta}$ – среднее значение амплитудной функции по N локальным угловым отклонениям. При переходе от первого выражения ко второму пренебрегли величинами порядка 1 по сравнению с N; во многих случаях вторая оценка является хорошим приближением.

25. Орбиты могут корректироваться и подстраиваться, используя т.н. управляющие (*steering*) диполи. Один из стандартных алгоритмов основан на т.н. "трёх ударах (*three bumps*"). Локальное искажение орбиты может быть сделано тремя *steering* диполями. Пусть три угла отклонения $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, создаются соответственно последовательно расположенными *steering* диполями. Покажите, что если эти углы созданы согласно соотношениям:

$$\theta_2 = -\theta_1\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}\,\frac{\sin\psi_{13}}{\sin\psi_{23}} \quad \text{и} \quad \theta_3 = \theta_1\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_3}}\,\frac{\sin\psi_{12}}{\sin\psi_{23}}\;,$$

где ψ_{ij} –набег бетатронной фазы по г.о. между $i^{\underline{ЫМ}}$ и $\mathrm{j}^{\underline{ЫМ}}$ *steering* диполями, тогда искажение орбиты будет локализовано между такими первым и третьим *steering* диполями.

26. Предположим, что дополнительный квадруполь с пренебрежимо малой длины l и силой $q \equiv B'l/(B\rho)$ размещается в кольце синхротрона в точке, где амплитудная функция имеет величину β_1. Предположим, что до этой точки амплитудная функция не возмущена. Покажите, что после квадруполя частичное отклонение β определяется выражением

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} \equiv \frac{\beta(s)-\beta_o(s)}{\beta_o(s)} = -q\beta_1 sin(2\mu_o) + \frac{1}{2}(q\beta_1)^2\big(1-cos(2\mu_o)\big)\;,$$

где $\beta_o(s)$ – исходная невозмущенная амплитудная функция, и исходная фаза $\mu_o(s)$ – измеряется от положения квадруполя.

27. Для существенно малых локальным квадрупольных возмущений $q_i \equiv (\Delta B')_i l/(B\rho)$ относительное отличие амплитудной функции подчиняется правилам аналогичным искажениям орбиты из-за дипольных возмущений. Покажите, что rms относительное отличие β-функции, связанное с квадрупольными отклонениями q_i определяется выражением

$$\left(\frac{\Delta\beta}{\beta}\right)_{\text{rms}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,|sin(2\pi Q)|} \langle \sum_i q_i \beta_i^2 \rangle^{1/2} \;,$$

где β_i невозмущенная (исходная) амплитудная функция в $i^{\text{ой}}$ локальной точке нахождения q_i .

28. Для простого синхротрона с FODO магнитной структурой проверьте, что γ_{tr} критическая энергия (*transition gamma*) приблизительно равна Q_x.

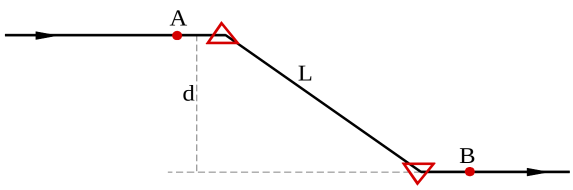
29. Локальное угловое отклонение θ орбиты, вызванное локальным дипольным возмущением магнитного поля, создает в синхротроне новую замкнутую орбиту, длина которой отличается от идеальной орбиты (исходной, т.е. r.o.) на ΔC. Покажите, что

$$\Delta C = \theta \cdot D \,,$$

где D – дисперсионная функция в точке локализации θ.

30. Для простого синхротрона с FODO магнитной структурой проверьте, что хроматичность $\vec{\xi}$ такого синхротрона примерно равна по величине и противоположна по знаку бетатронной частоте $\vec{Q}$, т.е. $\vec{\xi} \approx -\vec{Q}$, если только элементы, вносящие вклад в хроматичность, – это основные квадруполи магнитной структуры.

31. На следующем рисунке показан участок магнитной структуры, носящий т.н. название “*dogleg*”, где треугольниками показаны локальные диполи с соответствующими направлениями магнитного поля.



Если дисперсионная функция в точке А равна $D = D' = 0$, какая дисперсионная функция будет в токе В ?, (предполагается что $\theta = d/L \ll 1$).