

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ –
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ НИЦ “КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ”

На правах рукописи

Жохов Роман Николаевич

**Фазовые переходы под влиянием внешних условий в
низкоразмерных моделях теории поля**

Специальность 01.04.02 —
«теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физ. мат. наук

Научный руководитель:
д.ф.м.н
Клименко Константин Григорьевич

Протвино — 2015

Оглавление

	Стр.
Глава 1. Введение	5
1.1 Модель Гросса-Неве в (1+1)-мерном пространстве-времени	6
1.2 Модель Гросса-Неве в (2+1)-мерном пространстве-времени	10
1.3 Модель Намбу–Йона-Лазинио	14
1.4 Модель Гросса-Неве в (2+1)-мерном пространстве-времени при конечной температуре и ненулевом химическом потенциале	16
1.5 Модель Гросса-Неве в (1+1)-мерном пространстве-времени при конечной температуре	18
1.6 Модель Гросса-Неве в (1+1)-мерном пространстве-времени при ненулевом химическом потенциале и конечной температуре	20
1.7 Модель Гросса-Неве в (1+1)-мерном пространстве-времени при ненулевом химическом потенциале и нулевой температуре	21
1.8 Асимптотическая свобода в КХД	22
1.9 Нарушение киральной симметрии в КХД	23
1.10 Цветовая сверхпроводимость	23
1.11 Модель Ходоса	25
1.12 Эффективный гамильтониан для графена в приближение сильной связи	28
1.12.1 Кристаллическая решетка графена	29
1.12.2 Гамильтониан для графена и пробные волновые функции	31
1.12.3 Решение с учетом перескока между ближайшими соседями и следующими ближайшими. Дисперсия энергии для π электронов в графене	32
1.12.4 Эффективный гамильтониан в приближении сильной связи	34
1.13 Структура диссертации	35
Глава 2. Влияние химического потенциала на появление сверхпроводящей фазы в (2+1)-мерной модели Ходоса	37
2.1 Введение	37
2.2 Модель и ее термодинамический потенциал	38
2.3 Перенормировка при нулевой температуре, $T = 0$	40
2.4 Фазовая структура модели при нулевой температуре, $T = 0$	43
2.4.1 Случай $\mu = 0$	43
2.4.2 Рассмотрение влияния ненулевого химического потенциала	44
2.5 Учет конечной температуры	48
2.6 Итоги и выводы	53
Глава 3. Явление сверхпроводимости, индуцированное внешним параллельным магнитным полем в (2+1)-мерной модели типа Гросса-Неве	55
3.1 Введение	55
3.2 Модель и ее термодинамический потенциал	56
3.3 Процедура перенормировки	59
3.4 Фазовая структура модели	61
3.4.1 Случай $\mu = 0, B = 0$	61
3.4.2 Случай $\mu \neq 0$ и/или $B \neq 0$	61
3.5 Итоги и выводы	66

Глава 4. Нарушение киральной симметрии в (2+1)-мерной модели Гросса-Неве с учетом зеемановского взаимодействия с внешним наклонным магнитным полем	68
4.1 Введение	68
4.2 Модель и ее термодинамический потенциал	69
4.2.1 Частный случай $B_{\perp} = 0, \nu \neq 0$	71
4.2.2 Частный случай $\nu = 0, B_{\perp} \neq 0$	73
4.2.3 Термодинамический потенциал в общем случае $\nu \neq 0, B_{\perp} \neq 0$	76
4.3 Некоторые свойства модели при $g > 0$	79
4.3.1 Эффект магнитного катализа	79
4.3.2 Осцилляции намагниченности	80
4.4 Фазовая структура модели при $g < 0$	83
4.4.1 Частный случай $ g = \mu_B/e$	83
4.4.2 Фазовая структура в общем случае	84
4.4.3 Численные оценки в контексте физики конденсированного состояния вещества	86
4.5 Итоги и выводы	89
Глава 5. Нарушение киральной симметрии в трехмерной модели Гросса-Неве с компактификацией в присутствии магнитного поля	91
5.1 Введение	91
5.2 Модель и ее термодинамический потенциал	92
5.3 Расчет термодинамического потенциала модели	94
5.4 Термодинамический потенциал, для которого $\left. \frac{d^2\Omega}{d\sigma^2} \right _{\sigma=0}$ явно конечна при любых значениях α	96
5.5 Численное исследование и фазовый портрет модели	98
5.6 Расчет термодинамического потенциала с использованием метода ζ -регуляризации	101
5.7 Выводы и некоторые численные оценки	107
Глава 6. Заключение	109
Глава 7. Приложения	117
7.1 Формула для вычисления эффективного потенциала в случае пространств с компактифицированным измерением	117
7.2 Алгебра γ -матриц в случае группы $SO(2,1)$	118
7.3 Вычисление континуального интеграла по антикоммутирующим полям	119
7.4 Уравнения щели	120
7.5 Строгое получение эффективного действия в первом порядке $\frac{1}{N}$	121
7.6 Вычисление эффективного потенциала в (2+1)-мерной модели Гросса-Неве в присутствии внешнего перпендикулярного системе магнитного поля	124
7.7 Введение химического потенциала и рассмотрение теории при ненулевой плотности	127
7.8 Вычисление термодинамического потенциала для (2+1)-мерной модели Гросса-Неве в присутствии магнитного поля при конечной температуре и ненулевом химическом потенциале	129
7.9 Функциональный след	130
7.10 Получение асимптотики намагниченности при малом перпендикулярном магнитном поле	131
7.11 Вычисление интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \ln(p_0 - a)$	132

7.12	Аналитическое продолжение Z -функции Эпштейна	133
7.13	Аналитическое продолжение функции $Z(a,b,\alpha,s)$ и Z -функции Эпштейна . . .	134

Глава 1. Введение

Симметрии, даже уже на уровне механических систем, оказываются очень полезным инструментом и соответствуют интегралам движения, то есть сохраняющимся величинам. В современной физике и, в частности, физике элементарных частиц симметрии и их нарушение имеют огромное значение. Например, кварки впервые появились как некоторые математические объекты в схеме классификации адронов, которая ставит в соответствие адронам неприводимые представления изотопической группы, группы симметрий, которая отражает тот факт, что сильные взаимодействия инвариантны относительно замены протона на нейтрон, и наоборот. Знание, какой симметрией обладает теория, само по себе может пролить свет на понимание некоторых явлений. Так, знание приближенных симметрий квантовой хромодинамики (КХД) и их нарушений дает возможность вычислять взаимодействия мезонов в рамках эффективной теории, так называемой киральной теории возмущений, хотя из первых принципов КХД, не используя решеточные вычисления, не удастся получить даже существование адронов. Идея о суперсимметрии, перемешивающей бозонные и фермионные степени свободы, позволяет сократить квадратичные расходимости в перенормировке массы Хиггса и тем самым избавляет нас от проблемы тонкой подстройки. Суперсимметрия, по крайней мере пока не получившая экспериментального подтверждения, стала одной из общепринятых моделей, выходящих за рамки стандартной модели.

Важна не только симметрия модели, а также возможные ее нарушения. Существует идея о так называемом спонтанном нарушении симметрии, когда модель является симметричной, а ее вакуумное состояние нарушает симметрию. Идея о спонтанном нарушении симметрии лежит в основе стандартной модели и, в частности, механизма Хиггса, посредством которого частицы приобретают массы. Однако, имеется другой способ нарушения симметрии, динамический, при котором симметрия нарушается динамическим образом. Примерами моделей с динамическим нарушением симметрии являются модели Намбу–Йона-Лазинио и Гросса-Неве.

В 1961 году в работе [1] Намбу и Йона-Лазинио предложили модель для объяснения того, почему нуклоны имеют такую большую массу. В то время еще не было идеи о кварках и КХД и нуклоны были элементарными частицами, составляющими материю. Тем не менее, были указания на существование частично сохраняющегося аксиального тока и приближенной киральной симметрии. Так как приближенная киральная симметрия предполагает почти безмассовые фермионы, их идея состояла в том, что массовая щель в спектре нуклона генерируется посредством динамического нарушения киральной симметрии. Была использована аналогия с появлением щели в модели Бардина–Купера–Шиффера, которая описывает сверхпроводимость [19–21]. В модели Намбу–Йона-Лазинио взаимодействие нуклонов, которое обеспечивает нарушение симметрии и генерацию массы, моделируется контактным четырехфермионным взаимодействием. После появления КХД и выяснения, что адроны состоят из кварков, модель Намбу–Йона-Лазинио была переписана через кварковые поля. Сейчас модель Намбу–Йона-Лазинио используется как низкоэнергетическая эффективная модель взаимодействия кварков. Однако, модель Намбу–Йона-Лазинио не включает в себя эффект конфайнмента. В модель могут быть добавлены различные виды четырехфермионного взаимодействия, в частности, при добавлении взаимодействия в фермион-фермионном канале в рамках этой модели была получена возможность появления ненулевого вакуумного дикваркового конденсата. В рамках модели можно описывать взаимодействие мезонов. Модель Намбу–Йона-Лазинио является четырехмерной моделью и является неперенормируемой, но может быть использована как эффективная теория, справедливая до некоторого масштаба энергии. Если не брать в расчет решеточные вычисления, для изучения явлений КХД при низких энергиях используются ряд моделей: киральная теория возмущений, мо-

дель Намбу–Йона-Лазинио, различные модели, моделирующие конфайнмент кварков, такие как, например, MIT bag model. Среди этих моделей модель Намбу–Йона-Лазинио занимает заметное место.

В 1974 году в работе [2] Д. Гросс и А. Неве рассмотрели похожую модель с четырехфермионным взаимодействием в (1+1)-мерном пространстве-времени. Преимущество этой модели заключается в том, что она является перенормируемой по константе связи. Она обладает некоторыми общими основными свойствами с КХД, такими как перенормируемость (как мы уже упоминали), нарушение киральной симметрии, асимптотическая свобода и размерная трансмутация (см. параграф 1.1). В то же время, эта модель имеет более простую структуру и поддается аналитическому исследованию и, таким образом, она является хорошей лабораторией для изучения КХД. В ней намного проще исследовать качественно такие реальные физические явления, как динамическое нарушение симметрии [2;4;15;22–32], цветовая сверхпроводимость [33–35], а также моделировать фазовую диаграмму реальной квантовой хромодинамики [36]. Исследования в этих моделях проводятся в рамках непертурбативной техники $\frac{1}{N}$ -разложения (так называемый предел т'Хофта ($N \rightarrow \infty$)), то есть считается большим число ароматов кварков. Модель Гросса-Неве в (2+1)-мерном пространстве-времени [2] имеет одну особенность, она является неперенормируемой по константе связи, но перенормируемой в рамках $\frac{1}{N}$ -разложения. В этой модели также присутствует динамическое нарушение киральной симметрии. В рамках этой модели впервые был изучен эффект магнитного катализа (нарушение киральной симметрии, индуцированное внешними магнитными полями) [37–41].

Важной причиной для изучения (2+1)-мерных моделей квантовой теории поля является то, что есть много систем конденсированного состояния вещества, которые, во-первых, имеют (квази)планарную структуру, то есть являются (квази)двумерными, во-вторых, спектр их возмущений описывается релятивистским уравнением Дирака, а не уравнением Шредингера, как в нерелятивистской квантовой механике. Среди этих систем высокотемпературные купраты (high- T_c cuprate), "железные сверхпроводники" [42; 43], слой карбоновых атомов толщиной в один атом, или графен, [44; 45] и так далее. В частности, графену в последнее время было посвящено множество работ [45–47]. То, что возбуждения в графене в приближении сильной связи могут быть описаны уравнением Дирака, было показано в работе [14]. Таким образом, многие свойства таких систем конденсированного состояния вещества могут быть объяснены в рамках различных (2+1)-мерных квантовых теорий поля, включая модели типа Гросса-Неве (см. [9; 48–60]).

1.1 Модель Гросса-Неве в (1+1)-мерном пространстве-времени

Рассмотрим модель Гросса-Неве в (1+1)-мерном пространстве-времени.

Лагранжиан модели содержит четырехфермионное взаимодействие и имеет вид

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_a \gamma^\mu \partial_\mu \psi_a + \frac{G}{2N} (\bar{\psi}_a \psi_a)^2, \quad (1.1)$$

где индекс a пробегает от 1 до N . Число N в знаменателе позволяет в пределе считать G конечным. Иногда в знаменателе не пишется число N , тогда в пределе $N \rightarrow \infty$ считается, что $GN = \text{const}$, что обычно называется пределом т'Хофта. Впервые такой предел был рассмотрен Дж. т'Хофтом для калибровочной теории КХД с числом цветов, стремящимся к бесконечности.

Константа связи является безразмерной, то есть теория является перенормируемой по условному индексу расходимости.

Для условного индекса расходимости получим выражение

$$D = 2 - \frac{E_\psi}{2} - \dim Gn, \quad (1.2)$$

где n - число вершин, E_ψ - число внешних фермионных линий.

В нашем случае $\dim G = 0$, $D = 2 - \frac{E_\psi}{2}$.

Таким образом, расходятся только диаграммы с $E_\psi \leq 4$.

Модель инвариантна относительно киральных преобразований

$$\psi_i \rightarrow \gamma^5 \psi_i. \quad (1.3)$$

Запишем эквивалентный лагранжиан, введя вспомогательное скалярное поле σ ,

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \sigma\bar{\psi}\psi - \frac{N}{2G}\sigma^2. \quad (1.4)$$

Введение вспомогательного скалярного поля называют преобразованием Стратоновича-Хаббарда.

Видно, что уравнение Эйлера-Лагранжа для скалярного поля имеет вид

$$\sigma = -\frac{G}{N}\bar{\psi}\psi. \quad (1.5)$$

Несложно увидеть, что, подставляя σ из уравнения Эйлера-Лагранжа в выражение (1.4), получим исходный лагранжиан (1.1).

В терминах (1.4) киральная симметрия будет иметь вид: ψ преобразуется по (1.3), а преобразование для σ имеет вид: $\sigma \rightarrow -\sigma$.

Эффективное действие имеет вид

$$e^{iS_{\text{eff}}} = \int D[\bar{\psi}(x)]D[\psi(x)]e^{iS[\bar{\psi},\psi]} = \int D[\bar{\psi}(x)]D[\psi(x)]D[\sigma(x)]e^{iS[\bar{\psi},\psi,\sigma]}. \quad (1.6)$$

Интеграл по фермионным полям является гауссовым и легко вычисляется. Выполнив интегрирование по фермионным полям, получим

$$e^{iS_{\text{eff}}} = \int D[\sigma(x)]e^{iN(-\int d^2x \frac{1}{2G}\sigma^2 - i\text{Tr} \ln(i\gamma^\mu\partial_\mu - \sigma))}. \quad (1.7)$$

В главном порядке $\frac{1}{N}$ разложения возбуждениями поля σ можно пренебречь ($\sigma = \langle\sigma\rangle + \sigma'$) и оставить только вакуумное значение, которое определяется экстремумом выражения, стоящего под экспонентой (получение эффективного действия и эффективного потенциала в первом порядке $\frac{1}{N}$ разложения приведены в Приложении (7.5)). В результате эффективное действие примет вид

$$S_{\text{eff}}(\sigma) = -\int d^2x \frac{N}{2G}\sigma^2 - iN\text{Tr} \ln(i\gamma^\mu\partial_\mu - \sigma). \quad (1.8)$$

А эффективный потенциал, определенный как $V_{\text{eff}}(\sigma) = -\frac{S_{\text{eff}}(\sigma)}{VT}$, где $V = L$ - объем пространства, T - время, имеет вид

$$V_{\text{eff}} = \frac{N}{2G}\sigma^2 + iN \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \text{tr} \ln(\gamma^\mu p_\mu - \sigma). \quad (1.9)$$

Квадрируя выражение под логарифмом, применяя известный трюк коммутации с γ_5 -матрицей, получим

$$V_{\text{eff}} = \frac{N\sigma^2}{2G} + iN \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln(-p^2 + \sigma^2). \quad (1.10)$$

Далее, делая виков поворот и тем самым переходя в евклидово пространство, запишем эффективный потенциал в виде

$$V_{\text{eff}} = \frac{N\sigma^2}{2G} - N \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln(p^2 + \sigma^2). \quad (1.11)$$

Будем пользоваться регуляризацией с помощью обрезания по импульсу, которая чаще всего и используется в моделях такого типа.

Делая обрезание по импульсу $p = \sqrt{p_0^2 + p_1^2} < \Lambda$, считая, что $\Lambda \gg \sigma$ и отбрасывая члены, не зависящие от σ , для эффективного потенциала получим

$$V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{N}{2G}\sigma^2 + \frac{N}{4\pi}\sigma^2 \left(\ln \frac{\sigma^2}{\Lambda^2} - 1 \right). \quad (1.12)$$

Теперь проведем вычисления, используя размерную регуляризацию.

Для использования размерной регуляризации необходимо после перехода к произвольной размерности обезразмерить все члены действия, введя параметр размерности энергии μ .

Действие, таким образом, будет иметь вид

$$S = \int d^Dx \left(\bar{\psi}_i i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_i - \mu^\epsilon \sigma \bar{\psi}_i \psi_i - \frac{N}{2G} \sigma^2 \right), \quad (1.13)$$

а эффективный потенциал примет вид

$$V_{\text{eff}} = \frac{N}{2G}\sigma^2 + iN \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} \text{tr} \ln(\gamma^\mu p_\mu - m), \quad \text{где } m = \mu^\epsilon \sigma. \quad (1.14)$$

После некоторых вычислений несложно получить следующее выражение для эффективного потенциала

$$V_{\text{eff}} = \frac{N}{2G}\sigma^2 - \frac{N}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi \right) \sigma^2 + \frac{N}{4\pi} \sigma^2 \left(\ln \frac{\sigma^2}{\mu^2} - 1 \right). \quad (1.15)$$

Введем перенормированную константу связи. Для этого будем использовать модифицированную схему минимальных вычитаний \overline{MS} , при которой вычитается не только полюс, член, расходящийся при $\epsilon \rightarrow 0$, но и оставшиеся конечные члены, в отличие от просто схемы минимальных вычитаний MS, где вычитается только полюс,

$$\frac{1}{2g} = \frac{1}{2G} - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi \right). \quad (1.16)$$

В итоге эффективный потенциал имеет вид

$$V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{N}{2g}\sigma^2 + \frac{N}{4\pi}\sigma^2 \left(\ln \frac{\sigma^2}{\mu^2} - 1 \right). \quad (1.17)$$

Если пользоваться другой схемой перенормировки, то есть произвести другое вычитание, отличающееся на конечную константу, то константа связи изменится на конечную величину, то есть $\frac{1}{g} \rightarrow \frac{1}{g} + c$.

Поскольку физика не должна зависеть от произвольного размерного параметра μ , введенного в размерной регуляризации, мы потребуем $\mu \frac{\partial}{\partial \mu} V_{\text{eff}}(\sigma, \mu) = 0$.

Видно, что для этого необходимо, чтобы константа связи зависела от параметра μ следующим образом

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{1}{g(\mu)} = \frac{1}{\pi}, \quad \mu \frac{\partial}{\partial \mu} g(\mu) = \beta(g) = -\frac{g(\mu)^2}{\pi}. \quad (1.18)$$

Проинтегрировав это уравнение, для константы связи g получим

$$\frac{1}{g(\mu)} = \frac{1}{g(\mu_0)} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (1.19)$$

Минимум эффективного потенциала достигается при условии равенства нулю его производной, которое называется уравнением щели и имеет вид

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{d\sigma^2} = \frac{N}{2g(\mu)} + \frac{N}{4\pi} \ln \frac{\sigma^2}{\mu^2} = 0. \quad (1.20)$$

В итоге эффективный потенциал имеет точки минимума $\sigma = \pm \sigma_0$,

$$\sigma_0 = \mu \exp\left(-\frac{\pi}{g(\mu)}\right). \quad (1.21)$$

Используя выражение (1.19), можно показать, что значение σ_0 не меняется при изменении параметра μ , то есть σ_0 является ренормгрупповым инвариантом, $\sigma_0 = \mu \exp\left(-\frac{\pi}{g(\mu)}\right) = \mu' \exp\left(-\frac{\pi}{g(\mu')}\right)$.

Видим, что в теории не было размерного параметра, так как константа связи в (1+1)-мерной модели безразмерная, а после перенормировки появился параметр размерности энергии σ_0 , задающий энергетический масштаб. Это явление носит название размерной трансмутации.

Вернемся к выражению (1.12) для эффективного потенциала, полученного с помощью регуляризации с использованием обрезания по импульсу. Вычислим производную эффективного потенциала

$$V'_{\text{eff}} = \frac{\sigma}{G} + \frac{\sigma}{\pi} \ln \frac{\sigma}{\Lambda} = 0. \quad (1.22)$$

Решениями уравнения являются $\sigma = 0$ и $\sigma = \Lambda \exp\left(-\frac{\pi}{G}\right)$.

Минимум эффективного потенциала достигается при

$$\sigma_0 = \Lambda \exp\left(-\frac{\pi}{G(\Lambda)}\right), \quad (1.23)$$

где мы считаем, что голая константа связи зависит от Λ .

Выполним преобразование $\Lambda \rightarrow \Lambda'$ (то есть изменим параметр обрезания). Предполагая, что значение минимума не изменяется, получаем, что константа связи должна преобразовываться следующим образом

$$\frac{1}{G(\Lambda)} = \frac{1}{G(\Lambda')} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\Lambda}{\Lambda'}, \quad (1.24)$$

что не влияет ни на вакуумное значение, ни на значение эффективного потенциала, $\sigma_0 = \Lambda \exp\left(-\frac{\pi}{G(\Lambda)}\right) = \Lambda' \exp\left(-\frac{\pi}{G(\Lambda')}\right)$.

Это же можно сделать более систематично. Произведем нормировку второй производной эффективного потенциала на масштабе μ , вводя перенормированную константу связи, зависящую от масштаба μ ,

$$\frac{1}{N} \left| \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{d\sigma^2} \right|_{\sigma=\mu} = \frac{1}{g(\mu)}. \quad (1.25)$$

Легко получить, что перенормированная константа связи имеет следующий вид

$$\frac{1}{G(\Lambda)} - \frac{1}{\pi} \ln \Lambda + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \ln \mu = \frac{1}{g(\mu)}. \quad (1.26)$$

Зависимость g от параметра μ при сдвиге $\mu_0 \rightarrow \mu$

$$\frac{1}{g(\mu)} = \frac{1}{g(\mu_0)} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (1.27)$$

Таким образом, бегущая константа связи в модели Гросса-Неве напоминает поведение константы связи в КХД, в частности, она стремится к нулю при увеличении энергии, то есть (1+1)-мерная модель Гросса-Неве является асимптотически свободной.

В итоге для эффективного потенциала получаем выражение

$$V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{N}{2g(\mu)} \sigma^2 + \frac{N}{4\pi} \sigma^2 \left(\ln \frac{\sigma^2}{\mu^2} - 3 \right). \quad (1.28)$$

Эффективный потенциал можно записать в виде, используя вакуумное значение потенциала (1.23),

$$V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{N}{4\pi} \sigma^2 \left(\ln \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} - 1 \right). \quad (1.29)$$

Теория является асимптотически свободной с поведением константы связи вида (1.27). Из выражения (1.18) очевидно, что β -функция равна $\beta(g) = -\frac{g^2}{\pi}$.

Модель Гросса-Неве в этом случае имеет общие свойства с более сложной теорией КХД, такие как перенормируемость, асимптотическая свобода, размерная трансмутация и нарушение киральной симметрии, что делает ее хорошей лабораторией для исследования явлений квантовой хромодинамики.

1.2 Модель Гросса-Неве в (2+1)-мерном пространстве-времени

Ларанжиан модели Гросса-Неве в случае (2+1)-мерного пространства-времени имеет вид

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{G}{2N} (\bar{\psi} \psi)^2. \quad (1.30)$$

Здесь будем использовать неприводимое представление γ -матриц, данное в Приложении 7.2 (7.5).

Размерность константы связи равна минус единице, то есть теория является неперенормируемой по условному индексу расходимости.

Выражение для условного индекса расходимости имеет вид

$$D = 3 - \frac{3E_\psi}{2} - \dim G n, \text{ при } \dim G = -1, D = 3 - \frac{3E_\psi}{2} + n. \quad (1.31)$$

Современная точка зрения состоит в том, что перенормируемость теории не означает, что теорию нужно обязательно отбросить, ее можно использовать как эффективную низкоэнергетическую теорию, справедливую только для определенного масштаба энергии. Предполагается, что при более высоких энергиях существует более общая теория, которая является перенормируемой и в низкоэнергетическом приближении сводится к нашей теории.

Мы будем считать, что существует бесконечное число ароматов $N \rightarrow \infty$, и будем работать в $\frac{1}{N}$ разложении, оставляя лишь ведущий порядок. Работая в ведущем порядке теории возмущений по $\frac{1}{N}$, теорию можно перенормировать. Более того, модель Гросса-Неве в (2+1)-мерном пространстве-времени является перенормируемой в $\frac{1}{N}$ разложении. Тот факт, что теория не является перенормируемой по константе связи, а является перенормируемой в $\frac{1}{N}$ разложении, не является каким-то противоречием. Перенормируемым или нет, является, на самом деле, не теория, а ряд теории возмущений. Таким образом, если для перенормируемой по константе связи теории удастся найти некоторое разложение, отличное от разложения по константе связи, (то есть найти в теории другой малый параметр), и это разложение можно будет перенормировать, эта теория будет вполне хорошей и будет обладать предсказательной силой.

Лагранжиан модели (1.30) обладает киральной симметрией

$$\psi(x_0, x_1, x_2) \rightarrow i\gamma^2 \psi(x_0, x_1, -x_2). \quad (1.32)$$

Из этого выражения несложно получить, как меняется $\bar{\psi}$:

$$\bar{\psi}(x_0, x_1, x_2) \rightarrow -\bar{\psi}(x_0, x_1, -x_2) i\gamma^2.$$

В терминах правых и левых спиноров эту симметрию можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi'_L(x_0, x_1, x_2) &= \pm \psi_L(x_0, x_1, -x_2), \quad \bar{\psi}'_L(x_0, x_1, x_2) = \pm \bar{\psi}_L(x_0, x_1, -x_2), \\ \psi'_R(x_0, x_1, x_2) &= \mp \bar{\psi}_R(x_0, x_1, -x_2), \quad \bar{\psi}'_R(x_0, x_1, x_2) = \mp \bar{\psi}_R(x_0, x_1, -x_2), \end{aligned} \quad (1.33)$$

где $\psi_{R,L}(x) = \frac{1 \pm i\gamma^2}{2} \psi(x)$, $\bar{\psi}_{R,L}(x) = \bar{\psi}(x) \frac{1 \mp i\gamma^2}{2}$.

Аналогично, как в случае (1+1)-мерной модели Гросса-Неве, вводя вспомогательное поле σ , в ведущем порядке $\frac{1}{N}$ разложения для эффективного потенциала получаем следующее выражение

$$V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{N}{2G} \sigma^2 - N \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln(p^2 + \sigma^2). \quad (1.34)$$

Делая обрезание по импульсу $\sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2} < \Lambda$ и вычисляя интеграл, считая, что $\Lambda \gg \sigma$, и отбрасывая члены, не зависящие от σ , для эффективного потенциала получим

$$V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{N}{6\pi} \sigma^3 + \frac{N}{2} \left(\frac{1}{G} - \frac{\Lambda}{\pi^2} \right) \sigma^2. \quad (1.35)$$

Необходимо произвести перенормировку. Для этого будем считать, что $G(\Lambda)$ зависит от Λ таким образом, что эффективный потенциал является конечным и не зависящим от Λ . Также ведем параметр g , имеющий размерность обратной массы,

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{G(\Lambda)} - \frac{\Lambda}{\pi^2} = \frac{1}{G} - \frac{1}{G_c}, \quad (1.36)$$

где $G_c = \frac{\pi^2}{\Lambda}$.

Параметр g не зависит от параметра обрезания Λ .

В итоге получим для перенормированного эффективного потенциала выражение

$$V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{N}{6\pi}\sigma^3 + \frac{N}{2g}\sigma^2. \quad (1.37)$$

Выполним процедуру перенормировки более систематично. Определим перенормированную константу связи как вторую производную эффективного потенциала на некотором масштабе μ

$$\frac{1}{N} \left| \frac{d^2 V_{\text{eff}}(\sigma)}{d\sigma^2} \right|_{\sigma=\mu} = \frac{1}{g(\mu)}. \quad (1.38)$$

Таким образом, для перенормированной константы связи $g(\mu)$ получим

$$\frac{1}{g(\mu)} = \frac{1}{G} - \frac{\Lambda}{\pi^2} + \frac{\mu}{\pi^2} = \frac{1}{g} + \frac{\mu}{\pi}. \quad (1.39)$$

Уравнение ренормгруппы для перенормированной константы связи имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \frac{1}{g(\mu)} = \frac{1}{\pi}. \quad (1.40)$$

При изменении масштаба энергии от μ_0 к μ константа связи меняется следующим образом

$$\frac{1}{g(\mu)} = \frac{1}{g(\mu_0)} + \frac{1}{\pi}(\mu - \mu_0). \quad (1.41)$$

Видим, что параметр g является ренормгрупповым инвариантом и не изменяется при преобразованиях $\Lambda \rightarrow \Lambda'$ и $\mu \rightarrow \mu'$

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{G(\Lambda)} - \frac{\Lambda}{\pi^2} = \frac{1}{G(\Lambda')} - \frac{\Lambda'}{\pi^2} = \frac{1}{g(\mu)} - \frac{\mu}{\pi} = \frac{1}{g(\mu')} - \frac{\mu'}{\pi}. \quad (1.42)$$

Так как в эффективный потенциал входит параметр g , то и эффективный потенциал является ренормгрупповым инвариантом и не преобразуется при изменении $\Lambda \rightarrow \Lambda'$ и $\mu \rightarrow \mu'$

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} V_{\text{eff}} = \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} V_{\text{eff}} = 0. \quad (1.43)$$

Уравнение щели для эффективного потенциала (1.37) имеет вид

$$\frac{1}{N} \frac{dV_{\text{eff}}}{d\sigma} = \frac{\sigma^2}{2\pi} + \frac{\sigma}{g} = 0. \quad (1.44)$$

При $g > 0$ минимумом эффективного потенциала является точка $\sigma = 0$. При $g < 0$ минимум эффективного потенциала достигается в точке $\sigma_0 = \frac{2\pi}{|g|}$.

В случае $g < 0$ эффективный потенциал можно записать в виде

$$V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sigma^3}{3} - \frac{\sigma_0 \sigma^2}{2} \right). \quad (1.45)$$

Фиксируем значение Λ конечной величиной и рассмотрим ситуацию в рамках неперенормированной константы связи G .

Случай $g > 0$ соответствует $G < G_c$, то есть взаимодействие не очень сильное. В этом случае в теории не происходит спонтанного нарушения киральной симметрии.

Случай $g < 0$ соответствует $G > G_c$, взаимодействие является достаточно сильным. В этом случае возникает конденсат поля $\langle \sigma \rangle \neq 0$, фермионы приобретают массу и происходит спонтанное нарушение симметрии.

Таким образом, в этой модели происходит спонтанное нарушение симметрии при достаточно сильном взаимодействии, а при слабом взаимодействии нарушения симметрии не происходит, в отличие от (1+1)-мерной модели Гросса-Неве.

Можно также пользоваться приводимым представлением γ -матриц (Приложение 7.2), как мы и будем делать в диссертации. В физике графена уравнение Дирака получается именно в таком представлении.

Используя приводимое представление, мы можем определить киральную симметрию таким же образом, как в (3+1)-мерном пространстве-времени,

$$\psi \rightarrow \gamma_5 \psi,$$

γ_5 -матрица приведена в Приложении 7.2.

В этом случае число степеней свободы удваивается и для эффективного потенциала получаем выражение

$$V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{N}{3\pi} \sigma^3 + \frac{N}{g} \sigma^2, \quad (1.46)$$

где параметр g задается выражением

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{2G(\Lambda)} - \frac{\Lambda}{\pi^2}. \quad (1.47)$$

При отрицательных значениях g конденсат σ_0 и эффективный потенциал будут иметь вид

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{|g|}, \quad V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sigma^3}{3} - \frac{\sigma_0 \sigma^2}{2} \right). \quad (1.48)$$

Также в диссертации мы будем использовать несколько другое определение параметра g

$$\frac{1}{g} = \frac{\pi}{2G(\Lambda)} - \frac{\Lambda}{\pi}. \quad (1.49)$$

В этом случае эффективный потенциал и конденсат σ_0 будут иметь вид

$$V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{N}{3\pi} \sigma^3 + \frac{N}{\pi g} \sigma^2, \quad \sigma_0 = \frac{1}{|g|}. \quad (1.50)$$

Модель Гросса-Неве в (2+1)-мерном пространстве-времени не содержит явления размерной трансмутации, как в случае КХД и (1+1)-мерной модели Гросса-Неве, и она является неперенормируемой по константе связи, а перенормируемой только в $\frac{1}{N}$ разложении.

1.3 Модель Намбу–Йона-Лазинио

Рассмотрим модель с четырехфермионным взаимодействием в (3+1)-мерном пространстве-времени, модель Намбу–Йона-Лазинио, лагранжиан которой имеет вид

$$L = \sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_k + \frac{G}{2N} \left[\left(\sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k \psi_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k i\gamma_5 \psi_k \right)^2 \right]. \quad (1.51)$$

В этой модели гамма-матрицы являются обычными (4×4) гамма-матрицами в (3+1)-мерном пространстве-времени.

Лагранжиан модели инвариантен относительно непрерывного кирального преобразования

$$\psi_k \rightarrow e^{i\theta\gamma_5} \psi_k, \quad (1.52)$$

где θ произвольный действительный параметр.

Введем линеаризованный вспомогательный лагранжиан, который имеет вид

$$\bar{L} = \bar{\psi} i\gamma^m \partial_m \psi - \bar{\psi} (\sigma + i\gamma_5 \pi) \psi - \frac{N}{2G} (\sigma^2 + \pi^2), \quad (1.53)$$

где σ, π - вспомогательные бозонные поля, σ является скалярным полем, π псевдоскалярным.

В терминах полей σ, π киральные преобразования имеют вид

$$\sigma \rightarrow \cos(2\theta)\sigma + \sin(2\theta)\pi; \quad \pi \rightarrow \cos(2\theta)\pi - \sin(2\theta)\sigma, \quad (1.54)$$

а фермионы преобразуются так же как в (1.52).

Вычислим эффективный потенциал для этой модели, который в ведущем порядке $\frac{1}{N}$ разложения выглядит как

$$e^{iNS_{\text{eff}}(\sigma, \pi)} = \int D\bar{\psi} D\psi e^{i \int \bar{L} d^4x}. \quad (1.55)$$

После интегрирования по фермионным полям получим

$$S_{\text{eff}}(\sigma, \pi) = - \int d^4x \frac{\sigma^2 + \pi^2}{2G} - i \ln \det(i\gamma^\mu \partial_\mu - \sigma - i\gamma_5 \pi). \quad (1.56)$$

Вычислим детерминант, воспользовавшись формулой

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - ABA^{-1}C), \quad (1.57)$$

в результате получим

$$\det \begin{pmatrix} p_0 - \sigma & \vec{p}\vec{\sigma} - i\pi \\ -\vec{p}\vec{\sigma} - i\pi & -p_0 - \sigma \end{pmatrix} = (\sigma^2 + \pi^2 - p_0^2 + \vec{p}^2)^2. \quad (1.58)$$

Введем эффективный потенциал

$$S_{\text{eff}}(\sigma, \pi) = -V_{\text{eff}}(\sigma, \pi) \int d^4x. \quad (1.59)$$

В результате для эффективного потенциала V_{eff} получим

$$V_{\text{eff}}(\sigma, \pi) = \frac{\Sigma^2}{2G} + 2i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln(\Sigma^2 - p^2), \quad (1.60)$$

где $\Sigma = \sqrt{\sigma^2 + \pi^2}$.

Произведем виков поворот $p_0 \rightarrow -ip_0$.

$$V_{\text{eff}}(\sigma, \pi) = \frac{\Sigma^2}{2G} - 2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln(p^2 + \Sigma^2). \quad (1.61)$$

Введем обрезание по импульсу и, вычислив интеграл, получим выражение для эффективного потенциала

$$V_{\text{eff}}(\sigma, \pi) = \frac{\Sigma^2}{2G} - \frac{1}{16\pi^2} \left[\Lambda^4 \ln \left(1 + \frac{\Sigma^2}{\Lambda^2} \right) - \Sigma^4 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{\Sigma^2} \right) + \Sigma^2 \Lambda^2 \right]. \quad (1.62)$$

Здесь не делаем перенормировку, а оставляем размерный параметр Λ , где Λ является параметром, до которого справедливо данное низкоэнергетическое взаимодействие. (Предполагаем, что наша модель является эффективной, что следует из того факта, что она является неперенормируемой, и справедлива до некоторого масштаба энергии.)

Уравнение щели имеет вид

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}(\Sigma)}{\partial \Sigma} = \frac{\Sigma}{4\pi^2} \left[\frac{4\pi^2}{G} - \Lambda^2 + \Sigma^2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{\Sigma^2} \right) \right] = 0. \quad (1.63)$$

Легко видеть, что при $G < G_c = \frac{4\pi^2}{\Lambda^2}$ уравнение (1.63) не имеет решений, кроме $\Sigma = 0$. Таким образом, в этом случае киральная симметрия не нарушена и фермионы безмассовые. А в случае $G > G_c$ уравнение (1.63) имеет одно ненулевое решение $\Sigma(G, \Lambda) \neq 0$, которое определяется уравнением щели

$$\Sigma^2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{\Sigma^2} \right) = 4\pi^2 \left(\frac{1}{G} - \frac{1}{G_c} \right). \quad (1.64)$$

Таким образом, в случае $G > G_c$ происходит спонтанное нарушение киральной симметрии, появляется массовый член и член вида $i\bar{\psi}\gamma_5\psi$

$$\bar{L} = \bar{\psi}i\gamma^m\partial_m\psi - \langle\sigma\rangle\bar{\psi}\psi - i\langle\pi\rangle\bar{\psi}\gamma_5\psi - \bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5\pi)\psi - \frac{N}{2G}(\sigma^2 + \pi^2). \quad (1.65)$$

В плоскости π, σ модель инвариантна относительно вращения вакуумного состояния на окружности $\sigma^2 + \pi^2 = \Sigma^2$. Так что можно выбрать в качестве вакуума состояние $\langle\sigma\rangle \neq 0, \langle\pi\rangle = 0$, при этом получаем тот же результат, что и при четырехфермионном взаимодействии без псевдоскалярного канала с γ^5 -матрицей.

При таком виде взаимодействия можно искать решение в виде киральной волны

$$\langle\sigma\rangle = M \sin(bx_1), \quad \langle\pi\rangle = M \cos(bx_1). \quad (1.66)$$

(До этого, конечно, предполагалось, что конденсаты не зависят от точки пространства-времени.)

Такой вакуум исследовался в рамках (1+1)-мерной модели в ряде работ, например [61; 62].

1.4 Модель Гросса-Неве в (2+1)-мерном пространстве-времени при конечной температуре и ненулевом химическом потенциале

Для термодинамического потенциала при конечных температуре и химическом потенциале несложно получить выражение (См. Приложение 7.7)

$$\Omega(\sigma) = \frac{N}{2G}\sigma^2 - N \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{\beta} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \ln \left(\left(\frac{2\pi}{\beta} \left(l + \frac{1}{2} \right) - i\mu \right)^2 + p^2 + \sigma^2 \right). \quad (1.67)$$

Воспользовавшись формулой (7.4) из Приложения 7.1 и выражениями из параграфа 1.2, приведем термодинамический потенциал (1.67) к виду

$$\Omega(\sigma) = \frac{N\sigma^3}{6\pi} + \frac{N\sigma^2}{2g} - \frac{N}{\beta} \int_0^{\infty} \frac{dp}{4\pi} \ln((1 + e^{-\beta\sqrt{p+\sigma^2}+\beta\mu})(1 + e^{-\beta\sqrt{p+\sigma^2}-\beta\mu})). \quad (1.68)$$

Исследуем теперь фазовый портрет системы, для этого найдем минимум термодинамического потенциала. Несложно получить уравнение щели

$$\frac{\partial\Omega(\sigma)}{\partial\sigma} = N\sigma \left(\frac{1}{g} + \frac{\sigma}{\pi} + \frac{T}{\pi} \ln(1 + e^{-\beta\sigma-\beta\mu}) + \frac{T}{\pi} \ln(1 + e^{-\beta\sigma+\beta\mu}) \right) = 0. \quad (1.69)$$

Функция $f_{T\mu}(\sigma)$, стоящая в скобках в выражении (1.69), возрастает по σ в интервале $(0, \infty)$.

Значения функции при $\sigma = 0$ имеет вид

$$f_{T\mu}(0) = \frac{1}{g} + \frac{T}{\pi} \ln(1 + e^{-\beta\mu}) + \frac{T}{\pi} \ln(1 + e^{\beta\mu}). \quad (1.70)$$

Из выражения (1.70) ясно, что при $g > 0$ $f_{T\mu}(0) > 0$. Поэтому при значениях $\sigma > 0$ значения функции также положительны, и в этом случае единственным решением уравнения (1.69) является точка $\sigma = 0$, то есть киральная симметрия не является нарушенной.

Пусть теперь $g < 0$ и T, μ имеют такие значения, что $f_{T\mu}(0) < 0$. Вследствие того, что функция $f_{T\mu}(\sigma)$ в скобках в (1.69) монотонно возрастающая, то обязательно существует единственная точка $\sigma_0 \neq 0$ такая, что в этой точке функция принимает нулевое значение. При значениях $\sigma < \sigma_0$ функция отрицательная, поэтому первая производная по σ термодинамического потенциала $\Omega(\sigma)$ отрицательна в интервале $(0, \sigma_0)$, то есть $\Omega(\sigma)$ убывает на этом интервале и, значит, $\Omega(0) > \Omega(\sigma_0)$. Таким образом, показали, что при $g < 0$ и при $f_{T\mu}(0) < 0$ точка $\sigma_0 \neq 0$ является глобальным минимумом термодинамического потенциала и симметрия модели спонтанно нарушена.

$\sigma_0 \rightarrow 0$ при $f_{T\mu}(0) \rightarrow 0$. Очевидно, что при $g < 0$ и $f_{T\mu}(0) > 0$ уравнение щели будет иметь только один корень $\sigma = 0$. Это означает, что при таких значениях T, μ , когда $f_{T\mu}(0)$ становится положительной величиной, симметрия модели восстанавливается.

На критической кривой температура и химический потенциал связаны между собой соотношением

$$\mu(T) = T \ln K(T), \quad (1.71)$$

где $K(T) = -1 + \frac{1}{2}e^{\beta M} + \sqrt{[-1 + \frac{1}{2}e^{\beta M}]^2 - 1}$, $M = \frac{2\pi}{|g|}$ - масса фермионов при $T, \mu = 0$.

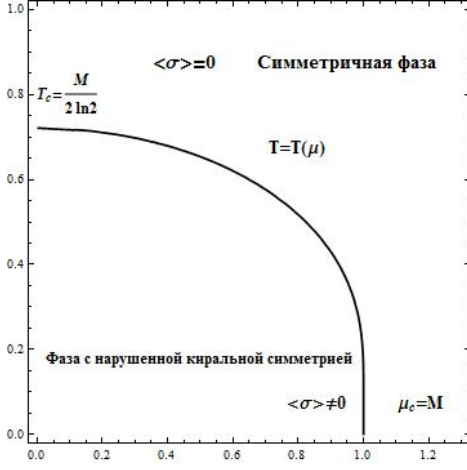


Рисунок 1.1 — Фазовый портрет в терминах (μ, T) для $(2+1)$ -мерной модели Гросса-Неве.

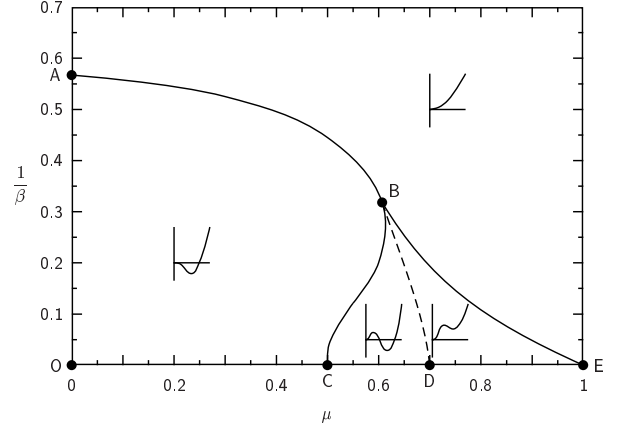


Рисунок 1.2 — Фазовый портрет $(1+1)$ -мерной модели Гросса-Неве в плоскости (T, μ) , на осях отложены $\frac{T}{\sigma_0}$ и $\frac{\mu}{\sigma_0}$. График взят из [64]

Фазовый портрет в терминах (μ, T) представлен на Рис. 1.1. При нулевом химическом потенциале критическая температура задается выражением $T_c = \frac{M}{2 \ln 2}$. При нулевой температуре значение химического потенциала имеет вид $\mu(0) = M$. Отметим, что при пересечении критической кривой в теории происходит фазовый переход второго рода, так как параметр порядка (точка глобального минимума потенциала) является непрерывной функцией внешних параметров T, μ и непрерывно переходит в ноль при приближении к критической кривой.

Рассмотрим случай нулевой температуры. Для этого в формуле (1.68) устремим β к бесконечности. В результате получим для термодинамического потенциала

$$\Omega(\sigma) = \frac{N\sigma^3}{6\pi} + \frac{N}{2g}\sigma^2 - N\theta(\mu - \sigma) \int_0^{\sqrt{\mu^2 - \sigma^2}} \frac{pdp}{2\pi} (\mu - \sqrt{p^2 - \sigma^2}). \quad (1.72)$$

Вычислив интеграл, получим следующее выражение для термодинамического потенциала

$$\Omega(\sigma) = \frac{N\sigma^3}{6\pi} + \frac{N\sigma^2}{2g} - \frac{N}{12\pi}\theta(\mu - \sigma)(\mu - \sigma)^2(\mu + 2\sigma). \quad (1.73)$$

При $g > 0$ ни при каких значениях химического потенциала киральная симметрия не нарушается, то есть термодинамический потенциал имеет минимум в точке $\sigma = 0$.

Рассмотрим случай $g < 0$.

При $\mu < M$ глобальный минимум термодинамического потенциала находится в точке $\sigma = M$, а при $\mu > M$ в точке $\sigma = 0$. При $\mu = \mu_c = M$ происходит фазовый переход первого рода из фазы с нарушенной киральной симметрией в симметричную фазу. При $\mu = \mu_c = M$ минимумом термодинамического потенциала является весь отрезок от 0 до M эквивалентных минимумов.

На фазовой диаграмме Рис. 1.1 точка $(M, 0)$ является трикритической точкой, поскольку в ней кривая фазовых переходов меняет свой характер с кривой фазовых переходов первого рода на кривую фазовых переходов второго рода.

1.5 Модель Гросса-Неве в (1+1)-мерном пространстве-времени при конечной температуре

Термодинамический потенциал модели при конечной температуре и нулевом химическом потенциале имеет вид

$$\Omega(\sigma) = \frac{1}{2G}\sigma^2 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp}{2\pi} \ln \left(\left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 + p^2 + \sigma^2 \right). \quad (1.74)$$

Продифференцировав по σ , получим, что уравнение щели имеет вид

$$\frac{1}{G} = \int \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{\beta} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right)^2 + p^2 + \sigma^2}. \quad (1.75)$$

Используя следующую формулу

$$\frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2 + \tilde{\Omega}^2} = \frac{1}{2\tilde{\Omega}} \operatorname{th} \left(\frac{\tilde{\Omega}}{2T} \right), \quad (1.76)$$

прибавляя и отнимая выражение, соответствующее нулевой температуре, и используя определение для σ_0 (1.23), для уравнения щели (1.75) получим

$$\frac{1}{\pi} \ln \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{1}{\pi} S_1 \left(\frac{\sigma}{2\pi T} \right), \quad (1.77)$$

где функция S_1 определяется следующим образом

$$S_1 \left(\frac{\sigma}{2\pi T} \right) = \int_0^{\infty} \frac{dp}{\tilde{\Omega}} \left(\operatorname{th} \frac{\tilde{\Omega}}{2T} - 1 \right) = -2 \int_0^{\infty} dp \frac{1}{\tilde{\Omega}} \left(\exp \frac{\tilde{\Omega}}{T} + 1 \right)^{-1}, \quad (1.78)$$

где $\tilde{\Omega} = \sqrt{p^2 + \sigma^2}$.

Решением уравнения (1.77) является конденсат $\sigma(T)$. При увеличении температуры T конденсат σ уменьшается и стремится к нулю при $T \rightarrow T_c$, где T_c - критическая температура. При малых σ правую часть в выражении (1.77) можно записать приближенно как

$$2 \int_0^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \left[\frac{1}{p} \operatorname{th} \left(\frac{p}{2T} \right) - \frac{1}{\sqrt{p^2 + \sigma^2}} \right]. \quad (1.79)$$

Проинтегрировав по частям, можно переписать интеграл от первого слагаемого в выражении (1.79) в виде

$$\frac{1}{\pi} \left[\ln \left(\frac{p}{2T} \right) \operatorname{th} \left(\frac{p}{2T} \right) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} dx \ln x \operatorname{ch}^{-2} x \right]. \quad (1.80)$$

Интеграл (1.80) сходится и равняется $-\ln \left(\frac{4 \exp \gamma}{\pi} \right)$, что можно получить, дифференцируя по μ следующую формулу

$$\int_0^{\infty} dx x^{\mu-1} \operatorname{ch}^{-2} ax = \frac{4}{(2a)^\mu} (1 - 2^{2-\mu}) \Gamma(\mu) \zeta(\mu - 1) \quad (1.81)$$

и используя следующие соотношения $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, $\zeta'(0) = \gamma$, $\Gamma'(1) = -\gamma$.

Второй член выражения (1.79) равен $\operatorname{arcsch}\left(\frac{p}{\sigma}\right) = \ln\left[\frac{p}{\sigma} + \sqrt{\frac{p^2}{\sigma^2} + 1}\right]$.

В итоге получим

$$\ln\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) = \ln\left(\sigma \frac{e^\gamma}{\pi T}\right). \quad (1.82)$$

Для критической температуры в результате получаем следующее выражение

$$T_c = \sigma_0 \frac{e^\gamma}{\pi}. \quad (1.83)$$

Для того чтобы исследовать поведение σ при приближении температуры к критическому значению, а также для получения более удобного для численного исследования представления правой части уравнения (1.77), преобразуем уравнение (1.75), как мы делали ранее для получения уравнения (1.77), но не производя суммирование,

$$\frac{1}{G} - \int \frac{dp}{(2\pi)} \frac{1}{p^2 + \sigma^2} = \frac{1}{\pi} S_1(\hat{\sigma}) = \frac{1}{\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\omega_m^2 + \sigma^2}} - \int_0^{\infty} \frac{d\omega_m}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\omega_m^2 + \sigma^2}}, \quad (1.84)$$

где $\hat{\sigma} = \frac{\sigma}{2\pi T}$.

Левая часть уравнения дает тот же результат, как и ранее (1.77), и уравнение сводится к виду

$$\ln \frac{\sigma}{\sigma_0} = S_1(\hat{\sigma}), \quad (1.85)$$

где

$$S_1(\hat{\sigma}) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} dm \right) \frac{1}{\sqrt{(m + \frac{1}{2})^2 + \hat{\sigma}}}. \quad (1.86)$$

Удобно сумму в выражении (1.86) переписать в виде, вычитая и прибавляя сумму с $\sigma = 0$.

$$S_1(\hat{\sigma}) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{(m + \frac{1}{2})^2 + \hat{\sigma}}} - \frac{1}{m + \frac{1}{2}} \right) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m + \frac{1}{2}} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dm}{\sqrt{(m + \frac{1}{2})^2 + \hat{\sigma}}}. \quad (1.87)$$

Интегрируя до параметра обрезания Λ , для третьего члена в выражении (1.87) получаем: $\operatorname{arcsch}(\Lambda/\hat{\sigma}) \rightarrow \ln(2\Lambda/\hat{\sigma})$.

Сумма во втором члене сводится к дигамма-функции ψ : $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m + \frac{1}{2}} = \gamma + \ln 4 + \psi(\Lambda + \frac{3}{2}) = \gamma + \ln 4 + \psi(\Lambda + \frac{1}{2}) + \frac{1}{\Lambda + \frac{1}{2}}$, Дигамма-функция определяется через гамма-функцию следующим соотношением $\psi(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \frac{d\Gamma(x)}{dx}$.

Используя разложение функции ψ при больших значениях Λ : $\psi(\Lambda + \frac{1}{2}) = \ln \Lambda - \frac{1}{2\Lambda} - \frac{1}{4\Lambda^2}$, получим

$$S_1(\hat{\sigma}) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{(m + \frac{1}{2})^2 + \hat{\sigma}}} - \frac{1}{m + \frac{1}{2}} \right) + \ln(2e^\gamma \hat{\sigma}) = \tilde{S}_1(\hat{\sigma}) + \ln(2e^\gamma \hat{\sigma}). \quad (1.88)$$

В итоге получим уравнение щели в виде, удобном для численного исследования

$$\ln \frac{T}{T_c} = \tilde{S}_1(\hat{\sigma}). \quad (1.89)$$

Теперь получим выражение для поля σ при температуре, близкой к критической, для этого разложим \ln в левой части выражения (1.89) $\ln \frac{T}{T_c} = \frac{T_c}{T} - 1$, где T_c дается выражением (1.83).

Раскладывая правую часть выражения (1.89) до линейного члена по σ , получим асимптотику для σ при приближении температуры к критическому значению

$$\sigma(T \rightarrow T_c) = \pi T_c \sqrt{\frac{8}{7\zeta(3)}} \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}. \quad (1.90)$$

Для того чтобы получить асимптотику для σ при малых температурах, вернемся к выражению (1.77)

$$S(\hat{\sigma}) = \ln \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right) = \int_0^\infty \frac{dp}{\tilde{\Omega}} \operatorname{th} \left(\frac{\tilde{\Omega}}{2T} - 1 \right). \quad (1.91)$$

Разложим th в ряд $\operatorname{th} \left(\frac{\tilde{\Omega}}{2T} - 1 \right) = 2 \sum_{m=1}^\infty (-1)^m e^{-\frac{m\tilde{\Omega}}{T}}$.

Взяв интеграл по импульсу, получим

$$S(\hat{\sigma}) = \ln \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right) = 2 \sum_{m=1}^\infty (-1)^m K_0 \left(\frac{m\sigma}{T} \right). \quad (1.92)$$

Функции Магдональда имеют следующую асимптотику на бесконечности $K_0 \left(\frac{m\sigma}{T} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2m\sigma}} e^{-\frac{m\sigma}{T}}$.

Окончательно, получим асимптотику для σ при малых температурах

$$\sigma(T \rightarrow 0) = \sigma_0 \left(1 - \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{\sigma_0}{T}} e^{-\frac{\sigma_0}{T}}} \right) + O(e^{-2\frac{\sigma_0}{T}}). \quad (1.93)$$

1.6 Модель Гросса-Неве в (1+1)-мерном пространстве-времени при ненулевом химическом потенциале и конечной температуре

В случае модели Гросса-Неве в (1+1)-мерном пространстве-времени при ненулевом химическом потенциале и конечной температуре вычисления аналогичны уже проделанным в случае (2+1)-мерного пространства-времени.

Термодинамический потенциал получается в виде

$$\Omega(\sigma) = V_0 - \frac{N}{\beta} \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi} \left(\ln(1 + e^{-\beta\sqrt{p^2+\sigma^2}+\beta\mu}) + \ln(1 + e^{-\beta\sqrt{p^2+\sigma^2}-\beta\mu}) \right), \quad (1.94)$$

где V_0 задается выражением (1.29).

Уравнение щели имеет следующий вид

$$\Omega'(\sigma) = \frac{N\sigma}{\pi} \ln \frac{\sigma}{\sigma_0} + \frac{N\sigma}{\pi} \int_0^\infty \frac{dp}{\sqrt{p^2 + \sigma^2}} \left(\frac{1}{e^{\beta\sqrt{p^2 + \sigma^2} - \beta\mu} + 1} + \frac{1}{e^{\beta\sqrt{p^2 + \sigma^2} + \beta\mu} + 1} \right) = 0. \quad (1.95)$$

$\sigma = 0$ всегда является решением уравнения щели. Уравнение щели для $\sigma \neq 0$ имеет вид

$$\ln \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right) + \int_0^\infty \frac{dp}{\sqrt{p^2 + \sigma^2}} \left(\frac{1}{e^{\beta\sqrt{p^2 + \sigma^2} - \beta\mu} + 1} + \frac{1}{e^{\beta\sqrt{p^2 + \sigma^2} + \beta\mu} + 1} \right) = 0. \quad (1.96)$$

Находя решения уравнения щели при различных значениях T, μ и находя минимальное из них, получим фазовый портрет модели, изображенный на Рис. 1.2. В области ABCO реализуется фаза с нарушенной киральной симметрией, в области над кривой ABE реализуется симметричная фаза, в области BDCE термодинамический потенциал имеет два минимума при $\sigma = 0$ и $\sigma \neq 0$. В области BDC энергетически выгодным является минимум в точке $\sigma \neq 0$, а минимум в точке $\sigma = 0$ является метастабильным. Таким образом, в области BDC реализуется фаза с нарушенной киральной симметрией. В области BED, наоборот, энергетически выгодным является минимум в точке $\sigma = 0$ и в системе реализуется симметричная фаза. Кривая фазового перехода BD является кривой фазового перехода первого рода между фазой с нарушенной киральной симметрией и симметричной фазой. Кривая фазового перехода AB является кривой фазового перехода второго рода. Точка B, в которой меняется тип фазового перехода, является трикритической точкой.

1.7 Модель Гросса-Неве в (1+1)-мерном пространстве-времени при ненулевом химическом потенциале и нулевой температуре

В выражении для термодинамического потенциала при конечной температуре (1.94) устремим температуру к нулю $T \rightarrow 0$, то есть $\beta \rightarrow \infty$, в результате получим, что последний член под интегралом дает нулевой вклад, а первый член под интегралом дает ненулевой вклад для тех значений импульса p , при которых под экспонентой стоит положительное выражение.

В итоге для термодинамического потенциала модели Гросса-Неве при ненулевом химическом потенциале и нулевой температуре получим следующее выражение

$$\Omega(\sigma) = V_0 + \frac{N\theta(\mu - \sigma)}{4\pi} \left(-2\mu\sqrt{\mu^2 - \sigma^2} + \sigma^2 \ln \frac{(\mu + \sqrt{\mu^2 - \sigma^2})^2}{\sigma^2} \right). \quad (1.97)$$

Исследуем фазовую структуру этой модели, то есть поведение минимума термодинамического потенциала. Первая производная термодинамического потенциала имеет вид

$$\Omega'(\sigma) = \frac{\sigma}{2\pi} \left(\theta(\mu - \sigma) \ln \frac{(\mu + \sqrt{\mu^2 - \sigma^2})^2}{\sigma^2} + \ln \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} \right) = 0. \quad (1.98)$$

При значениях $\mu < \frac{\sigma_0}{2}$ термодинамический потенциал имеет только один минимум в точке $\sigma = \sigma_0$, а точка $\sigma = 0$ является локальным максимумом. При $\frac{\sigma_0}{2} < \mu < \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}}$ термодинамический потенциал имеет два локальных минимума в точках $\sigma = 0$ и $\sigma = \sigma_0$, глобальным

минимумом является минимум в точке $\sigma = \sigma_0$, минимум в точке $\sigma = 0$ является метастабильным вакуумом. Термодинамический потенциал в этом случае имеет локальный максимум при некотором $\sigma \neq 0$. В точке $\mu = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}}$ минимумы $\sigma = 0$ и $\sigma = \sigma_0$ являются эквивалентными, и в этой точке происходит фазовый переход первого рода из фазы с нарушенной киральной симметрией в симметричную фазу.

При $\frac{\sigma_0}{\sqrt{2}} < \mu < \sigma_0$ термодинамический потенциал также имеет два минимума, но глобальным является минимум в точке $\sigma = 0$.

При $\mu > \sigma_0$ термодинамический потенциал имеет только один минимум в точке $\sigma = 0$. Все это согласуется с фазовым портретом (Рис.1.2) из параграфа 1.6 (при $T = 0$).

1.8 Асимптотическая свобода в КХД

Определим аналог постоянной тонкой структуры в КХД

$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}. \quad (1.99)$$

α_s является бегущей за счет радиационных поправок. Ее изменение определяется β функцией, и уравнение ренормгруппы для нее имеет вид [63]

$$\mu^2 \frac{d\alpha_s}{d\mu^2} = \beta(\alpha_s) = -(b_0\alpha_s^2 + b_1\alpha_s^3 + b_2\alpha_s^4), \quad (1.100)$$

где μ – энергетический масштаб, коэффициенты равны $b_0 = (33 - 2N_f)/(12\pi)$, $b_1 = (153 - 19N_f)/(24\pi)$, $b_2 = (2857 - \frac{5033}{9}N_f + \frac{325}{27}N_f^2)/(128\pi^3)$, N_f - число фермионов (ароматов).

Все константы указаны в модифицированной минимальной схеме вычитаний \overline{MS} .

Знак минус показывает, что в модели присутствует асимптотическая свобода, то есть константа связи уменьшается с увеличением энергии или с уменьшением расстояния.

Если отбросить все члены, кроме b_0 , то для α_s и для константы связи g_s можно получить следующие выражения

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{1}{b_0 \ln(\frac{\mu^2}{\Lambda_{QCD}^2})}, \quad g_s^2(\mu) = \frac{g_s^2(\mu_0)}{1 + \frac{b_0}{2\pi} g_s^2(\mu_0) \ln(\frac{\mu}{\mu_0})}. \quad (1.101)$$

При энергиях равных Λ_{QCD} константа связи обращается в бесконечность, что согласуется с тем, что кварки не находятся при таких энергиях в свободном состоянии, а связаны в адроны. То есть, при $\mu = \Lambda_{QCD}$ ряд теории возмущений взрывается, таким образом, при меньших энергиях пертурбативный подход не применим. Однако, при больших μ константа связи уменьшается и, когда она становится малой, можно работать в рамках теории возмущений.

1.9 Нарушение киральной симметрии в КХД

Лагранжиан КХД в киральном пределе имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \sum_{l=u,d,s} (\bar{q}_{R,l} i \not{D} q_{R,l} + \bar{q}_{L,l} i \not{D} q_{L,l}) - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu,a} \mathcal{G}_a^{\mu\nu}. \quad (1.102)$$

Лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0$ (1.102) обладает глобальной симметрией $U(3)_L \times U(3)_R$, которая может быть переписана в следующем виде $SU_L(3) \times SU_R(3) \times U_R(1) \times U_L(1)$.

Вычисления на решетке показывают, что появляется ненулевой конденсат

$$\langle \bar{q}^i q^k \rangle = v \delta^{ik}, \quad (1.103)$$

где $q^1 = u, q^2 = d, q^3 = s$.

Этот конденсат будет нарушать киральную симметрию $SU_L(3) \times SU_R(3)$ до диагональной подгруппы $SU_{L+R}(3)$

$$SU_L(3) \times SU_R(3) \rightarrow SU_{L+R}(3), \quad SU_V(3) \times SU_A(3) \rightarrow SU_V(3). \quad (1.104)$$

Таким образом, в КХД нарушается киральная симметрия, а $\langle \bar{q}q \rangle$ является параметром порядка.

1.10 Цветовая сверхпроводимость

В последнее время много усилий было потрачено на понимание поведения КХД при экстремальных условиях, таких как большие температуры и большие плотности, то есть большие значения химического потенциала. При высоких температурах привычная адронная фаза КХД, в которой кварки связаны в адроны, сменяется так называемой кварк-глюонной плазмой, где кварки не связаны в адроны, а имеется газ из кварков и глюонов. Эта фаза, возможно, предшествует адронизации в ранней вселенной, и ведется огромная работа по её изучению. При низких температурах и больших значениях плотности (химического потенциала) под влиянием сильного взаимодействия кварки могут образовать дикварковый конденсат (конденсат куперовских пар), и тем самым образуется фаза с цветовой сверхпроводимостью.

Возможность образования куперовских пар из кварков была высказана Иваненко Д.Д и Курдгелайдзе Д. Ф. даже раньше появления КХД [65]. После возникновения КХД с ее свойством асимптотической свободы [66], [67] стало ясно, что фаза с кварковой материей (quark matter phase, любая фаза, состоящая из кварков, а не из адронов) может существовать при достаточно высоких плотностях [68], [69], [70], [71], [72]. Изучение куперовского спаривания кварков рассматривалось в [73], [74], где впервые был введен термин "цветовая сверхпроводимость" (color superconductivity) и в [75], [76], где была произведена классификация многих возможных видов дикваркового конденсата. В [77], [78] было произведено вычисление в рамках приближения среднего поля с одним ароматом в модели Намбу–Йона-Лазинио. Но только с появлением предсказания, что значение щели достаточно велико [79], [80], и после рассмотрения фазы запираания цвета [81] феноменология кварковой материи с цветовой

сверхпроводимостью стала активно изучаться. В настоящее время есть несколько обзоров на эту тему [82], [83], [76], [84], [85], [86], [87], [88], [89], [90], [91], [92], [93], [94], [95].

Возможно, при больших плотностях возникает так называемая фаза запираания цвета (color flavour locked phase, CFL phase), при которой цветовая симметрия нарушается таким образом, что остаточная группа симметрии смешивает преобразование цвета и преобразование аромата.

В фазе запираания цвета конденсат имеет следующий вид

$$\langle q_i^{T\alpha} C \gamma^5 q_j^\beta \rangle = v \epsilon^{\alpha\beta n} \epsilon_{ijn}, \quad (1.105)$$

где суммирование происходит по третьему индексу ϵ , что и смешивает цвет с ароматом.

Так как левые и правые поля преобразуются под действием $SU_{L-R}(3)$ по-разному, то конденсат нарушает группу преобразований $SU_L(3) \times SU_R(3)$ до $SU_{L+R}(3)$.

Таким образом, преобразование подгруппы SU_{L+R+c} , относительно которой конденсат остается инвариантным, имеет вид

$$q_i^\alpha \rightarrow (D_{CFL})_{\beta}^{\alpha} (D_{CFL}^*)_{i}^j q_j^\beta. \quad (1.106)$$

Так как $(D_{CFL}^*)_{\alpha}^j = (D_{CFL}^{-1})_{\alpha}^j$, то $(D_{CFL})_{\beta}^{\alpha} (D_{CFL}^*)_{i}^j = (D_{CFL})_{\beta}^{\alpha} (D_{CFL}^{-1})_{\alpha}^j = \delta_{\beta}^j$.

Если индекс аромата сделать контрвариантным, то получим преобразование для кварков в виде

$$q^{\alpha i} \rightarrow (D_{CFL})_{\beta}^{\alpha} (D_{CFL})_{i}^j q^{\beta j}, \quad (1.107)$$

что объясняет обозначение $(L + R) + c$, где $L + R$ обозначает, что левые и правые кварки преобразуются одинаково и одновременно, а все обозначение показывает, что преобразования цветовой симметрии и ароматной симметрии производятся одновременно с одной и той же матрицей.

Таким образом, симметрия нарушается как

$$SU_c(3) \times SU_L(3) \times SU_R(3) \times U_V(1) \rightarrow SU_{L+R+c}(3) \times Z_2. \quad (1.108)$$

Цветовая группа и флейворная группа действуют с одной и той же матрицей одновременно (причем одной и той же для левых и правых полей, то есть диагональной подгруппой $SU_{L+R}(3)$). Z_2 обозначает, что группа $U_V(1)$ нарушается до подгруппы Z_2 , то есть у кварков можно менять знак $q \rightarrow -q$, при этом, очевидно, конденсат не меняется.

Существует другой вид конденсата, двухцветовая сверхпроводимость (2SC), который имеет вид

$$\langle q_i^{T\alpha} C \gamma^5 q_j^\beta \rangle = v \epsilon^{\alpha\beta 3} \epsilon_{ij} = v \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{ij}. \quad (1.109)$$

В этом случае рассматриваются только два аромата.

При этом нарушение симметрии происходит по следующей схеме

$$SU_c(3) \times SU_L(2) \times SU_R(2) \times U_V(1) \rightarrow SU_c(2) \times Z_2 \times SU_L(2) \times Z_2 \times SU_R(2) \times Z_2.$$

Под действием остаточной группы поля преобразуются следующим образом

$$SU_L(2) \times Z_2 : q_{Li}^\alpha \rightarrow \pm \omega_i^j q_{Lj}^\alpha, \quad \omega \in SU(2), \quad (1.110)$$

$$SU_R(2) \times Z_2 : q_{Ri}^\alpha \rightarrow \pm \omega_i^j q_{Rj}^\alpha, \quad \omega \in SU(2), \quad (1.111)$$

$$SU_c(2) \times Z_2 : q_i^a \rightarrow \pm \omega_b^a q_i^b, q_i^3 \rightarrow \pm q_i^3, \quad \omega \in SU_c(2). \quad (1.112)$$

Изучению дикваркового конденсата и его борьбы с киральным конденсатом в модифицированной модели Гросса-Неве (с двумя каналами взаимодействия, киральным и дикварковым) в (2+1)-мерном пространстве-времени посвящены 2 и 3 главы диссертации. Там существует только один аромат и один цвет кварка, поэтому не происходит различных сложных нарушений симметрий (как это происходит в случае фазы запираания цвета), а возникновение дикваркового конденсата нарушает U(1) симметрию (которая по сути здесь является аналогом цветовой симметрии $SU_c(3)$ в случае трех ароматов и цветов) до Z_2 .

1.11 Модель Ходоса

Возникновение сверхпроводящего конденсата в (1+1)-мерном пространстве-времени в обобщенной модели Гросса-Неве было исследовано в работе [3]. Обобщенную модель Гросса-Неве с двумя каналами четырехфермионного взаимодействия (киральным и сверхпроводящим), рассмотренную в работе [3], будем называть моделью Ходоса (по имени одного из авторов этой работы).

Лагранжиан модели Ходоса, рассмотренный в работе [3], имеет вид

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^i i\gamma^\mu \partial_\mu \psi^i + \frac{G_1}{2N} [\bar{\psi}^i \psi^i][\bar{\psi}^j \psi^j] + 2\frac{G_2}{N} (\bar{\psi}^i \gamma_5 \psi^j)(\bar{\psi}^i \gamma_5 \psi^j) - \mu \psi^\dagger \psi. \quad (1.113)$$

На первый взгляд не понятно, как дополнительное четырехфермионное взаимодействие может дать сверхпроводящий конденсат. Однако, четырехфермионное взаимодействие, стоящее в лагранжиане, можно переписать в следующем виде

$$2G_2 \bar{\psi}^i \gamma_5 \psi^j \bar{\psi}^i \gamma_5 \psi^j = -G_2 [\epsilon_{\alpha\beta} \psi_\alpha^\dagger \psi_\beta^\dagger][\epsilon_{\gamma\delta} \psi_\gamma^j \psi_\delta^j], \quad (1.114)$$

что несложно проверить, записав покомпонентно фермионное поле и учтя, что $(\psi_1)^2 = (\psi_2)^2 = 0$.

Этот лагранжиан уже больше подходит для возникновения сверхпроводящего дикваркового конденсата.

В (1+1)-мерном пространстве-времени матрицу зарядового сопряжения можно ввести следующим образом $C = \gamma^1 = -i\sigma_2 = -\epsilon$, где ϵ это антисимметричный тензор 2 ранга и $\epsilon_{12} = 1$. Таким образом, взаимодействие можно переписать в виде

$$\begin{aligned} [\epsilon_{\alpha\beta} \psi_\alpha^\dagger \psi_\beta^\dagger][\epsilon_{\gamma\delta} \psi_\gamma^j \psi_\delta^j] &= (\psi^T \epsilon \psi)(\psi^\dagger \epsilon \psi^{\dagger T}) = \\ &= (\psi^T C \psi)(\psi^\dagger C \psi^{\dagger T}) = -(\psi^T C \psi)(\bar{\psi} C \bar{\psi}^T). \end{aligned} \quad (1.115)$$

Комплексное сопряжение выполняется следующим образом

$$(\psi^\dagger C \psi^{\dagger T})^* = -(\psi^\dagger C \psi^{\dagger T})^\dagger = -\psi^T C \psi, \quad (\bar{\psi} C \bar{\psi}^T)^* = -(\bar{\psi} C \bar{\psi}^T)^\dagger = \psi^T C \psi. \quad (1.116)$$

Введем эквивалентный лагранжиан со вспомогательными полями σ , Δ' и Δ'^*

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - \sigma - \mu\gamma^0)\psi - \frac{\sigma^2}{2G_1} - \frac{\Delta'^\dagger \Delta'}{G_2} + \Delta' \epsilon_{\alpha\beta} \psi_\alpha^\dagger \psi_\beta^\dagger - \Delta'^\dagger \epsilon_{\alpha\beta} \psi_\alpha^i \psi_\beta^i. \quad (1.117)$$

Уравнения движения для скалярных полей Δ' и Δ'^* имеют вид

$$\Delta' = -G_2 \psi^T \epsilon \psi, \quad \Delta'^* = G_2 \psi^\dagger \epsilon \psi^{\dagger T}. \quad (1.118)$$

Эффективное действие вычисляется взятием функционального интеграла и имеет вид $S_{\text{eff}}(\sigma, \Delta', \Delta'^*) = -N \int d^4x \left(\frac{\sigma^2}{2G_1} + \frac{\Delta'^\dagger \Delta'}{G_2} \right) - \frac{iN}{2} \text{Tr} \ln(4\Delta'^2 + AC^{-1}A^TC) =$
 $= N \int d^4x \left(-\frac{\sigma^2}{2G_1} - \frac{\Delta'^\dagger \Delta'}{G_2} \right) - \frac{iN}{2} \text{Tr} \ln A^T A - \frac{iN}{2} \text{Tr} \ln[\mathbf{1} + 4\Delta'^2 (A^T)^{-1} \sigma_2 A^{-1} \sigma_2]$,
 где $A = \gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - \sigma - \mu\gamma^0) = i\partial_0 + i\sigma_3 \partial_x - \mu - \sigma\sigma_1$.

Введем переменную $\Delta^2 = 4\Delta'^2$ и получим эффективный потенциал в виде

$$V_{\text{eff}}(\sigma, \Delta) = \frac{\sigma^2}{2G_1} + \frac{\Delta^2}{4G_2} + V^{(1)}(\sigma, \Delta), \quad (1.119)$$

где $V^{(1)}(\sigma, \Delta) = \frac{iN}{2} (\text{Tr} \ln A^T A + \text{Tr} \ln[\mathbf{1} + 4\Delta'^2 (A^T)^{-1} \sigma_2 A^{-1} \sigma_2])$.

Сделаем замену $G_2 \rightarrow G'_2 = 4G_2$ и далее опустим штрих у константы связи. Можно было в изначальном лагранжиане (1.113) ввести константу связи в третьем члене как $\frac{G_2}{2N}$.

Уравнения щели имеют вид

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \sigma^2} = -\frac{1}{2G_1} - i \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{[p_0^2 - p_1^2 + \mu^2 + \Delta^2 - \sigma^2]}{D} = 0, \quad (1.120)$$

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \Delta^2} = -\frac{1}{G_2} - i \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{[p_0^2 - p_1^2 - \mu^2 - \Delta^2 + \sigma^2]}{D} = 0, \quad (1.121)$$

где

$$D = [p_0^2 - p_1^2 - \Delta^2 + \sigma^2 - \mu^2]^2 - 4[\sigma^2 p_0^2 + \mu^2 p_1^2 - \sigma^2 p_1^2].$$

Знаменатель D имеет четыре полюса $\pm p_+$, $\pm p_-$, где $p_\pm = \sqrt{b_1 \pm 2b_2}$, $b_1 = \Delta^2 + \sigma^2 + \mu^2 + p_1^2$, $b_2 = [\Delta^2 \sigma^2 + \mu^2(p_1^2 + \sigma^2)]^{\frac{1}{2}}$.

Вычислим интеграл с помощью вычетов, учитывая, что, для того чтобы правильно учесть роль химического потенциала, обход полюсов имеет вид $p_0 \rightarrow p_0 + i\epsilon \text{sgn} p_0$, где $\epsilon \rightarrow 0^+$ (см. Приложение 7.7). Затем проинтегрируем уравнения щели (1.120), (1.121) по σ^2 и Δ^2 , соответственно, сложим их и отбросим члены, не зависящие от σ и Δ , в результате получим

$$V^{(1)}(\sigma, \Delta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\Lambda dp_1 [p_+ + p_-]. \quad (1.122)$$

При конечной температуре получен следующий результат

$$V^{(1)}(\sigma, \Delta, T) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\Lambda dp_1 [p_+ + p_- + \frac{2}{\beta} \ln(1 + e^{-\beta p_+}) + \frac{2}{\beta} \ln(1 + e^{-\beta p_-})]. \quad (1.123)$$

Рассмотрим случай нулевой температуры и нулевого химического потенциала $T = 0, \mu = 0$.

В выражении (1.122) можно вычислить интеграл и в итоге получить выражение для неперенормированного эффективного потенциала

$$V_{\text{eff}}(\sigma, \Delta) = \Delta^2 \left[\frac{1}{G_2} - \frac{1}{4\pi} \right] + \sigma^2 \left[\frac{1}{2G_1} - \frac{1}{4\pi} \right] - \frac{1}{4\pi} \left[(\Delta + \sigma)^2 \ln \left(\frac{2\Lambda}{\Delta + \sigma} \right) + (\Delta - \sigma)^2 \ln \left(\frac{2\Lambda}{|\Delta - \sigma|} \right) \right]. \quad (1.124)$$

Для того чтобы исключить расходимости, достаточно предположить, что константы связи G_1 и G_2 зависят от Λ , тем самым ввести два параметра M_1 и M_2

$$\frac{1}{2G_1} \equiv \frac{1}{2G_1(\Lambda)} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{2\Lambda}{M_1}, \quad \frac{1}{G_2} \equiv \frac{1}{G_2(\Lambda)} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{2\Lambda}{M_2}. \quad (1.125)$$

Таким образом, эффективный потенциал может быть записан в виде

$$V_{\text{eff}}(\sigma, \Delta) = -\frac{\Delta^2}{4\pi} - \frac{\sigma^2}{4\pi} - \frac{\Delta^2 + \sigma^2}{2\pi} \ln M_1 - \frac{\Delta^2}{2\pi} \ln \frac{M_2}{M_1} - \frac{1}{4\pi} [(\Delta + \sigma)^2 \ln(\Delta + \sigma) + (\Delta - \sigma)^2 \ln(|\Delta - \sigma|)]. \quad (1.126)$$

Введем безразмерный параметр δ

$$\frac{\delta}{4\pi} \equiv \frac{1}{G_2} - \frac{1}{2G_1} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{M_1}{M_2}. \quad (1.127)$$

Перепишем эффективный потенциал в терминах M_1 и δ

$$4\pi V_{\text{eff}}(M, \Delta) = \delta \Delta^2 - \Delta^2 - M^2 + (M - \Delta)^2 \ln \left| \frac{M - \Delta}{M_1} \right| + (M + \Delta)^2 \ln \left(\frac{M + \Delta}{M_1} \right). \quad (1.128)$$

Эффективный потенциал не имеет минимума, в котором Δ и σ одновременно отличны от нуля. Он имеет два минимума $(\sigma_0, 0)$ и $(0, \Delta_0)$, где $\sigma_0 = M_1$, $\Delta_0 = M_1 e^{-\frac{\delta}{2}}$. Значения эффективного потенциала в этих точках равны

$$V_{\text{eff}}(\Delta_0, \sigma = 0) = -\frac{M_1^2 e^{-\delta}}{4\pi}, \quad V_{\text{eff}}(\Delta = 0, \sigma_0) = -\frac{M_1^2}{4\pi}. \quad (1.129)$$

Таким образом, глобальным минимумом эффективного потенциала является $\sigma = 0, \Delta \neq 0$ в случае $\delta < 0$. В случае $\delta > 0$ глобальным минимумом является $\sigma \neq 0, \Delta = 0$.

В модели реализуется либо сверхпроводящая фаза, в которой дикварковый конденсат отличен от нуля, либо фаза с нарушенной киральной симметрией. Не реализуется смешанная фаза с двумя одновременно отличными от нуля конденсатами, за исключением кривой фазового перехода первого рода ($\delta = 0$), на которой существует два равноправных минимума эффективного потенциала.

Рассмотрим фазовый портрет системы в плоскости (μ, T) , то есть в случае конечной температуры и при ненулевой плотности. Фазовая структура имеет различный вид при различных значениях δ : $\delta > 0$, $\delta < 0$. В случае $\delta > 0$ фазовый портрет модели (Рис. 1.4) очень напоминает фазовый портрет КХД (Рис. 1.4), поэтому он является наиболее интересным. В вакууме ($\mu = 0$) киральная симметрия является нарушенной. Если мы увеличиваем химический потенциал при малых значениях температуры, то происходит фазовый переход первого рода в сверхпроводящую фазу.

В случае $\delta > \frac{1.13097}{4\pi} = \delta_c$ фазовый портрет представлен на Рис. 1.4. На кривой фазового перехода, начинающейся при больших температурах ($T \sim T_c$) и малых химических потенциалах, то есть из точки $(T_c, 0)$, и идущей до точки, где начинается фазовый переход первого рода в сверхпроводящую фазу, есть два режима, в начале на ней происходит фазовый переход второго рода, а затем происходит фазовый переход первого рода из фазы с нарушенной

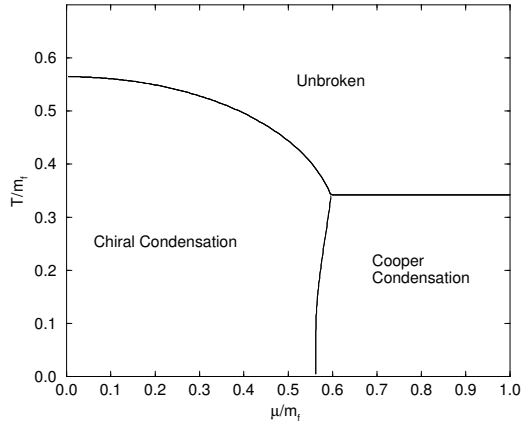


Рисунок 1.3 — Фазовый портрет при $\delta = \frac{1}{4\pi}$.

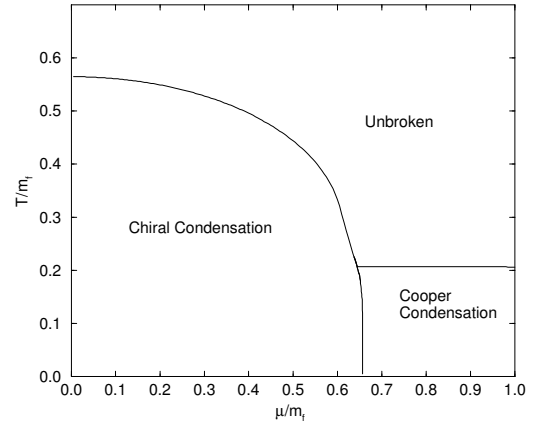


Рисунок 1.4 — Фазовый портрет при $\delta = \frac{1}{2\pi}$. Трикритическая точка $(0.318, 0.608)$.

киральной симметрией в симметричную фазу. Точка, в которой фазовый переход второго рода переходит в фазовый переход первого рода является трикритической точкой (μ_t, T_t) , $\frac{\mu_t}{\sigma_0} = 0.608$, $\frac{T_t}{\sigma_0} = 0.318$.

Как сказано ранее, при достаточно низких температурах и больших значениях химического потенциала система находится в сверхпроводящей фазе. Если фиксировать это большое значение химического потенциала и увеличивать температуру, то в системе происходит фазовый переход второго рода в симметричную фазу. Температура, при которой происходит этот фазовый переход, зависит только от δ , но не от μ , то есть фазовая кривая этого перехода является горизонтальной прямой линией. Температура этого перехода в зависимости от δ представлена на Рис. 1.5. и она достигает значения трикритической температуры при $\delta = \delta_c$.

При значениях $\delta < \delta_c$ киральная симметрия может восстанавливаться только через фазовый переход второго рода. Этот случай представлен на Рис 1.3 при $\delta = \frac{1}{4\pi} < \delta_c$. При $\delta < \delta_c$ в теории нет трикритической точки.

В данной диссертации (Главы 2, 3) мы рассмотрим модель Ходоса в $(2+1)$ -мерном пространстве-времени при конечной температуре, ненулевом химическом потенциале и под воздействием внешнего параллельного плоскости системы магнитного поля.

1.12 Эффективный гамильтониан для графена в приближение сильной связи

В настоящее время в физике конденсированного состояния вещества большое внимание уделяется экспериментальному и теоретическому изучению графена. Впервые графен был получен в 2004 году манчестерской группой, руководимой А. Геймом [47].

Помимо того, что графен имеет огромный технологический потенциал, он также привлекает внимание фундаментальной науки. Графен является первым двумерным кристаллом, когда-либо наблюдавшимся в природе. Электроны в графене описываются релятивистским уравнением Дирака, и тем самым система является идеальным кандидатом для исследования квантово-полевых моделей, которые были разработаны в физике высоких энергий. Более того, электроны в графене могут рассматриваться как безмассовые заряженные

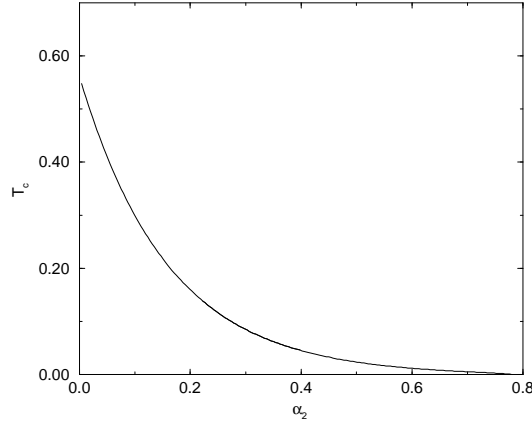


Рисунок 1.5 — Критическая температура перехода из сверхпроводящей фазы в симметричную фазу как функция $\alpha_2 = \delta$.

фермионы, живущие в пространстве-времени $(2+1)$. Тем самым графен является реальной физической системой, в которой можно экспериментально исследовать двумерную квантовую электродинамику. Также можно предположить, что возбуждения в графене могут быть эффективно описаны с помощью моделей с четырехфермионным взаимодействием, в частности моделью Гросса-Неве. Графен, тем самым, является удивительным связывающим мостом между физикой конденсированного состояния вещества и физикой высоких энергий.

В этом параграфе мы покажем, что возбуждения в графене описываются уравнением Дирака.

1.12.1 Кристаллическая решетка графена

Графен – двумерная аллотропная модификация углерода, образованная слоем атомов углерода толщиной в один атом, находящихся в sp^2 -гибридизации и соединённых посредством σ - и π -связей в гексагональную двумерную кристаллическую решётку. То есть атомы углерода располагаются на плоскости таким образом, что напоминают медовые соты.

Кристаллическая решетка в виде сот не является решеткой Браве, поскольку два соседних атома не эквивалентны (Рис. 1.6). Действительно, на рисунке можно увидеть, что атом, принадлежащий подрешетке А, имеет ближайших соседей в направлениях на северо-запад, северо-восток и на юг. В то время как атом, принадлежащий подрешетке В, имеет ближайших соседей в направлении север, юго-запад и юго-восток. Подрешетки А и В и являются решетками Браве. Таким образом, можно рассматривать кристаллическую решетку в виде медовых сот как две решетки Браве, относящиеся к атомам типа А и типа В. Расстояние между соседними атомами углерода А равно 0.142 нм. Базисные векторы решетки Браве одни и те же для двух подрешеток и выражаются формулами

$$\mathbf{a}_1 = \sqrt{3}a\mathbf{e}_x, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\sqrt{3}a}{2}(\mathbf{e}_x + \sqrt{3}\mathbf{e}_y), \quad (1.130)$$

где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ - базисные векторы.

Модули базисных векторов равны $a = \sqrt{3}a = 0.24$ нм. Площадь одной ячейки $A_{uc} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2} = 0.051$ нм². И так как на ячейку приходится один атом типа А и один атом типа В, то плотность атомов углерода, таким образом, $n_C = \frac{2}{A_{uc}} = 39$ нм⁻² = 3.9×10^{15} см⁻². Так как на один атом приходится один π -электрон, который не участвует в σ -связи, то $n_\pi = n_C =$

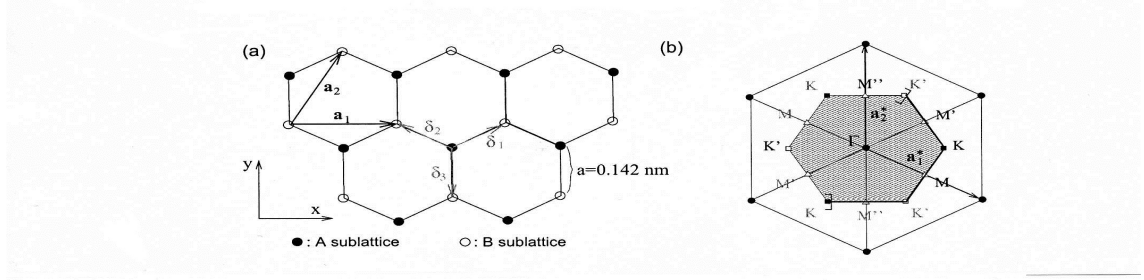


Рисунок 1.6 — (а) Решетка в виде медовых сот. Векторы δ_1 , δ_2 и δ_3 связывают nn атомов углерода, находящихся на расстоянии $a = 0.142$ нм друг от друга. Векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 - базисные векторы решетки Браве. (б) Обратная решетка. Ее базисные векторы \mathbf{a}_1^* и \mathbf{a}_2^* . Заштрихованная область представляет первую зону Бриллюэна (BZ) с центром в точке Γ и двумя неэквивалентными углами K и K' . Утолщенная часть границы первой зоны BZ представляет собой те точки, которые учитываются таким образом, чтобы не было точек, которые бы учитывались вдвойне. Первая зона BZ, определенная в строгой манере, таким образом, это заштрихованная область плюс утолщенная часть границы.

3.9×10^{15} см $^{-2}$. Три вектора, которые соединяют атом подрешетки А с ближайшими атомами подрешетки В, имеют вид:

$$\delta_1 = \frac{a}{2}(\sqrt{3}\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y), \quad \delta_2 = \frac{a}{2}(-\sqrt{3}\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y), \quad \delta_3 = -a\mathbf{e}_y. \quad (1.131)$$

Обратная решетка по отношению к решеткам Браве задается базисными векторами:

$$\mathbf{a}_1^* = \frac{2\pi}{\sqrt{3}a}(\mathbf{e}_x - \frac{\mathbf{e}_y}{\sqrt{3}}), \quad \mathbf{a}_2^* = \frac{4\pi}{3a}\mathbf{e}_y. \quad (1.132)$$

Физически все узлы обратной решетки представляют собой эквивалентные волновые векторы, так как волновые векторы, различающиеся сдвигом на вектор обратной решетки, имеют одинаковую фазу с точностью до 2π . Это следует из соотношения между векторами прямой и обратной решетки

$$\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j^* = 2\pi \delta_{ij}. \quad (1.133)$$

Первая зона Бриллюэна, изображенная на рисунке, представляет собой набор неэквивалентных точек в пространстве обратной решетки, то есть точек, которые не могут быть соединены одна с другой посредством векторов обратной решетки. Она имеет вид правильного шестиугольника. Таким образом, есть шесть углов первой зоны Бриллюэна, но только два из них являются неэквивалентными, обозначаются K , K' и представляются векторами

$$\pm \mathbf{K} = \pm \frac{4\pi}{3\sqrt{3}a}\mathbf{e}_x, \quad (1.134)$$

где знак $+$ относится к точке K , а знак $-$ к точке K' .

Подчеркнем, что неэквивалентность двух зон Бриллюэна K , K' не связана с присутствием двух подрешеток А и В. Форма зоны Бриллюэна - это внутреннее свойство решетки Браве, которое не зависит от присутствия более чем одного атома в единичной решетке. Только три грани принадлежат первой зоне Бриллюэна, а остальные же три являются эквивалентными первым трем.

Три электрона из атома углерода в графене задействованы в формировании сильной ковалентной σ -связи и один электрон участвует в π -связи. Именно π -электроны ответственны за электрические свойства графена при низких энергиях. Впервые энергетические зоны π -электронов в приближении сильной связи были рассмотрены в работе Р. Р. Уоллеса [14] в 1947 году.

1.12.2 Гамильтониан для графена и пробные волновые функции

Пробную волновую функцию возьмем в виде

$$\psi_k(\mathbf{r}) = a_k \psi_k^{(A)}(\mathbf{r}) + b_k \psi_k^{(B)}(\mathbf{r}), \quad (1.135)$$

где a_k, b_k это комплексные функции, зависящие от квазиимпульса \mathbf{k} . Обе функции $\psi_k^{(j)}(\mathbf{r})$ имеют вид

$$\psi_k^{(j)}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{R}_l} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_l} \phi^{(j)}(\mathbf{r} + \delta_j - \mathbf{R}_l), \quad (1.136)$$

где $j = A, B$. δ_j это вектор, который соединяет узел, в котором располагается j -ый атом внутри единичной клетки (то есть атом подрешетки А или подрешетки В), с узлами решетки Браве. Но обычно решетка Браве выбирается так, чтобы она совпала с одной из подрешеток (один из коэффициентов δ_A или δ_B равняется нулю.) По сути, вектор δ_j введен для того, чтобы учесть сдвиг между двумя подрешетками, так как путем смещения на вектор \mathbf{R}_j мы не можем из одной подрешетки перескочить в другую.

В нашем случае, так как атомы подрешеток совпадают, функции $\phi^{(A)}$ и $\phi^{(B)}$ одинаковые, то есть можно писать просто ϕ .

Теперь будем искать решение уравнение Шредингера, подставив в него нашу пробную волновую функцию

$$H\psi_k = \epsilon_k \psi_k. \quad (1.137)$$

Умножая (1.137) слева на ψ_k^* , получим

$$\psi_k^* H \psi_k = \epsilon_k \psi_k^* \psi_k. \quad (1.138)$$

Это уравнение может быть переписано в матричной форме с учетом выражений (1.136)

$$\begin{pmatrix} a_k^* & b_k^* \end{pmatrix} H_k \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \epsilon_k \begin{pmatrix} a_k^* & b_k^* \end{pmatrix} S_k \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}, \quad (1.139)$$

где матрица гамильтониана и матрица перекрытия определены как

$$H_k = \begin{pmatrix} \psi_k^{(A)*} H_k \psi_k^{(A)} & \psi_k^{(A)*} H_k \psi_k^{(B)} \\ \psi_k^{(B)*} H_k \psi_k^{(A)} & \psi_k^{(B)*} H_k \psi_k^{(B)} \end{pmatrix} S_k = \begin{pmatrix} \psi_k^{(A)*} \psi_k^{(A)} & \psi_k^{(A)*} \psi_k^{(B)} \\ \psi_k^{(B)*} \psi_k^{(A)} & \psi_k^{(B)*} \psi_k^{(B)} \end{pmatrix}. \quad (1.140)$$

Собственные значения ϵ_k из уравнения Шредингера задают зависимость энергии от квазиимпульса (дисперсию) или энергетические зоны.

Они могут быть получены из секулярного уравнения

$$\text{Det}[H_k - \epsilon_k^{(\lambda)} S_k] = 0, \quad (1.141)$$

которое должно выполняться для ненулевых волновых функций, то есть $a_k \neq 0$ или $b_k \neq 0$. Индекс λ обозначает энергетические зоны. Ясно, что зон столько, сколько решений уравнения. В случае двух атомов на единичную клетку две зоны.

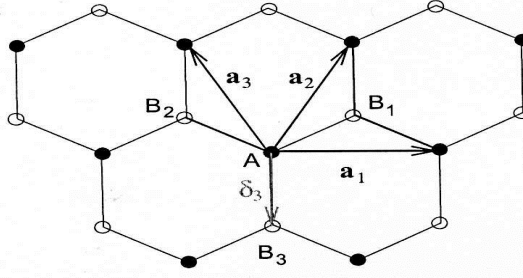


Рисунок 1.7 — Модель сильной связи для решетки в виде медовых сот.

Заметим, что обобщение к n подрешеткам (n атомов на единичную клетку) очевидно. В этом случае пробная волновая функция имеет вид

$$\psi_k = \sum_{j=1}^n a_k^{(j)} \psi_k^{(j)}. \quad (1.142)$$

Матрица гамильтониана и матрица перекрытия будут иметь вид

$$H_k^{ij} = \psi_k^{(i)*} H \psi_k^{(j)}, \quad S_k^{ij} = \psi_k^{(i)*} \psi_k^{(j)}. \quad (1.143)$$

Подставляя выражение (1.136) в выражение для гамильтониана (1.143), получим

$$H_k^{ij} = N(\epsilon^{(j)} s_k^{ij} + t_k^{ij}), \quad (1.144)$$

где $s_k^{ij} = \sum_{\mathbf{R}_l} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_l} \int d^2r \phi^{(i)*}(\mathbf{r}) \phi^{(j)}(\mathbf{r} + \delta_{ij} - \mathbf{R}_l) = \frac{S_k^{ij}}{N}$, $\delta_{ij} = \delta_j - \delta_i$.

Мы также ввели матрицу перескока

$$t_k^{ij} = \sum_{\mathbf{R}_l} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_l} \int d^2r \phi^{(i)*}(\mathbf{r}) \Delta V \phi^{(j)}(\mathbf{r} + \delta_{ij} - \mathbf{R}_l).$$

Использовался тот факт, что волновые функции $\psi^{(i)}(\mathbf{r})$ являются собственными значениями гамильтониана H^a с собственной энергией $\epsilon^{(i)}$, соответствующей орбитали i (в общем случае в разных подрешетках электроны находятся на разных орбиталях, а в графене электроны из разных подрешеток находятся на одинаковых орбиталях).

В этом случае секулярное уравнение (1.141) имеет вид

$$\text{Det}[t_k^{ij} - (\epsilon_{(k)}^{(\lambda)} - \epsilon^{(i)}) s_k^{ij}] = 0. \quad (1.145)$$

В случае, если все атомы из разных подрешеток обладают одинаковой электронной конфигурацией, то есть $\epsilon^{(i)} = \epsilon_0$, то эту постоянную энергию можно не рассматривать.

1.12.3 Решение с учетом перескока между ближайшими соседями и следующими ближайшими. Дисперсия энергии для π электронов в графене

После общего рассмотрения перейдем к рассмотрению гексогональной решетки.

Выберем решетку Браве, совпадающую с подрешеткой A, то есть $\delta_A = 0$, а сдвиг $\delta_B = \delta_{AB} = \delta_3$ (Рис. 1.7).

Будем использовать приближение сильной связи, которое заключается в том, что волновые функции ϕ для разных атомов слабо перекрываются между собой, то есть функции

ϕ достаточно быстро убывают при отдалении от ионов. Учтем только перекрытия с ближайшими атомами (которые являются атомами другой подрешетки) и со следующими к ближайшим атомам (которые являются ближайшими атомами той же подрешетки).

Недиагональные элементы матрицы перескока имеют вид

$$t_k^{AB} = t\gamma_k^* = (t_k^{BA})^*, \quad (1.146)$$

где $t = \int d^2r \phi^{(A)*}(\mathbf{r}) \Delta V \phi^{(B)}(\mathbf{r} + \delta_3)$, $\gamma_k = 1 + e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}_2} + e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}_3}$.

Недиагональные элементы матрицы перекрытия имеют вид

$$s_k^{AB} = s\gamma_k^* = (s_k^{BA})^*, \quad (1.147)$$

где $s = \int d^2r \phi^{(A)*}(\mathbf{r}) \phi^{(B)}(\mathbf{r} + \delta_3)$.

В недиагональных элементах матрицы перекрытия мы учли только ближайших соседей, а следующих ближайших соседей не учли.

Поэтому и в силу нормировки волновых функций $\int d^2r \phi^{(j)*}(\mathbf{r}) \phi^{(j)}(\mathbf{r}) = 1$ получим $s_k^{AA} = s_k^{BB} = 1$.

А учет следующих ближайших соседей (ионов той же подрешетки) дает вклад в диагональные элементы матрицы перескока

$$t_k^{AA} = t_k^{BB} = 2t_{nnn} \sum_{i=1}^3 \cos(\mathbf{k}\mathbf{a}_i) = t_{nnn}(|\gamma_k|^2 - 3), \quad (1.148)$$

где введен коэффициент, отвечающий за перескок между следующими ближайшими соседями,

$$t_{nnn} = \int d^2r \phi^{(A)*}(\mathbf{r}) \Delta V \phi^{(A)}(\mathbf{r} + \mathbf{a}_1) = \int d^2r \phi^{(B)*}(\mathbf{r}) \Delta V \phi^{(B)}(\mathbf{r} + \mathbf{a}_1),$$

$$t_k = \begin{pmatrix} t_{nnn}(|\gamma_k|^2 - 3) & t\gamma_k^* \\ t\gamma_k & t_{nnn}(|\gamma_k|^2 - 3) \end{pmatrix}, \quad s_k = \begin{pmatrix} 1 & s\gamma_k^* \\ s\gamma_k & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.149)$$

Так как можем не рассматривать $\epsilon_i = \epsilon_0$, то матрица гамильтониана имеет вид $H_k^{ij} = N t_k^{ij}$.

Секулярное уравнение имеет два решения, соответствующие $\lambda = \pm 1$,

$$\epsilon_k^{(\lambda)} = \frac{t_k^{AA} + \lambda t |\gamma_k|}{1 + \lambda s |\gamma_k|}. \quad (1.150)$$

Разложим выражение (1.150), сделав разумные предположения $s \ll 1$ и $t \ll 1$,

$$\epsilon_k^{(\lambda)} = t'_{nnn} |\gamma_k|^2 + \lambda t |\gamma_k| = 2t'_{nnn} \sum_{i=1}^3 \cos(\mathbf{k}\mathbf{a}_i) + \lambda t \sqrt{3 + 2 \sum_{i=1}^3 \cos(\mathbf{k}\mathbf{a}_i)}, \quad (1.151)$$

где ввели эффективную амплитуду перескока $t'_{nnn} = t_{nnn} - st$.

Мы также опустили константу $-3t_{nnn}$ в последнем равенстве.

Определим значения квазиимпульсов, при которых энергия обращается в ноль. Они называются точками Дирака и определяются из условия

$$\epsilon_{kD}^{(\lambda)} = 0. \quad (1.152)$$

Легко показать, что это условие выполнено, если положить $k_y^D = 0$ и $k_x^D = \pm \frac{4\pi}{3\sqrt{3}a}$.

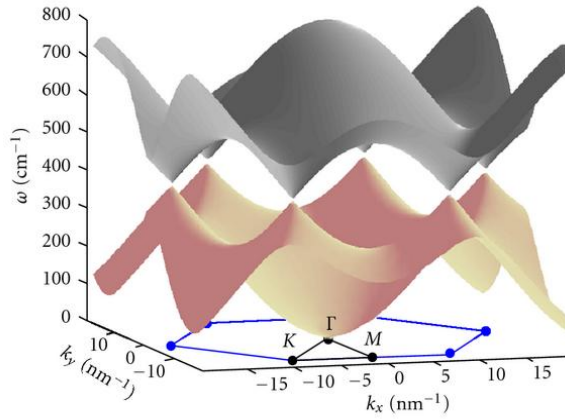


Рисунок 1.8 — Дисперсия энергии, полученная в приближении сильной связи.

Энергия обращается в ноль во всех углах первой зоны Бриллюэна, но, как мы знаем, только две из них являются неэквивалентными. Мы видим, что мы получили как раз две неэквивалентные точки Дирака, которые совпадают с точками K и K' ,

$$\mathbf{k}^D = \pm \mathbf{K} = \pm \frac{4\pi}{3\sqrt{3}a} \mathbf{e}_x. \quad (1.153)$$

В нашем случае точки Дирака совпали с кристаллографическими точками K и K' , которые определены как углы первой зоны Бриллюэна.

В связи с наличием двух точек Дирака говорят о существовании двух долин, когда рассматривают малые электронные возбуждения в окрестностях разных точек Дирака.

1.12.4 Эффективный гамильтониан в приближении сильной связи

Выпишем эффективный гамильтониан, который с точностью до N (которую мы будем опускать) совпадает с t_k , опустив также не имеющую значение константу $-3t_{nnn}$,

$$H_k = t_{nnn} |\gamma_k|^2 I + t \begin{pmatrix} 0 & \gamma_k^* \\ \gamma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.154)$$

где

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.155)$$

Гамильтониан действует в двумерном пространстве столбцов

$$\psi_k^\lambda = \begin{pmatrix} a_k^{(\lambda)} \\ b_k^{(\lambda)} \end{pmatrix}, \quad (1.156)$$

компонентами которых являются амплитуды вероятности нахождения в состояниях, отвечающих пробным волновым функциям подрешеток А и В (блоховским функциям) (1.135).

Для того чтобы описать низкоэнергетические возбуждения, характерная энергия которых много меньше $|t|$, будем описывать возбуждения над точками Дирака. Для этого будем раскладывать зависимость энергии от квазиимпульса вокруг точек $\pm \mathbf{K}$.

Представим квазиимпульс как $\mathbf{k} = \pm \mathbf{K} + \mathbf{q}$, где $|\mathbf{q}| \ll |\mathbf{K}| \sim \frac{1}{a}$. Видим, что параметром разложения будет $|\mathbf{q}|a \ll 1$.

Из выражения для энергии (1.151) и эффективного гамильтониана видно, что нужно разложить γ_k . Нужно различать разложение вокруг точки K и вокруг точки K' .

$$\gamma_{\mathbf{q}}^{\pm} = \gamma_{k=\pm\mathbf{K}+\mathbf{q}} = 1 + e^{\pm i\mathbf{K}a_2} e^{\pm i\mathbf{q}a_2} + e^{\pm i\mathbf{K}a_3} e^{\pm i\mathbf{q}a_3} \simeq \mp \frac{3a}{2} (q_x \pm iq_y).$$

Для эффективного низкоэнергетического гамильтониана

$$H_{\mathbf{q}}^{eff,\xi} = \xi \hbar v_F (q_x \sigma^x + \xi q_y \sigma^y), \quad (1.157)$$

где введено понятие скорости Ферми $v_F = \frac{3ta}{2\hbar} = \frac{3|t|a}{2\hbar}$. σ - матрицы Паули, $\sigma^x = \sigma^1, \sigma^y = \sigma^2$.

Было введено понятие долинного изоспина $\xi = \pm 1$. Значение $\xi = +1$ соответствует точке K , то есть $\mathbf{k}^D = \mathbf{K}$, а значение $\xi = -1$ соответствует точке K' , то есть $\mathbf{k}^D = -\mathbf{K}$.

Низкоэнергетический гамильтониан (1.157) не содержит вклада, соответствующего перескокам между следующими ближайшими соседями, то есть не учитывает t_{nnn} . Этот вклад пропорционален $|\gamma_k^2|$ и, таким образом, не дает вклада в первый порядок разложения.

В итоге эффективный низкоэнергетический гамильтониан может быть представлен в виде

$$H_{\mathbf{q}}^{eff,\xi} = \xi \hbar v_F (q_x \sigma^x + q_y \sigma^y) = \hbar v_F \tau^3 \otimes \mathbf{q} \sigma, \quad (1.158)$$

который действует в пространстве четырехкомпонентных спиноров

$$\Psi_{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} a_{q,+}^A \\ a_{q,+}^B \\ a_{q,-}^B \\ a_{q,-}^A \end{pmatrix}, \quad (1.159)$$

где прямое произведение обозначает $\tau^3 \otimes \sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}$.

В четырехфермионном представлении первые две компоненты соответствуют разложению относительно точки Дирака K , а последние две - относительно точки K' . Подчеркнем также, что следует различать два типа изоспина. Изоспин подрешетки, который представляется матрицами Паули σ , где спин вверх соответствует одной подрешетке, а спин вниз соответствует другой. Этот изоспин является прямым следствием существования двух подрешеток. Второй, долинный изоспин, который представляется вторым набором матриц Паули τ , третья компонента которых фигурирует в гамильтониане. Этот изоспин является следствием существования двух долинных индексов и только напрямую не связан с наличием двух подрешеток.

Тем самым видим, что вместо уравнения Шредингера мы получаем уравнение Дирака.

1.13 Структура диссертации

В диссертации исследуются фазовые переходы в (2+1)-мерной модели типа Гросса-Неве под влиянием внешних условий. В **главе 2** исследуется (2+1)-мерная модифицированная модель Гросса-Неве с двумя каналами взаимодействия, киральным и сверхпроводящим, при конечной температуре и ненулевом химическом потенциале. В **главе 3** исследуется та же модель при ненулевом химическом потенциале под влиянием внешнего параллельного плоскости системы магнитного поля. В **главе 4** рассматривается фазовая структура (2+1)-мерной модели Гросса-Неве под воздействием внешнего произвольно направленного магнит-

ного поля. В главах 2 и 3 учитывается взаимодействие магнитного поля со спином электронов (зеемановское взаимодействие). В **главе 5** исследуется нарушение киральной симметрии в $(2+1)$ -мерной модели Гросса-Неве с одним компактифицированным измерением под влиянием внешнего магнитного поля, направленного вдоль некомпактифицированного измерения, при конечной температуре и ненулевом химическом потенциале с учетом взаимодействия спина электронов с магнитным полем. В **главе 6** перечислены основные результаты и кратко сформулированы основные выводы диссертации. В **главе 7 (Приложения)** приведены некоторые существенные вычисления, использующиеся в различных главах диссертации, которые были вынесены отдельно для удобства.

Глава 2. Влияние химического потенциала на появление сверхпроводящей фазы в (2+1)-мерной модели Ходоса

2.1 Введение

В этой главе мы изучаем фазовые переходы в (2+1)-мерной модели Гросса-Неве, которая описывает борьбу между двумя явлениями: нарушением киральной симметрии (образование экзитонных пар) и сверхпроводимостью (образование куперовских пар). Очевидно, что такая модель может использоваться для качественного анализа сверхпроводящей фазы в квазипланарных системах конденсированного состояния вещества. Наша модель является прямым обобщением известной (1+1)-мерной модели Ходоса и других [3; 96], которая дает схожий с КХД фазовый портрет в терминах температуры T и химического потенциала μ .

В (1+1)-мерных моделях, для того чтобы избежать запрета на спонтанное нарушение непрерывной симметрии (известного, как теорема Мермина-Вагнера-Кулмана ("no-go theorem") [16]), рассмотрение было произведено в ведущем порядке $1/N$ -разложения, то есть в приближении $N \rightarrow \infty$, где N это число фермионных полей. В этом случае квантовые флуктуации, которые разрушают дальний порядок, соответствующий спонтанному нарушению симметрии, подавлены $1/N$ факторами. А в случае (2+1)-мерного пространства-времени при конечном значении N спонтанное нарушение непрерывной симметрии по тем же причинам разрешено только при нулевой температуре, то есть запрещено при $T > 0$. Таким образом, для того чтобы сделать исследование сверхпроводящей фазы возможным при $T > 0$, то есть чтобы преодолеть теорему запрета, мы положим, как это было сделано в (1+1)-мерных моделях, что $N \rightarrow \infty$.

Таким образом, при $T = 0$ результаты этой главы могут быть применены для описания сверхпроводимости в системах конденсированного состояния вещества с различным числом слоев N (N конечная и может быть равно даже единице), в то время как, при $T > 0$ эти результаты лучше использовать в описании макроскопических систем, состоящих из очень большого числа слоев, таких как графит и так далее.

Глава устроена следующим образом. В параграфе 2.2 представлена модель типа Гросса-Неве с четырехфермионными взаимодействиями в фермион-антифермионном (или киральном) и фермион-фермионном (или сверхпроводящем) каналах. Здесь также получен перенормированный термодинамический потенциал модели в ведущем порядке приближения больших N . В параграфе 2.3 получено ренормгрупп инвариантное выражение для термодинамического потенциала, чьи точки глобального минимума дают нам киральный и сверхпроводящий конденсаты. В параграфе 2.4 описана фазовая структура модели при $T = 0$ и при $\mu = 0$ и $\mu \neq 0$. В частности, в этом параграфе показано, что бесконечно малый химический потенциал индуцирует явление сверхпроводимости в случае достаточно слабого притяжения в фермион-антифермионном канале. В конце концов, в параграфе 2.5 получена фазовая диаграмма в плоскости (μ, T) для некоторых выбранных значений констант связи. В этом параграфе также показано, что при произвольном фиксированном $T > 0$ сверхпроводимость индуцируется в системе при достаточно больших значениях химического потенциала μ . Некоторые вопросы нашего рассмотрения вынесены в Приложения.

2.2 Модель и ее термодинамический потенциал

Наше рассмотрение основано на (2+1)-мерной модели типа Гросса-Неве с безмассовыми фермионами, принадлежащими фундаментальному мультиплету вспомогательной флейворной группы $O(N)$. Её лагранжиан описывает взаимодействие как в скалярном фермион-антифермионном и скалярном дифермионном каналах:

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k \left(\gamma^\nu i \partial_\nu + \mu \gamma^0 \right) \psi_k + \frac{G_1}{N} \left(\sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k \psi_k \right)^2 + \frac{G_2}{N} \left(\sum_{k=1}^N \psi_k^T C \psi_k \right) \left(\sum_{j=1}^N \bar{\psi}_j C \bar{\psi}_j^T \right), \quad (2.1)$$

где μ химический потенциал. Все фермионные поля ψ_k ($k = 1, \dots, N$) принадлежат фундаментальному представлению группы $O(N)$. Более того, каждое поле ψ_k это четырехкомпонентный дираковский спинор (символ T обозначает операцию транспонирования). γ^ν ($\nu = 0, 1, 2$) являются матрицами в 4-мерном пространстве спиноров. $C \equiv \gamma^2$ это матрица зарядового сопряжения. Алгебра γ^ρ -матриц, как и их конкретное представление, даны в Приложении 7.2. Модель (2.1) инвариантна относительно дискретного кирального преобразования $\psi_k \rightarrow \gamma^5 \psi_k$ (конкретный вид γ^5 -матриц также представлен в Приложении 7.2), а также относительно преобразований из непрерывной группы числа фермионов $U(1)$, $\psi_k \rightarrow \exp(i\alpha) \psi_k$ ($k = 1, \dots, N$), ответственной за сохранение числа фермионов или, что то же самое, за закон сохранения электрического заряда в рассматриваемой системе.

Запишем эквивалентный лагранжиан, содержащий вспомогательные скалярные бозонные поля $\sigma(x)$, $\Delta(x)$ и $\Delta^*(x)$,

$$\mathcal{L} = -\frac{N\sigma^2}{4G_1} - \frac{N}{4G_2} \Delta^* \Delta + \sum_{k=1}^N \left[\bar{\psi}_k \left(\gamma^\nu i \partial_\nu + \mu \gamma^0 - \sigma \right) \psi_k - \frac{\Delta^*}{2} \psi_k^T C \psi_k - \frac{\Delta}{2} \bar{\psi}_k C \bar{\psi}_k^T \right]. \quad (2.2)$$

Ясно, что лагранжианы (2.1) и (2.2) эквивалентны, это можно увидеть, используя уравнения движения Эйлера-Лагранжа для скалярных бозонных полей, которые имеют вид

$$\sigma(x) = -2 \frac{G_1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k \psi_k, \quad \Delta(x) = -2 \frac{G_2}{N} \sum_{k=1}^N \psi_k^T C \psi_k, \quad \Delta^*(x) = -2 \frac{G_2}{N} \sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k C \bar{\psi}_k^T. \quad (2.3)$$

Легко увидеть из (2.3), что нейтральное поле $\sigma(x)$ является действительной величиной, то есть $(\sigma(x))^\dagger = \sigma(x)$ (символ \dagger обозначает эрмитово сопряжение), а (заряженные) дифермионные поля $\Delta(x)$ и $\Delta^*(x)$ взаимно сопряженные комплексные величины, то есть $(\Delta(x))^\dagger = \Delta^*(x)$, и наоборот. Ясно, что все поля (2.3) являются синглетами по отношению к вспомогательной группе $O(N)$, так как представление флейворной группы $O(N)$ является действительным и поэтому во всех скалярных полях, по сути, стоит инвариантное выражение $\psi^T \psi$.

Более того, по отношению к пространственному отражению P (см. комментарий в Приложении 7.2)

$$P : \psi_k(t, x, y) \rightarrow \gamma^5 \gamma^1 \psi_k(t, -x, y), \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.4)$$

поля $\sigma(x)$, $\Delta(x)$ и $\Delta^*(x)$ являются четными величинами, то есть скалярами.

Если дифермионное поле $\Delta(x)$ имеет ненулевое вакуумное среднее, то есть $\langle \Delta(x) \rangle \neq 0$, то абелева симметрия числа фермионов $U(1)$ модели спонтанно нарушена и в модели реализуется сверхпроводящая фаза.

Если $\langle \sigma(x) \rangle \neq 0$, то дискретная киральная симметрия модели спонтанно нарушена.

В терминах эквивалентного лагранжиана производящий интеграл имеет вид

$$Z = \int D\bar{\psi}D\psi D\sigma D\Delta^* D\Delta e^{i \int d^3x \left(-\frac{N\sigma^2}{4G_1} - \frac{N}{4G_2} \Delta^* \Delta + \bar{\psi}_k \left(\gamma^\nu i\partial_\nu + \mu\gamma^0 - \sigma \right) \psi_k - \frac{\Delta^*}{2} \psi_k^T C \psi_k - \frac{\Delta}{2} \bar{\psi}_k C \bar{\psi}_k^T \right)}. \quad (2.5)$$

В $\frac{1}{N}$ разложении интегрирование по скалярным полям можно отбросить

$$Z = \int D\bar{\psi}D\psi e^{i \int d^3x \left(-\frac{N\sigma^2}{4G_1} - \frac{N}{4G_2} \Delta^* \Delta + \bar{\psi}_k \left(\gamma^\nu i\partial_\nu + \mu\gamma^0 - \sigma \right) \psi_k - \frac{\Delta^*}{2} \psi_k^T C \psi_k - \frac{\Delta}{2} \bar{\psi}_k C \bar{\psi}_k^T \right)}. \quad (2.6)$$

Исследуем фазовую структуру четырехфермионной модели (2.1), начиная с эквивалентного лагранжиана (2.2). В ведущем порядке приближения больших N эффективное действие $\mathcal{S}_{\text{eff}}(\sigma, \Delta, \Delta^*)$ рассматриваемой модели выражается в терминах функционального интеграла по фермионным полям

$$\exp(i\mathcal{S}_{\text{eff}}(\sigma, \Delta, \Delta^*)) = \int \prod_{l=1}^N [d\bar{\psi}_l][d\psi_l] \exp\left(i \int \mathcal{L} d^3x\right),$$

где

$$\mathcal{S}_{\text{eff}}(\sigma, \Delta, \Delta^*) = - \int d^3x \left[\frac{N}{4G_1} \sigma^2(x) + \frac{N}{4G_2} \Delta(x) \Delta^*(x) \right] + \tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}. \quad (2.7)$$

Фермионный вклад в эффективное действие, то есть член $\tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}$ в (2.7), дается выражением

$$\begin{aligned} \exp(i\tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}) = \int \prod_{l=1}^N [d\bar{\psi}_l][d\psi_l] \exp\left\{ i \int \sum_{k=1}^N \left[\bar{\psi}_k (\gamma^\nu i\partial_\nu + \mu\gamma^0 - \sigma) \psi_k - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\Delta^*}{2} \psi_k^T C \psi_k - \frac{\Delta}{2} \bar{\psi}_k C \bar{\psi}_k^T \right] d^3x \right\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Вакуумные значения конденсатов $\langle \sigma(x) \rangle$, $\langle \Delta(x) \rangle$ и $\langle \Delta^*(x) \rangle$ составных бозонных полей определяются уравнениями седловой точки

$$\frac{\delta \mathcal{S}_{\text{eff}}}{\delta \sigma(x)} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{S}_{\text{eff}}}{\delta \Delta(x)} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{S}_{\text{eff}}}{\delta \Delta^*(x)} = 0. \quad (2.9)$$

Для простоты в этой работе будем предполагать, что вышеупомянутые вакуумные значения не зависят от координат пространства-времени, то есть

$$\langle \sigma(x) \rangle \equiv M, \quad \langle \Delta(x) \rangle \equiv \Delta, \quad \langle \Delta^*(x) \rangle \equiv \Delta^*, \quad (2.10)$$

где M, Δ, Δ^* постоянные величины. В действительности, это координаты точки глобального минимума термодинамического потенциала $\Omega(M, \Delta, \Delta^*)$. В ведущем порядке $\frac{1}{N}$ разложения $\Omega(M, \Delta, \Delta^*)$ определяется следующим выражением:

$$\int d^3x \Omega(M, \Delta, \Delta^*) = -\frac{1}{N} \mathcal{S}_{\text{eff}}\{\sigma(x), \Delta(x), \Delta^*(x)\} \Big|_{\sigma(x)=M, \Delta(x)=\Delta, \Delta^*(x)=\Delta^*},$$

которое дает

$$\int d^3x \Omega(M, \Delta, \Delta^*) = \int d^3x \left(\frac{M^2}{4G_1} + \frac{\Delta \Delta^*}{4G_2} \right) + \frac{i}{N} \ln \left(\int \prod_{l=1}^N [d\bar{\psi}_l][d\psi_l] \exp \left(i \int \sum_{k=1}^N \left[\bar{\psi}_k D \psi_k - \frac{\Delta^*}{2} \psi_k^T C \psi_k - \frac{\Delta}{2} \bar{\psi}_k C \bar{\psi}_k^T \right] d^3x \right) \right), \quad (2.11)$$

где $D = \gamma^\nu i \partial_\nu + \mu \gamma^0 - M$. Отметим, что без потери общности величины Δ, Δ^* могут рассматриваться как действительные. В противном случае, комплексные фазы величин Δ, Δ^* могут быть устранены соответствующим преобразованием фермионных полей в континуальном интеграле (2.5). В дальнейшем будем полагать, что $\Delta = \Delta^* \equiv \Delta$, где Δ уже действительная величина. Для того чтобы найти удобное выражение для термодинамического потенциала, надо обратиться к Приложению 7.3, где вычислен подобный функциональный интеграл (2.5, 2.11). В Приложении 7.3 для простоты рассматривается случай $N = 1$, однако, процедура легко обобщается на случай $N > 1$. Учитывая в (2.11) выражение (7.19), мы получим следующее выражение для термодинамического потенциала модели (2.1) при нулевой температуре, $T = 0$:

$$\Omega(M, \Delta) = \frac{M^2}{4G_1} + \frac{\Delta^2}{4G_2} + i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln \left[(p_0^2 - (\mathcal{E}_\Delta^+)^2)(p_0^2 - (\mathcal{E}_\Delta^-)^2) \right], \quad (2.12)$$

где $(\mathcal{E}_\Delta^\pm)^2 = E^2 + \mu^2 + \Delta^2 \pm 2\sqrt{M^2\Delta^2 + \mu^2 E^2}$ и $E = \sqrt{M^2 + |\vec{p}|^2}$.

Очевидно, что функция $\Omega(M, \Delta)$ инвариантна относительно каждого из преобразований $M \rightarrow -M$, $\Delta \rightarrow -\Delta$ и $\mu \rightarrow -\mu$. Таким образом, без потери общности можно положить $M \geq 0$, $\Delta \geq 0$, $\mu \geq 0$ и исследовать точку глобального минимума термодинамического потенциала (2.12) только в этой области. Используем достаточно общую формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \ln(p_0 - A) = i\pi |A|, \quad (2.13)$$

где A - действительная величина, (см. Приложение 7.11) (Эта формула справедлива с точностью до бесконечного члена, не зависящего от действительной величины A).

Используя формулу (2.13), возможно свести выражение (2.12) к следующему виду:

$$\Omega(M, \Delta) \equiv \Omega^{un}(M, \Delta) = \frac{M^2}{4G_1} + \frac{\Delta^2}{4G_2} - \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} (\mathcal{E}_\Delta^+ + \mathcal{E}_\Delta^-). \quad (2.14)$$

Интегральный член в формуле (2.14) расходится на бесконечности, поэтому, чтобы получить какую-либо информацию из этого выражения, мы должны перенормировать его.

2.3 Перенормировка при нулевой температуре, $T = 0$

Прежде всего необходимо регуляризовать термодинамический потенциал при нулевой температуре (2.14). Введем обрезание по импульсу в (2.14) следующим образом $|p_1| < \Lambda$, $|p_2| < \Lambda$. В результате получим следующее регуляризованное выражение для термодинами-

ческого потенциала (конечное при конечном значении Λ):

$$\Omega^{reg}(M, \Delta) = \frac{M^2}{4G_1} + \frac{\Delta^2}{4G_2} - \frac{1}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp_1 \int_0^\Lambda dp_2 (\mathcal{E}_\Delta^+ + \mathcal{E}_\Delta^-). \quad (2.15)$$

Используем в (2.15) следующую асимптотику

$$\mathcal{E}_\Delta^+ + \mathcal{E}_\Delta^- = 2|\vec{p}| + \frac{M^2 + \Delta^2}{|\vec{p}|} + \mathcal{O}(1/|\vec{p}|^3), \quad (2.16)$$

где $|\vec{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$.

Интегрируя каждый член разложения, получим

$$\begin{aligned} \Omega^{reg}(M, \Delta) &= M^2 \left[\frac{1}{4G_1} - \frac{2\Lambda \ln(1 + \sqrt{2})}{\pi^2} \right] + \\ &+ \Delta^2 \left[\frac{1}{4G_2} - \frac{2\Lambda \ln(1 + \sqrt{2})}{\pi^2} \right] - \frac{2\Lambda^3(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))}{3\pi^2} + \mathcal{O}(\Lambda^0), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где $\mathcal{O}(\Lambda^0)$ означает, что выражение конечно в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$.

Далее, предположим что голые константы связи G_1 и G_2 зависят от параметра обрезания Λ таким образом, что в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ получим конечное выражение в скобках (2.17). Очевидно, для того чтобы добиться этого, достаточно потребовать

$$\frac{1}{4G_1} \equiv \frac{1}{4G_1(\Lambda)} = \frac{2\Lambda \ln(1 + \sqrt{2})}{\pi^2} + \frac{1}{2\pi g_1}, \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{4G_2} \equiv \frac{1}{4G_2(\Lambda)} = \frac{2\Lambda \ln(1 + \sqrt{2})}{\pi^2} + \frac{1}{2\pi g_2}, \quad (2.19)$$

где $g_{1,2}$ конечные и независимые от Λ параметры модели с размерностью обратной массы. Более того, так как голые константы связи G_1 и G_2 не зависят от точки нормировки, то же верно и для $g_{1,2}$. Следовательно, учитывая (2.15), (2.17) и соотношения (2.18, 2.19) и не учитывая члены, которые не зависят от M и Δ , получим перенормированное выражение для термодинамического потенциала

$$\Omega^{ren}(M, \Delta) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left\{ \Omega^{reg}(M, \Delta) \Big|_{G_1=G_1(\Lambda), G_2=G_2(\Lambda)} + \frac{2\Lambda^3(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))}{3\pi^2} \right\}. \quad (2.20)$$

Также отметим, что выражение (2.20) является ренормгрупповым инвариантом.

Тот факт, что возможно перенормировать эффективный потенциал изначальной модели (2.1) в ведущем порядке разложения по большим N , является отражением более общего свойства (2+1)-мерных моделей с четырехфермионным взаимодействием. Действительно, хорошо известно, что в рамках "наивной" теории возмущений (разложение по константе связи) эти модели являются перенормируемыми. Однако, было доказано в [24], что в рамках пертурбативной техники $1/N$ разложения эти модели являются перенормируемыми.

В случае $\mu = 0$, $\mathcal{O}(\Lambda^0)$ член в (2.17) может быть вычислен явно, таким образом, мы имеем для перенормированного эффективного потенциала $V(M, \Delta)$ следующее выражение

$$V_{\text{eff}}(M, \Delta) \equiv \Omega^{\text{ren}}(M, \Delta)|_{\mu=0} = \frac{M^2}{2\pi g_1} + \frac{\Delta^2}{2\pi g_2} + \frac{(M + \Delta)^3}{6\pi} + \frac{|M - \Delta|^3}{6\pi}. \quad (2.21)$$

Вакуумный термодинамический потенциал обычно называют эффективным потенциалом ($V_{\text{eff}}(M, \Delta)$), а при ненулевой температуре термодинамическим потенциалом.

Теперь получим другое выражение для перенормированного термодинамического потенциала (2.20) при $\mu \neq 0$. Для этого перепишем перенормированный термодинамический потенциал $\Omega^{\text{un}}(M, \Delta)$ (2.14) в следующем виде

$$\begin{aligned} \Omega^{\text{un}}(M, \Delta) &= \frac{M^2}{4G_1} + \frac{\Delta^2}{4G_2} - \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left(\mathcal{E}_{\Delta}^+|_{\mu=0} + \mathcal{E}_{\Delta}^-|_{\mu=0} \right) - \\ &- \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left(\mathcal{E}_{\Delta}^+ + \mathcal{E}_{\Delta}^- - \mathcal{E}_{\Delta}^+|_{\mu=0} - \mathcal{E}_{\Delta}^-|_{\mu=0} \right), \end{aligned} \quad (2.22)$$

где

$$\mathcal{E}_{\Delta}^+|_{\mu=0} + \mathcal{E}_{\Delta}^-|_{\mu=0} = \sqrt{|\vec{p}|^2 + (M + \Delta)^2} + \sqrt{|\vec{p}|^2 + (M - \Delta)^2}.$$

Так как первые члены разложения (2.16) не зависят от μ , ясно, что интеграл в последней сумме в (2.22) сходящийся. Первые два члена в (2.22) из перенормированного термодинамического потенциала (эффективного потенциала), совпадающие с термодинамическим потенциалом при $\mu = 0$, сводятся после процедуры перенормировки к выражению (2.21). Таким образом, после перенормировки получим из (2.22) следующее конечное выражение (очевидно, что процедура перенормировки (2.20) не меняется):

$$\begin{aligned} \Omega^{\text{ren}}(M, \Delta) &= V_{\text{eff}}(M, \Delta) - \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left(\mathcal{E}_{\Delta}^+ + \mathcal{E}_{\Delta}^- - \right. \\ &\left. - \sqrt{|\vec{p}|^2 + (M + \Delta)^2} - \sqrt{|\vec{p}|^2 + (M - \Delta)^2} \right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

где $V_{\text{eff}}(M, \Delta)$ определяется формулой (2.21). Интегральные члены в (2.23) могут быть вычислены. В результате получим:

$$\begin{aligned} 12\pi\Omega^{\text{ren}}(M, \Delta) &= \frac{6M^2}{g_1} + \frac{6\Delta^2}{g_2} + 2 \left(M + \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} \right)^3 + 2 \left| M - \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} \right|^3 - \\ &- 3t_+ \left(M + \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} \right) + 3t_- \left| M - \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} \right| \\ &- \frac{3(\mu^2 - M^2)\Delta^2}{\mu} \ln \left| \frac{t_+ + \mu(M + \sqrt{\mu^2 + \Delta^2})}{t_- + \mu|M - \sqrt{\mu^2 + \Delta^2}|} \right|, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где $t_{\pm} = M\sqrt{\mu^2 + \Delta^2} \pm \mu^2$. Это не очевидно, но при $\mu = 0$ выражение (2.24) для $\Omega^{\text{ren}}(M, \Delta)$ совпадает с $V_{\text{eff}}(M, \Delta)$ (2.21).

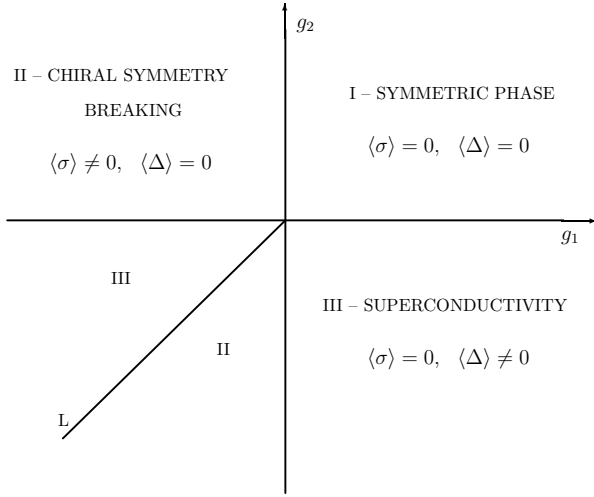


Рисунок 2.1 — Фазовый портрет системы в плоскости (g_1, g_2) при $\mu = 0$. I, II и III обозначают симметричную, сверхпроводящую фазы и фазу с нарушенной киральной симметрией, соответственно. В фазе II $\langle\sigma\rangle = -1/g_1$. В фазе III $\langle\Delta\rangle = -1/g_2$. На линии $L \equiv \{(g_1, g_2) : g_1 = g_2\}$, где $g_{1,2} < 0$, минимумы термодинамического потенциала, соответствующие фазам II и III, эквивалентны.

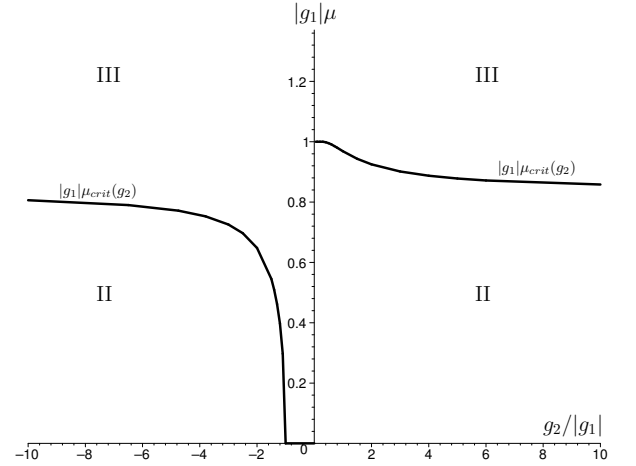


Рисунок 2.2 — Фазовый портрет модели в терминах (μ, g_2) и критический химический потенциал $\mu_{crit}(g_2)$ в зависимости от g_2 при произвольном фиксированном $g_1 < 0$. В каждой точке $\mu = \mu_{crit}(g_2) \neq 0$ происходит фазовый переход из фазы с нарушенной киральной симметрией II в сверхпроводящую фазу III.

2.4 Фазовая структура модели при нулевой температуре, $T = 0$

Как упоминалось ранее, точка глобального минимума (M_0, Δ_0) термодинамического потенциала $\Omega^{ren}(M, \Delta)$ определяет вакуумные средние скалярных полей $\sigma(x)$ и $\Delta(x)$. А именно, $M_0 = \langle\sigma(x)\rangle$ и $\Delta_0 = \langle\Delta(x)\rangle$. Величины M_0 и Δ_0 обычно называют параметрами порядка или щелями, так как они ответственны за фазовую структуру модели или, другими словами, за свойства вакуума модели, (см. комментарии после (2.4)). Более того, щель M_0 равна динамической массе одночастичного фермионного возбуждения вакуума. Как правило, щели зависят от параметров модели и от внешних факторов. В нашем рассмотрении щели M_0 и Δ_0 являются функциями параметров свободной модели g_1, g_2 и внешних параметров, таких как химический потенциал μ и температура T .

2.4.1 Случай $\mu = 0$

В начале обсудим фазовый портрет модели (2.1) в простейшем случае, когда $\mu = 0$. Соответствующий термодинамический потенциал задается выражением (2.21) и обозначается $V_{eff}(M, \Delta)$. Точка глобального минимума этой функции уже была исследована ранее (см. [97]), хотя и в рамках другой (2+1)-мерной модели Гросса-Неве. На Рис. 2.1 показана фазовая структура изначальной модели (2.1) при $\mu = 0$ и $T = 0$.

На Рис. 2.1 изображен фазовый портрет модели в плоскости свободных параметров модели g_1 и g_2 . Плоскость (g_1, g_2) разделена на несколько частей. В каждой реализуется одна

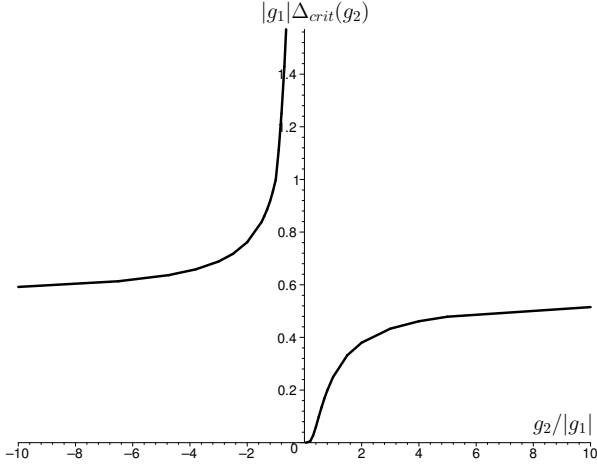


Рисунок 2.3 — Сверхпроводящая щель $\Delta_0 = \Delta_{crit}(g_2)$ в зависимости от g_2 , которая генерируется в критической точке, то есть при $\mu = \mu_{crit}(g_2)$, при произвольном фиксированном $g_1 < 0$.

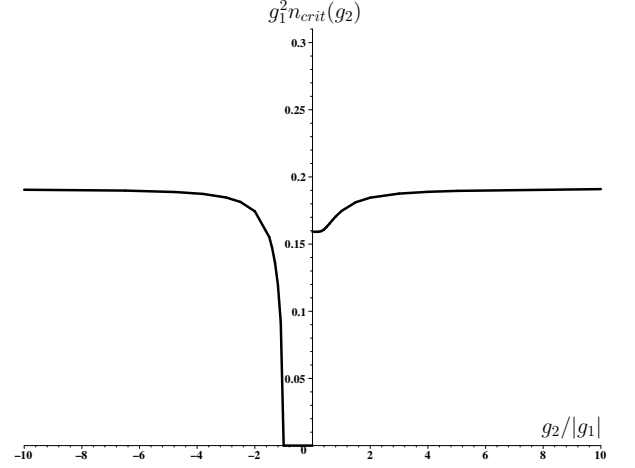


Рисунок 2.4 — Плотность числа частиц $n = n_{crit}(g_2)$ как функция g_2 , которая генерируется в критической точке, т.е. при $\mu = \mu_{crit}(g_2)$, при произвольном фиксированном $g_1 < 0$. При $\mu < \mu_{crit}(g_2)$ плотность числа частиц n равна нулю.

из фаз I, II или III. В фазе I, то есть при $g_1 > 0$ и $g_2 > 0$, глобальный минимум эффективного потенциала $V_{eff}(M, \Delta)$ находится в нуле. Таким образом, в этом случае мы имеем $M_0 = \langle \sigma(x) \rangle = 0$ и $\Delta_0 = \langle \Delta(x) \rangle = 0$. В результате в фазе I обе симметрии, как киральная, так и электромагнитная $U(1)$, остаются ненарушенными, а фермионы безмассовыми. Из-за этого фазу I будем называть симметричной фазой. В фазе II, которая существует только в области $g_1 < 0$, точка глобального минимума (M_0, Δ_0) определяется соотношениями $M_0 = -1/g_1$ и $\Delta_0 = 0$. Таким образом, в этой фазе киральная симметрия спонтанно нарушена и фермионы приобретают динамическую массу M_0 . И последнее, в сверхпроводящей фазе III, где $g_2 < 0$, имеем следующие выражения для щелей $M_0 = 0$ и $\Delta_0 = -1/g_2$.

Заметим также, что если $g_1 = g_2 \equiv g$ и $g < 0$ (что является просто прямой L на Рис. 2.1), то эффективный потенциал (2.21) имеет два глобальных минимума. Первый, который находится в точке $(M_0 = -1/g, \Delta_0 = 0)$, соответствует фазе с нарушенной киральной симметрией. Второй, который находится в точке $(M_0 = 0, \Delta_0 = -1/g)$, соответствует сверхпроводящей фазе.

Ясно, что если параметр обрезания Λ фиксирован, тогда фазовый портрет модели может быть описан в терминах голых констант связи G_1, G_2 вместо конечных величин g_1, g_2 .

Действительно, введем критическое значение голых констант связи $G_c = \frac{\pi^2}{16\Lambda \ln(1+\sqrt{2})}$. Тогда, как следует из Рис. 2.1 и формулы (2.19), $G_1 < G_c$ и $G_2 < G_c$ соответствуют симметричной фазе I модели. Если $G_1 > G_c, G_2 < G_c$ ($G_1 < G_c, G_2 > G_c$), тогда реализуется фаза с нарушенной киральной симметрией II (сверхпроводящая фаза III). Предположим, что $G_1 > G_c$ и $G_2 > G_c$. В этом случае при $G_1 > G_2$ ($G_1 < G_2$) мы имеем фазу II с нарушенной киральной симметрией (сверхпроводящую фазу III).

2.4.2 Рассмотрение влияния ненулевого химического потенциала

В этом параграфе мы изучим влияние химического потенциала $\mu > 0$ на фазовую структуру модели (2.1) (температура равна нулю). Численные и аналитические исследования термодинамического потенциала (2.24) показывают, что его точки минимума могут быть

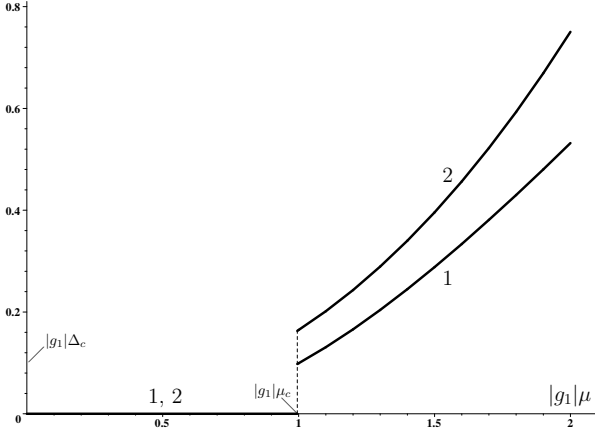


Рисунок 2.5 — Сверхпроводящая щель Δ_0 и плотность числа частиц n в зависимости от μ при произвольном фиксированном $g_1 < 0$ и $g_2 = 0.5|g_1|$. Кривые 1 и 2 представляют собой графики зависимости безразмерных величин $|g_1|\Delta_0$ и $|g_1|^2n$ от химического потенциала, соответственно. Здесь $|g_1|\mu_c = |g_1|\mu_{crit}(g_2 = 0.5|g_1|) \approx 0.995$ и $|g_1|\Delta_c = |g_1|\Delta_{crit}(g_2 = 0.5|g_1|) \approx 0.098$.

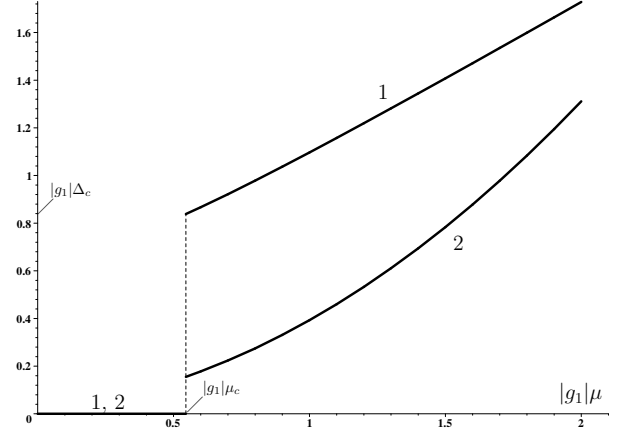


Рисунок 2.6 — Сверхпроводящая щель Δ_0 и плотность числа частиц n в зависимости от μ при фиксированном произвольном $g_1 < 0$ и $g_2 = -1.5|g_1|$. Кривые 1 и 2 представляют собой графики безразмерных величин $|g_1|\Delta_0$ и $|g_1|^2n$, соответственно. Здесь $|g_1|\mu_c = |g_1|\mu_{crit}(g_2 = -1.5|g_1|) \approx 0.545$ и $|g_1|\Delta_c = |g_1|\Delta_{crit}(g_2 = -1.5|g_1|) \approx 0.838$.

только следующих видов ($M \neq 0, \Delta = 0$), ($M = 0, \Delta \neq 0$) или ($M = 0, \Delta = 0$), то есть минимум находится на одной из осей и два конденсата не могут быть одновременно не равными нулю. Таким образом, для того чтобы исследовать свойства глобальной точки минимума функции (2.24), достаточно рассмотреть ее только на M и Δ осях, где термодинамический потенциал (2.24) принимает вид

$$12\pi\Omega^{ren}(M, \Delta) \Big|_{\Delta=0} \equiv 12\pi\omega_1(M) = \frac{6M^2}{g_1} + 2(M + \mu)^3 + 2|M - \mu|^3 - 3\mu(M + \mu)^2 + 3\mu(M - \mu)|M - \mu|, \quad (2.25)$$

$$12\pi\Omega^{ren}(M, \Delta) \Big|_{M=0} \equiv 12\pi\omega_2(\Delta) = \frac{6\Delta^2}{g_2} + 4(\mu^2 + \Delta^2)^{3/2} - 6\mu^2\sqrt{\mu^2 + \Delta^2} - 3\mu\Delta^2 \ln \left(\frac{(\mu + \sqrt{\mu^2 + \Delta^2})^2}{\Delta^2} \right), \quad (2.26)$$

соответственно. Сравнивая минимумы функций (2.25) и (2.26), можно найти точку глобального минимума всего термодинамического потенциала (2.24) и ее зависимость от параметров модели μ , g_1 и g_2 , то есть можно получить фазовую структуру модели.

Также в этом параграфе мы изучим поведение плотности числа частиц n в разных фазах при различных значениях μ ,

$$n = - \frac{\partial \Omega^{ren}(M, \Delta)}{\partial \mu} \Big|_{M=M_0, \Delta=\Delta_0}. \quad (2.27)$$

Точка глобального минимума термодинамического потенциала (2.24) это наименьший из минимумов функций $\omega_1(M)$ (2.25) и $\omega_2(\Delta)$ (2.26). Ясно, что в фазе с нарушенной киральной симметрией $\Delta_0 = 0$ и щель M_0 не зависит от параметра g_2 . Соответственно, в сверхпроводящей фазе $M_0 = 0$ и щель Δ_0 не зависит от параметра g_1 . Таким образом, можно использовать следующие выражения для плотности числа частиц в фазе с нарушенной киральной симметрией II и сверхпроводящей фазе III:

$$n|_{\text{phase II}} = -\frac{\partial\omega_1(M)}{\partial\mu}\Big|_{M=M_0} = \frac{1}{2\pi}(\mu^2 - M_0^2)\theta(\mu - M_0), \quad (2.28)$$

$$n|_{\text{phase III}} = -\frac{\partial\omega_2(\Delta)}{\partial\mu}\Big|_{\Delta=\Delta_0} = \frac{1}{2\pi} \left[\mu\sqrt{\mu^2 + \Delta_0^2} + \Delta_0^2 \ln \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + \Delta_0^2}}{\Delta_0} \right], \quad (2.29)$$

где $\theta(x)$ - θ функция Хевисайда.

Случай $g_1 < 0$. Вначале предположим, что g_1 фиксировано и отрицательно, то есть $g_1 < 0$. Тогда легко показать, что для произвольных значений g_2 существует критический химический потенциал $\mu_{crit}(g_2)$ (см. Рис. 2.2) такой, что при $\mu < \mu_{crit}(g_2)$ система находится в фазе с нарушенной киральной симметрией II (если $\mu_{crit}(g_2) > 0$), и в сверхпроводящей фазе III при $\mu > \mu_{crit}(g_2)$.¹ Другими словами, если $\mu < \mu_{crit}(g_2) \neq 0$, тогда глобальный минимум термодинамического потенциала (2.24) находится в точке ($M_0 = -1/g_1, \Delta_0 = 0$) и не зависит от μ в интервале $0 < \mu < \mu_{crit}(g_2)$. Однако, при $\mu = \mu_{crit}(g_2)$ он прыгает в точку ($M_0 = 0, \Delta_0 = \Delta_{crit}(g_2)$), где $\Delta_{crit}(g_2)$ в зависимости от g_2 изображена на Рис. 2.3. Таким образом, в критической точке $\mu = \mu_{crit}(g_2)$ происходит фазовый переход первого рода и динамически генерируется сверхпроводящая щель $\Delta_0 = \Delta_{crit}(g_2)$. Оказывается, что Δ_0 в зависимости от μ является возрастающей функцией в интервале $\mu > \mu_{crit}(g_2)$. В частности, поведение Δ_0 в зависимости от μ представлено кривой 1 на Рис. 2.5 (при $g_2 = 0.5|g_1|$), Рис. 2.6 (при $g_2 = -1.5|g_1|$) и Рис. 2.7 (при $g_2 = -0.5|g_1|$).

Также ясно из Рис. 2.2, что при $\mu < \mu_{crit}(g_2)$, то есть в фазе II, плотность числа частиц равна нулю. Для того чтобы объяснить это, вспомним, что в фазе II щель M_0 равняется $1/|g_1|$. Из Рис. 2.2 следует, что для всех значений g_2 выполняется неравенство $\mu_{crit}(g_2) < M_0$. Таким образом, во всей фазе II, где $\mu < \mu_{crit}(g_2)$, мы имеем $\mu < M_0$ и, как следует из выражения (2.28), плотность числа частиц равняется нулю ($n = 0$). Однако, если μ равняется своему критическому значению $\mu = \mu_{crit}(g_2)$, в системе генерируется ненулевая плотность числа частиц $n_{crit}(g_2)$ (см. Рис. 2.4). Дальнейшее увеличение химического потенциала сопровождается увеличением плотности числа частиц n в зависимости от μ . (Очевидно, в этом случае плотность числа частиц должна вычисляться с помощью выражения (2.29).) Например, на Рис. 2.5–2.7 приведен график зависимости n относительно μ при различных соотношениях между g_1 и g_2 (зависимость обозначается кривой 2).

Вспомним, что при $\mu = 0$ две фазы II и III имели эквивалентный минимум термодинамического потенциала только при отрицательных значениях $g_1 = g_2 < 0$ (линия L на Рис. 2.1). Оказывается, что для произвольных фиксированных $g_1 < 0$ и при ненулевом химическом потенциале это свойство термодинамического потенциала разрешено в большей области g_2 . Действительно, как показал наш анализ, в этом случае, если $g_2 > 0$ или $g_2 < g_1$, то при $\mu = \mu_{crit}(g_2)$ (см. Рис. 2.2) термодинамический потенциал имеет два эквивалентных минимума, соответствующих фазам II и III. В результате для этих значений g_1 и g_2 при $\mu = \mu_{crit}(g_2)$ имеет место сосуществование фазы с нарушенной киральной симметрией и сверхпроводящей фазы. В этом случае мы имеем следующую картину фазовых переходов в модели. При

¹Рисунки. 2.2-2.10 приведены в терминах безразмерных величин, которые получены после умножении на соответствующую степень $|g_1|$ с соответствующей размерностью. Например, вместо величин μ , Δ_0 , g_2 мы используем соответствующие безразмерные аналоги $|g_1|\mu$, $|g_1|\Delta_0$, $g_2/|g_1|$. Вместо плотности числа частиц n изображена безразмерная величина $g_1^2 n$ и так далее.

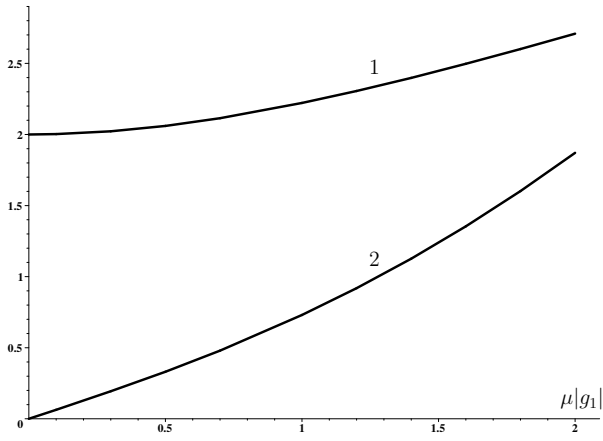


Рисунок 2.7 — Сверхпроводящая щель Δ_0 и плотность числа частиц n в зависимости от μ при фиксированном произвольном g_1 (при разных $g_1 < 0$ и $g_1 > 0$), а также при $g_2 = -0.5|g_1|$. Кривые 1 и 2 представляют собой графики безразмерных величин $|g_1|\Delta_0$ and $6|g_1|^2n$, соответственно.

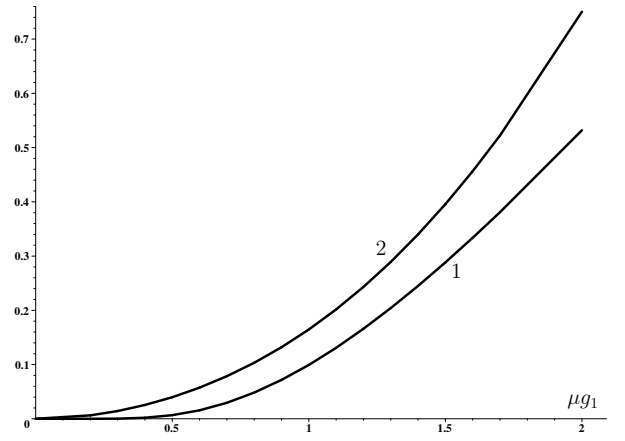


Рисунок 2.8 — Сверхпроводящая щель Δ_0 и плотность числа частиц n в зависимости от μ при фиксированном произвольном $g_1 > 0$, а также при $g_2 = 0.5g_1$. Кривые 1 и 2 представляют собой графики безразмерных величин $|g_1|\Delta_0$ и $|g_1|^2n$, соответственно.

достаточно малых значениях μ вакуумное состояние системы является пустым пространством (плотность числа частиц равняется нулю). Если фермионы создаются в этой системе, они имеют массу, равную $M_0 = -1/g_1$, то есть вакуумное состояние соответствует фазе с нарушенной киральной симметрией II. Затем, когда химический потенциал μ равняется критическому значению $\mu = \mu_{crit}(g_2)$, пузыри новой фазы III появляются в пустом пространстве. Внутри каждого пузыря плотность числа частиц n отлична от нуля и равняется $n_{crit}(g_2)$ (см. Рис. 2.4).

Случай $g_1 > 0$. Теперь рассмотрим фазовую структуру модели при положительных значениях g_1 . Вспомним, что в этом случае мы имеем довольно слабое притягивающее взаимодействие в киральном канале, то есть $G_1 < G_c$. Ясно, если также $g_2 < 0$, то в этом случае реализуется сверхпроводящая фаза при произвольных значениях $\mu \geq 0$. Поведение щели Δ_0 и плотности числа частиц n относительно μ в этой области сверхпроводящей фазы представлено на Рис. 2.7 в частном случае $g_2 = -0.5g_1$ и $g_1 > 0$. Более того, как это ясно из Рис. 2.7, поведение Δ_0 и n в зависимости от μ остается тем же в случае $g_2 = -0.5|g_1|$ и отрицательных значениях g_1 . Для того чтобы объяснить этот факт, необходимо принять во внимание замечание, сделанное после формулы (2.27), что сверхпроводящая щель не зависит от константы связи g_1 , а только от g_2 . Таким образом, не удивительно, что графики Δ_0 и n остаются неизменными в случае, если параметр g_1 меняет знак.

Вспомним, что если обе константы связи положительные, $g_1 > 0$ и $g_2 > 0$, то при $\mu = 0$ мы имеем фазу I без нарушения какой-либо симметрии, где щели Δ_0 и M_0 равняются нулю (см. Рис. 2.1). Однако, наш анализ показывает, что при произвольно малых ненулевых значениях μ точка глобального минимума термодинамического потенциала (2.24) непрерывно переходит из точки $(M_0 = 0, \Delta_0 = 0)$ в точку $(M_0 = 0, \Delta_0 \neq 0)$. Следовательно, при положительных значениях g_1 и g_2 происходит фазовый переход второго рода из симметричной фазы I в сверхпроводящую фазу III, когда химический потенциал приобретает бесконечно малое ненулевое значение. Типичное поведение щели Δ_0 и плотности числа частиц n в зависимости от μ в этом случае представлено на Рис. 2.8. Сравнивая Рис. 2.7 и Рис. 2.8, мы видим, что при тех же самых значениях μ щель Δ_0 и плотность числа частиц n намного больше в случае

$g_1 > 0$, $g_2 < 0$, чем в случае $g_1 > 0$, $g_2 > 0$. Для того чтобы подкрепить это утверждение, на Рис. 2.9 и 2.10 представлена зависимость щели Δ_0 и плотности числа частиц n от g_2 в двух различных областях $g_2 < 0$ и $g_2 > 0$, соответственно, при фиксированном значении химического потенциала $\mu = 0.5/g_1$.

Мы видим, что при $g_1 > 0$, то есть при $G_1 < G_c$, отсутствует нарушение киральной симметрии, но система находится в сверхпроводящей фазе при любых $\mu > 0$ (в сверхпроводящей фазе происходит образование куперовских пар). Для того чтобы объяснить такое разное поведение, можно использовать следующие очень наивные физические соображения. Так как при $\mu > 0$ мы имеем ненулевую плотность числа частиц (см., например, Рис. 2.8), существует море Ферми частиц с энергиями меньше или равными μ (поверхность Ферми). Ясно, что в этом случае нет энергетических затрат на создание пары частиц с противоположными импульсами над поверхностью Ферми. Тогда вследствие бесконечно малого притяжения между этими частицами ($G_2 > 0$) образуются куперовские пары и симметрия $U(1)$ спонтанно нарушается в результате образования конденсата Бозе-Эйнштейна куперовских пар. Заметим, так как в энергетическом спектре фермионов появляется щель $\Delta \neq 0$ (см. Рис. 2.8), достаточно слабые внешние силы не способны разрушить сверхпроводящий конденсат и, таким образом, он является стабильным.

Относительно нарушения киральной симметрии заметим, что частицы и дырки с противоположными импульсами могут создаваться в системе без затрат энергии. Более того, существует притяжение между частицами и дырками. Однако, так как ненулевая щель M не появляется в энергетическом спектре при достаточно малых $G_1 < G_c$, образование связанных пар частица-дырка является слабосвязанным резонансом, который вряд ли является стабильным и может быть легко разрушен произвольно малым внешним влиянием. Таким образом, не образуется стабильного конденсата Бозе-Эйнштейна этих пар и киральная симметрия остается ненарушенной. (Для более детального обсуждения возможных типов образования разных пар в плотной (кварковой) фермионной материи, см., например, [98].)

В итоге можно сказать, что при $T = 0$ химический потенциал индуцирует сверхпроводимость в этой модели для произвольного соотношения между константами связи $g_{1,2}$ (или, эквивалентно, $G_{1,2}$).

2.5 Учет конечной температуры

Сейчас исследуем влияние и температуры T и химического потенциала μ на фазовую структуру модели. Хорошо известно, (см. [99]) что в d пространственных измерениях (в нашем случае $d = 2$) вероятность перехода из одного вырожденного минимума термодинамического потенциала в другой пропорциональна $\exp(-N\beta L^{d-2})$, где L линейный размер системы и β величина, обратная температуре, $\beta = 1/T$. Из этого выражения следует, что при $d = 2$ вероятность перехода равна нулю даже при конечном N , если $T = 0$. Это приводит к тому, что непрерывная симметрия может быть спонтанно нарушена в любых планарных системах при $T = 0$. (Таким образом, наше рассмотрение перехода в сверхпроводящую фазу при $T = 0$ в предыдущем параграфе справедливо при произвольных значениях N .) Однако, если $T \neq 0$, то вероятность перехода, определяемая этим выражением, не равна нулю при конечном N . Это обстоятельство приводит к исчезновению параметра порядка и, как следствие, к запрещению спонтанного нарушения симметрии в $d = 2$ пространственных измерениях при конечном N и $T \neq 0$. Однако, если $N \rightarrow \infty$, то вероятность перехода стремится к нулю и спонтанное нарушение симметрии разрешено. Это предположение (такое же, как

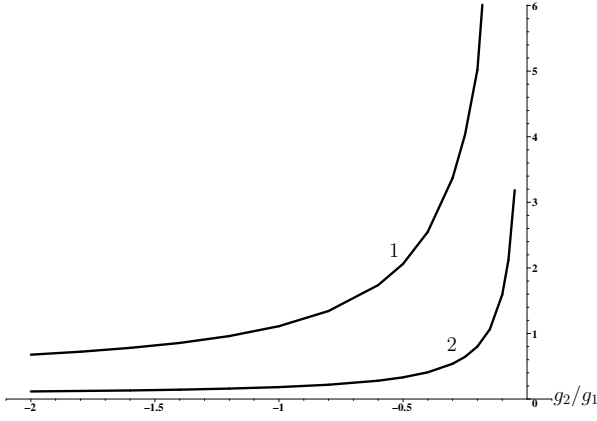


Рисунок 2.9 — Сверхпроводящая щель Δ_0 и плотность числа частиц n в зависимости от $g_2 < 0$ при произвольном фиксированном $g_1 > 0$ и $\mu = 0.5/g_1$. Кривые 1 и 2 представляют собой графики зависимости безразмерных величин $g_1\Delta_0$ и g_1^2n , соответственно.

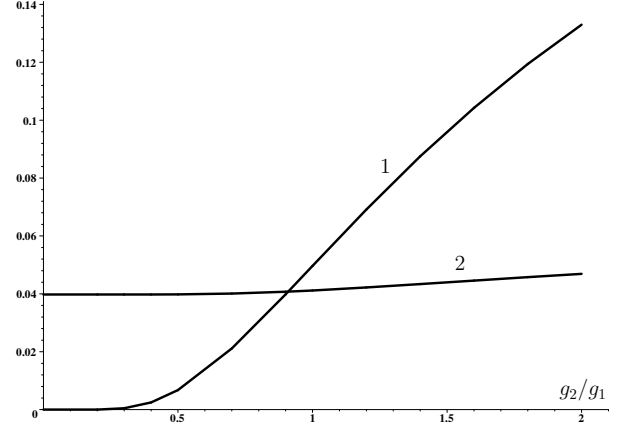


Рисунок 2.10 — Сверхпроводящая щель Δ_0 и плотность числа частиц n в зависимости от $g_2 > 0$ при произвольном фиксированном $g_1 > 0$ и $\mu = 0.5/g_1$. Кривые 1 и 2 представляют собой графики зависимости безразмерных величин $g_1\Delta_0$ и g_1^2n , соответственно.

в [3;96]) используется в дальнейшем, где мы исследуем сверхпроводящую фазу при конечной температуре в ведущем порядке $\frac{1}{N}$ разложения.

В этом случае, для того чтобы получить соответствующий (неперенормированный) термодинамический потенциал $\Omega_T(M, \Delta)$, можно просто начать с выражения для термодинамического потенциала при нулевой температуре (2.12) и произвести следующие стандартные преобразования:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} (\dots) \rightarrow iT \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\dots), \quad p_0 \rightarrow p_{0n} \equiv i\omega_n \equiv i\pi T(2n+1), \quad (2.30)$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то есть интегрирование по p_0 должно быть заменено на суммирование по мадубаровским частотам ω_n . Суммируя по мадубаровским частотам в полученном выражении (соответствующая техника представлена в [17]), получим следующее выражение для термодинамического потенциала:

$$\begin{aligned} \Omega_T(M, \Delta) = & \frac{M^2}{4G_1} + \frac{\Delta^2}{4G_2} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} (\mathcal{E}_{\Delta}^+ + \mathcal{E}_{\Delta}^-) - \\ & - 2T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln \left([1 + e^{-\beta\mathcal{E}_{\Delta}^+}] [1 + e^{-\beta\mathcal{E}_{\Delta}^-}] \right), \end{aligned} \quad (2.31)$$

где $\beta = 1/T$ и $\mathcal{E}_{\Delta}^{\pm}$ задаются формулами после (2.12). Ясно, что только первый интеграл в этом выражении, (который является таким же, как в случае нулевой температуры), содержит ультрафиолетовую расходимость всего термодинамического потенциала (2.31). Таким образом, регуляризуя термодинамический потенциал (2.31) таким же образом, как это было сделано в (2.15) для термодинамического потенциала при нулевой температуре, и затем произведя замену $G_{1,2} \rightarrow G_{1,2}(\Lambda)$ (см. формулу (2.19)), получим в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ конеч-

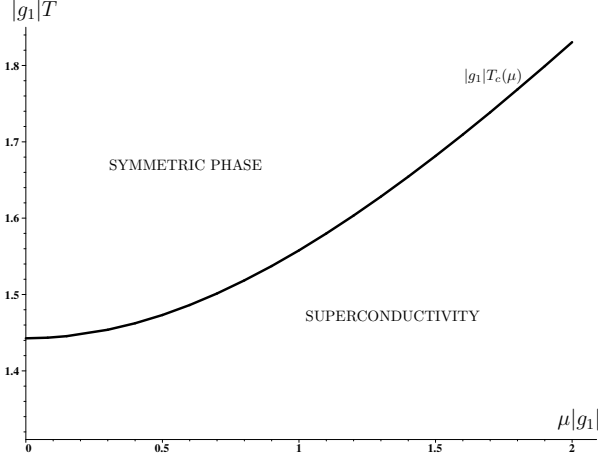


Рисунок 2.11 — Фазовая диаграмма модели в плоскости (μ, T) при $g_2 = -0.5|g_1|$ и произвольном фиксированном g_1 в обоих случаях, как при $g_1 < 0$, так и при $g_1 > 0$.

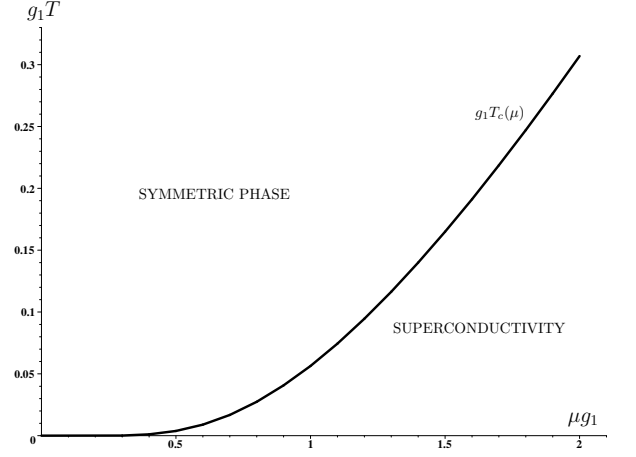


Рисунок 2.12 — Фазовая диаграмма модели в плоскости (μ, T) при произвольном фиксированном $g_1 > 0$ и при $g_2 = 0.5g_1$.

ное перенормированное выражение для термодинамического потенциала, обозначаемое как $\Omega_T^{ren}(M, \Delta)$,

$$\Omega_T^{ren}(M, \Delta) = \Omega^{ren}(M, \Delta) - 2T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \ln \left([1 + e^{-\beta \varepsilon_{\Delta}^+}] [1 + e^{-\beta \varepsilon_{\Delta}^-}] \right), \quad (2.32)$$

где $\Omega^{ren}(M, \Delta)$ термодинамический потенциал при нулевой температуре (2.24). Численные исследования показывают, что все возможные локальные минимумы термодинамического потенциала $\Omega_T^{ren}(M, \Delta)$ располагаются на осях $M = 0$ или $\Delta = 0$. Следовательно, достаточно рассматривать соответствующие проекции термодинамического потенциала на эти оси, задаваемые следующими выражениями

$$\begin{aligned} F_1(M) &\equiv \Omega_T^{ren}(M, \Delta) \Big|_{\Delta=0} = \omega_1(M) - 2T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \ln \left([1 + e^{-\beta E_{\Delta}^+}] [1 + e^{-\beta E_{\Delta}^-}] \right) = \\ &= \frac{M^2}{2\pi g_1} + \frac{M^3}{3\pi} - 2T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \ln \left([1 + e^{-\beta(E+\mu)}] [1 + e^{-\beta(E-\mu)}] \right), \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$F_2(\Delta) \equiv \Omega_T^{ren}(M, \Delta) \Big|_{M=0} = \omega_2(\Delta) - 2T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \ln \left([1 + e^{-\beta E_{\Delta}^+}] [1 + e^{-\beta E_{\Delta}^-}] \right), \quad (2.34)$$

где $E = \sqrt{|\vec{p}|^2 + M^2}$, $(E_{\Delta}^{\pm})^2 = (|\vec{p}| \pm \mu)^2 + \Delta^2$, и функции $\omega_1(M)$, $\omega_2(\Delta)$ задаются выражениями (2.25) и (2.26), соответственно. Щели M_0 и Δ_0 являются решениями следующих уравнений стационарности

$$\frac{\partial F_1(M)}{\partial M} \equiv \frac{M}{\pi} f_1(M) = 0, \quad \frac{\partial F_2(\Delta)}{\partial \Delta} \equiv \frac{\Delta}{\pi} f_2(\Delta) = 0, \quad (2.35)$$

где

$$f_1(M) = \frac{1}{g_1} + M + T \ln \left\{ [1 + e^{-\beta(M+\mu)}] [1 + e^{-\beta(M-\mu)}] \right\}, \quad (2.36)$$

$$f_2(\Delta) = \frac{1}{g_2} + \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} + 2T \ln \left(1 + e^{-\beta\sqrt{\mu^2 + \Delta^2}} \right) - \mu \int_0^\mu \tanh \left(\frac{\beta\sqrt{q^2 + \Delta^2}}{2} \right) \frac{dq}{\sqrt{q^2 + \Delta^2}}, \quad (2.37)$$

соответственно (см. Приложение 7.4).

На базе этих уравнений щели исследуем фазовую структуру модели при $T > 0$.

Случай $g_1 > 0$. Сначала рассмотрим фазовый портрет модели при $g_1 > 0$. Из (2.35) и (2.36) прямо следует, что щель M_0 всегда равно нулю при $g_1 > 0$ (она может быть отлична от нуля только при $g_1 < 0$). Однако, щель Δ_0 положительна при $g_2 < 0$ и $g_2 > 0$, если температура достаточно мала, то есть когда $f_2(0) < 0$. Таким образом, при $g_1 > 0$ и положительных значениях μ реализуется сверхпроводящая фаза III при достаточно малых значениях температуры $T < T_c(\mu)$. При $T > T_c(\mu)$ уравнение щели (2.35) дает значение щелей $\Delta_0 = 0$ и $M_0 = 0$, то есть симметричную фазу. Температура фазового перехода второго рода $T_c(\mu)$ является решением уравнения $f_2(0) = 0$,

$$f_2(0) \equiv \frac{1}{g_2} + \mu + 2T \ln \left(1 + e^{-\beta\mu} \right) - \mu \int_0^\mu \tanh \left(\frac{\beta q}{2} \right) \frac{dq}{q} = 0. \quad (2.38)$$

Таким образом, в терминах (μ, T) кривая $T = T_c(\mu)$ является границей между симметричной и сверхпроводящей фазами. Численные исследования уравнения (2.38) показывают, что при $g_2 = \pm 0.5g_1$ фазовый портрет модели имеет вид, представленный на Рис. 2.11, Рис. 2.12.

Если $g_2 < 0$, то из (2.38) следует, что $T_c(0) = -1/(2g_2 \ln 2)$. Также в этом случае критическая температура может быть представлена в виде ряда по малому параметру μ

$$T_c(\mu) = T_c(0) - \mu^2 g_2 / 16 + o(\mu^2 g_2). \quad (2.39)$$

Сравнивая это выражение при $g_2 = -0.5g_1$ с $T_c(\mu)$ из Рис. 2.11, мы видим, что разложение (2.39) дает достаточно хорошее приближение для критической температуры только в интервале $0 < \mu g_1 < 0.2$.

Теперь давайте рассмотрим некоторые аналитические приближения для $T_c(\mu)$ при $g_2 > 0$ (g_1 фиксировано и положительно). Для этого сначала заметим, что для всех точек критической кривой $T = T_c(\mu)$ из Рис. 2.12 выполняется соотношение $\mu/T \equiv \mu\beta \gg 1$. Таким образом, удобно представить уравнение (2.38) в следующей эквивалентной форме:

$$\frac{1}{2Tg_2} + \frac{\mu\beta}{2} + \ln \left(1 + e^{-\beta\mu} \right) - \frac{\mu\beta}{2} \left\{ C_1 + \int_1^{\mu\beta/2} \frac{dz}{z} + C_2 - \int_{\mu\beta/2}^{\infty} [\text{th } z - 1] \frac{dz}{z} \right\} = 0,$$

где

$$C_1 = \int_0^1 \text{th } z \frac{dz}{z} \approx 0.910, \quad C_2 = \int_1^{\infty} [\text{th } z - 1] \frac{dz}{z} \approx -0.091. \quad (2.40)$$

Третий член в этом выражении, как и последний интеграл в скобочках, могут быть отброшены по сравнению с другими членами. Полученное уравнение может легко разрешено относительно T . В результате получим

$$T_c(\mu) \approx \frac{\mu}{2} \exp [C_1 + C_2 - 1 - 1/(\mu g_2)]. \quad (2.41)$$

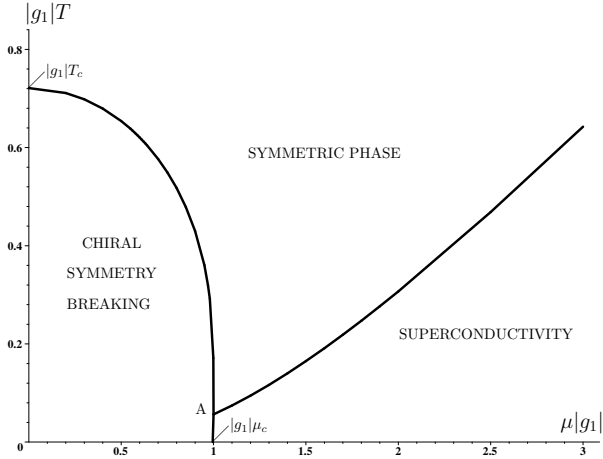


Рисунок 2.13 — Фазовый портрет модели в терминах (μ, T) при $g_2 = 0.5|g_1|$ и при произвольном фиксированном $g_1 < 0$. Все кривые являются фазовыми переходами второго рода, за исключением границы между сверхпроводящей фазой и фазой с нарушенной киральной симметрией, где происходит фазовый переход первого рода. Координаты тройной точки А следующие $|g_1|\mu_A \approx 0.999$ и $|g_1|T_A \approx 0.056$. Более того, $|g_1|\mu_c \approx 0.995$ и $|g_1|T_c = 1/(2 \ln 2) \approx 0.721$.

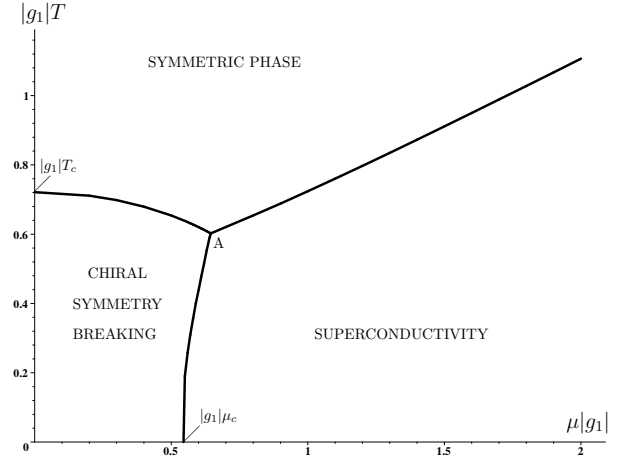


Рисунок 2.14 — Фазовый портрет модели в терминах (μ, T) при $g_2 = -1.5|g_1|$ и при произвольном фиксированном $g_1 < 0$. Все кривые являются фазовыми переходами второго рода, за исключением границы между сверхпроводящей фазой и фазой с нарушенной киральной симметрией, где происходит фазовый переход первого рода. Координаты тройной точки А следующие $|g_1|\mu_A \approx 0.645$ и $|g_1|T_A \approx 0.602$. Более того, $|g_1|\mu_c \approx 0.545$ и $|g_1|T_c = 1/(2 \ln 2) \approx 0.721$.

Заметим, что при $g_2 = 0.5g_1$ график, построенный с помощью выражения (2.41), совпадает с большой точностью с графиком для критической температуры из Рис. 2.12 во всем интервале $0 < \mu g_1 < 2$.

Случай $g_1 < 0$. В этом случае представлены три фазовых портрета модели в плоскости (μ, T) для качественно разного выбора соотношений между константами связи g_1 и g_2 . Первый, который соответствует $g_2 = -0.5|g_1|$, (представлен на Рис. 2.11) был уже описан ранее, потому что он является таким же, как в случае $g_1 > 0$, $g_2 = -0.5g_1$. Два других, которые соответствуют $g_2 = 0.5|g_1|$ и $g_2 = -1.5|g_1|$, представлены на Рис. 2.13 и 2.14, соответственно. Точки (μ, T) на границе между симметричной фазой и фазой с нарушенной киральной симметрией (или сверхпроводящей фазой) задаются неявно уравнениями $f_1(0) = 0$ (или $f_2(0) = 0$), где функции $f_1(M)$ и $f_2(\Delta)$ определены в (2.36) и (2.37), соответственно. На этой границе происходит фазовый переход второго рода, в то время как граница между фазой с нарушенной киральной симметрией и сверхпроводящей фазой представляет собой кривую фазового перехода первого рода. Таким образом, в точках (μ, T) этой границы две фазы могут сосуществовать.

Анализируя вышеупомянутую фазовую диаграмму в терминах (μ, T) из Рис. 2.11–2.14, мы видим, что для каждого произвольного фиксированного значения температуры T (для всех соотношений между константами связи) существует определенная величина химического потенциала μ_T , такая, что для всех $\mu > \mu_T$ в системе реализуется сверхпроводящая фаза. Это свойство присуще только (2+1)-мерной модели (2.1) и отсутствует в ее двумерном аналоге [3].

2.6 Итоги и выводы

В этой главе мы изучили борьбу между киральным и сверхпроводящим конденсатами в рамках (2+1)-мерной модели типа Гросса-Неве (2.1), которая является прямым обобщением двумерной модели Ходоса и других [3]. Четырехфермионная модель (2.1) описывает взаимодействия в фермион-антифермионном (киральном) и сверхпроводящем дифермионном (образование куперовских пар) каналах с константами связи G_1 и G_2 , соответственно. Система инвариантна относительно киральной симметрии и симметрии $U(1)$ (последняя группа соответствует сохранению числа фермионов или электрического заряда в системе). Для того чтобы избежать запрета на спонтанное нарушение непрерывной симметрии в (2+1)-мерных квантовых теориях поля при $T > 0$, мы рассматривали, как это было сделано в [3], фазовую структуру нашей модели в ведущем порядке приближения больших N , то есть в пределе $N \rightarrow \infty$, где N - число фермионных полей.

Случай $T = 0$, $\mu = 0$. Сначала мы изучили термодинамический потенциал модели в случае $T = 0$, $\mu = 0$. В этом случае фазовый портрет представлен на Рис. 2.1 в терминах конечных констант связи g_1 и g_2 , которые являются ренормгрупповыми инвариантами. Каждая точка (g_1, g_2) этой диаграммы соответствует определенной фазе. Например, при $g_{1,2} > 0$, то есть при достаточно малых значениях голых констант связи $G_{1,2}$ (см. комментарий в конце параграфа 2.4.1) ни одна из симметрий, ни киральная, ни $U(1)$ симметрия не являются нарушенными и система находится в симметричной фазе. Более того, оказалось, что две фазы, фаза с нарушенной киральной симметрией II и сверхпроводящая фаза III, могут сосуществовать только на линии $g_1 = g_2 \equiv g$, $g < 0$.

Случай $T = 0$, $\mu \neq 0$. Здесь мы выделили два качественно разных случая, $g_1 < 0$ и $g_1 > 0$. Для случая, когда $g_1 < 0$ и фиксировано, фазовый портрет модели (g_2, μ) представлен на Рис. 2.2. При $g_2 > 0$ или при $g_2 < g_1$ в системе реализуется фаза II с нулевой плотностью числа

частиц при достаточно малых значениях μ . В этом случае вакуумное состояние системы является пустым пространством. Затем при некотором критическом значении $\mu = \mu_{crit}(g_2)$ в пространстве могут появиться пузыри новой фазы III с плотностью числа частиц $n_{crit}(g_2)$ (см. Рис. 2.4), и для всех $\mu > \mu_{crit}(g_2)$ все пространство заполнено сверхпроводящей фазой, в которой плотность числа частиц n отлична от нуля $n > n_{crit}(g_2)$. При $g_1 > 0$ система находится в сверхпроводящей фазе даже при бесконечно малых значениях μ . При нулевой температуре ($T = 0$) химический потенциал в любом случае приводит к тому, что система переходит в сверхпроводящую фазу.

Случай $T > 0, \mu \neq 0$. Фазовый портрет системы в этом случае представлен на Рис. 2.11–2.14. Из этих рисунков ясно, что при фиксированном μ с увеличением температуры восстанавливается симметричная фаза. Однако, при произвольном фиксированном T , увеличение химического потенциала приводит к появлению сверхпроводимости в системе при произвольном соотношении между константами связи g_1 и g_2 .

Тот факт, что химический потенциал индуцирует явление сверхпроводимости, является основным результатом этой главы. Заметим, что это свойство (2+1)-мерной модели типа Гросса-Неве (2.1) не является справедливым в (1+1)-мерном случае [3]. В (1+1)-мерном случае в сверхпроводящую фазу можно прийти при увеличении химического потенциала, только если температура меньше некоторой критической величины.

Мы надеемся, что результаты этой главы могут пролить свет на явление сверхпроводимости в системах с планарной структурой в физике конденсированного состояния вещества.

Глава 3. Явление сверхпроводимости, индуцированное внешним параллельным магнитным полем в (2+1)-мерной модели типа Гросса-Неве

3.1 Введение

В недавних работах [57–59] борьба между двумя явлениями, нарушением киральной симметрии (образование экзитонных пар) и явлением сверхпроводимости (образование куперовских пар) была исследована в рамках (2+1)-мерных моделей типа Гросса-Неве. Исследовалось влияние на киральную и электромагнитную $U(1)$ симметрию внешних факторов, таких как температура T и внешнее магнитное поле \vec{B}_\perp , перпендикулярное к плоскости системы. В частности, было показано в [59], что достаточно сильное перпендикулярное магнитное поле \vec{B}_\perp разрушает сверхпроводящую фазу планарной (плоской) системы.

В данной главе рассматривается (2+1)-мерная модель типа Гросса-Неве, которая описывает четырехфермионное взаимодействие квазичастиц со спиной $1/2$ (электронов) как в киральном (с константой связи G_1), так и в сверхпроводящем (с константой связи G_2) каналах при нулевой температуре $T = 0$ и ненулевом химическом потенциале $\mu \neq 0$. Также мы предполагаем, что планарная система, то есть плоскость, на которой задана модель Гросса-Неве, находится во внешнем магнитном поле $\vec{B} = \vec{B}_\perp + \vec{B}_\parallel$ таким образом, что $\vec{B}_\perp = 0$ (\vec{B}_\perp - перпендикулярное к плоскости системы магнитное поле, \vec{B}_\parallel - параллельное к плоскости системы магнитное поле). В результате в нашем рассмотрении внешнее магнитное поле \vec{B} взаимодействует только со спинами электронов, но не с их орбитальными моментами импульса. (Взаимодействие между \vec{B} и орбитальными моментами импульса электронов появляется в системе только при $\vec{B}_\perp \neq 0$.) В этом случае, для того чтобы учесть влияние внешнего параллельного магнитного поля на фазовый портрет любой плоской системы (взаимодействие может быть любым, не обязательно четырехфермионным, лишь бы у поля был спин), нужно ввести в лагранжиан зеемановский член, который появляется вследствие эффекта Зеемана. Этот член делает удобным введение эффективных химических потенциалов, соответствующих электронам с разной проекцией спина на направление внешнего магнитного поля.

В недавней работе [9] намагниченность планарных систем, находящихся во внешнем магнитном поле, параллельном плоскости системы, была исследована в рамках той же (2+1)-мерной модели Гросса-Неве, но в случае $G_1 \neq 0$, $G_2 = 0$. В частности, было показано, что при достаточно больших значениях \vec{B}_\parallel происходит восстановление киральной симметрии модели.

Выполнив вычисления, мы показали, что внешнее магнитное поле, параллельное плоскости системы, \vec{B}_\parallel индуцирует появление сверхпроводимости в изначальной модели даже при бесконечно малых значениях константы связи G_2 в сверхпроводящем канале. Если, в дополнение к этому, константа связи G_1 достаточно мала (меньше критической G_c), тогда явление сверхпроводимости появляется при бесконечно малом параллельном магнитном поле \vec{B}_\parallel (конечно, подразумевая, что $G_2 > 0$).

Глава организована следующим образом. В параграфе 3.2 представлен лагранжиан (2+1)-мерной модели типа Гросса-Неве с четырехфермионным взаимодействием в двух каналах: в фермион-антифермионном (или киральном) и в фермион-фермионном (или сверхпроводящем) с учетом внешнего магнитного поля. Здесь представлен также неперенормированный термодинамический потенциал модели в ведущем порядке $\frac{1}{N}$ разложения ($N \rightarrow \infty$), учитывая ненулевой химический потенциал μ и внешнее параллельное магнитное поле \vec{B}_\parallel (температура положена равной нулю). В параграфе 3.3 получено выражение для термоди-

намического потенциала в ведущем порядке $1/N$ разложения, которое является перенормированным и ренормгрупповым инвариантом. Точка глобального минимума термодинамического потенциала дает значение кирального и сверхпроводящего конденсатов (вакуумных средних). В параграфе 3.4.2 приведены фазовый портрет модели в терминах $(\mu, |\vec{B}_{\parallel}|)$ и поведение щелей и различных термодинамических величин системы, таких как плотность числа частиц, намагниченность и магнитная восприимчивость, при различных выборах констант связи. В этом параграфе мы показали, что при произвольном соотношении между константами связи в системе индуцируется сверхпроводимость при достаточно больших значениях μ и/или параллельного магнитного поля \vec{B}_{\parallel} . В частности, было показано, что бесконечно малые значения \vec{B}_{\parallel} индуцируют явление сверхпроводимости при достаточно слабом взаимодействии в фермион-антифермионном (киральном) канале.

3.2 Модель и ее термодинамический потенциал

Мы исследуем влияние внешнего магнитного поля \vec{B} на фазовую структуру (2+1)-мерной версии модели Ходоса, которая описывает низкоэнергетическую динамику квазичастиц (электронов) как в фермион-антифермионном (киральном), так и в фермион-фермионном (куперовское спаривание) каналах. Эта модель является обобщением модели, рассмотренной в главе 2, на случай, когда фермионы обладают спином (введенным таким же образом, как в уравнении Паули). Мы будем учитывать тот факт, что есть две проекции спина $\pm 1/2$ электронов на направление магнитного поля \vec{B} .

Если внешнее магнитное поле параллельно плоскости системы $\vec{B} = \vec{B}_{\parallel}$, тогда лагранжиан имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_{k=1}^2 \bar{\psi}_{ka} \left[\gamma^{\rho} i \partial_{\rho} + \mu \gamma^0 - \nu (-1)^k \gamma^0 \right] \psi_{ka} + \frac{G_1}{N} \left(\sum_{k=1}^2 \bar{\psi}_{ka} \psi_{ka} \right)^2 + \\ & + \frac{G_2}{N} \left(\sum_{k=1}^2 \psi_{ka}^T C \psi_{ka} \right) \left(\sum_{j=1}^2 \bar{\psi}_{jb} C \bar{\psi}_{jb}^T \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где предполагается суммирование по повторяющимся индексам $a, b = 1, \dots, N$ внутренней группы $O(N)$ и по повторяющимся индексам группы Лоренца $\rho = 0, 1, 2$. Для каждого фиксированного $k = 1, 2$ и $a = 1, \dots, N$ величины $\psi_{ka}(x)$ в (3.1) обозначают безмассовое дираковское фермионное поле, преобразующееся по приводимому 4-компонентному спинорному представлению (2+1)-мерной группы Лоренца (см. Приложение 7.2). Более того, все дираковские поля $\psi_{ka}(x)$ представляют собой два фундаментальных мультиплетта $\psi_{1a}(x)$ и $\psi_{2a}(x)$ ($a = 1, \dots, N$) внутренней группы $O(N)$, которая введена здесь для того, чтобы сделать возможным вычисления в рамках непертурбативного разложения в пределе больших N . Мы предполагаем, что спинорные поля $\psi_{1a}(x)$ и $\psi_{2a}(x)$ ($a = 1, \dots, N$) соответствуют фермионам с проекцией спина $1/2$ и $-1/2$ на направление внешнего магнитного поля, соответственно. В (3.1) символ T обозначает операцию транспонирования, μ химический потенциал, соответствующий числу фермионов (разнице числа фермионов и антифермионов), и ν член введен для того, чтобы учесть энергию зеемановского взаимодействия электронов с внешним магнитным полем \vec{B}_{\parallel} . Таким образом, в нашем случае $\nu = g\mu_B B/2$, где $B = |\vec{B}_{\parallel}|$, g - спектроскопический фактор Ланде (в последующем, если не сказано обратное, на протяжении всего рассмотрения мы

будем полагать, что $g = 2$) и $\mu_B = \frac{e}{2m_e}$ - магнетон Бора. Более того, $C \equiv \gamma^2$ это матрица зарядового сопряжения. Алгебра γ^ρ -матриц, как и их конкретное представление, даны в Приложении 7.2.

Модель (3.1) инвариантна относительно дискретного кирального преобразования $\psi_{ka} \rightarrow \gamma^5 \psi_{ka}$, относительно преобразований из непрерывной группы $U(1)$ $\psi_{ka} \rightarrow \exp(i\alpha)\psi_{ka}$ ($k = 1, 2$, $a = 1, \dots, N$) и также относительно преобразований флейворной группы $O(N)$.

Линеаризованная версия лагранжиана (3.1), которая содержит вспомогательные бозонные поля $\sigma(x)$, $\Delta(x)$, $\Delta^*(x)$, имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{N\sigma^2}{4G_1} - \frac{N\Delta^*\Delta}{4G_2} + \sum_{k=1}^2 \left[\bar{\psi}_{ka} \left(\gamma^\rho i\partial_\rho + \mu_k \gamma^0 - \sigma \right) \psi_{ka} - \frac{\Delta^*}{2} \psi_{ka}^T C \psi_{ka} - \frac{\Delta}{2} \bar{\psi}_{ka} C \bar{\psi}_{ka}^T \right], \quad (3.2)$$

где $\mu_1 = \mu + \nu$, $\mu_2 = \mu - \nu$, далее будем считать, что $\nu = \mu_B B$ (в этой формуле и последующих предполагается суммирование по повторяющимся индексам). Ясно, что лагранжианы (3.1) и (3.2) эквивалентны, это можно увидеть, используя уравнения движения Эйлера-Лагранжа для скалярных бозонных полей, которые имеют вид

$$\sigma(x) = -2\frac{G_1}{N} \sum_{k=1}^2 \bar{\psi}_{ka} \psi_{ka}, \quad \Delta(x) = -2\frac{G_2}{N} \sum_{k=1}^2 \psi_{ka}^T C \psi_{ka}, \quad (3.3)$$

$$\Delta^*(x) = -2\frac{G_2}{N} \sum_{k=1}^2 \bar{\psi}_{ka} C \bar{\psi}_{ka}^T.$$

Нейтральное поле $\sigma(x)$ является действительным, то есть $(\sigma(x))^\dagger = \sigma(x)$ (символ \dagger обозначает эрмитово сопряжение), а фермионные поля $\Delta(x)$ и $\Delta^*(x)$ взаимно сопряженные комплексные величины, так $(\Delta(x))^\dagger = \Delta^*(x)$, и наоборот. Если фермионное поле $\Delta(x)$ имеет ненулевое вакуумное среднее, то есть $\langle \Delta(x) \rangle \neq 0$, то спонтанно нарушается абелева симметрия числа фермионов $U(1)$ и в модели реализуется сверхпроводящая фаза. (Заметим, что при $T = 0$ нарушение непрерывной симметрии разрешено в двух пространственных измерениях. Проясняющее обсуждение представлено в главе 2). Если же $\langle \sigma(x) \rangle \neq 0$, то спонтанно нарушена дискретная киральная симметрия модели.

Исследуем фазовую структуру четырехфермионной модели (3.1), начиная с эквивалентного лагранжиана (3.2). В ведущем порядке $\frac{1}{N}$ разложения эффективное действие $\mathcal{S}_{\text{eff}}(\sigma, \Delta, \Delta^*)$ рассматриваемой модели выражается в терминах функционального интеграла по фермионным полям

$$\exp(i\mathcal{S}_{\text{eff}}(\sigma, \Delta, \Delta^*)) = \int \prod_{k=1}^2 \prod_{a=1}^N [d\bar{\psi}_{ka}] [d\psi_{ka}] \exp\left(i \int \mathcal{L} d^3x\right),$$

где

$$\mathcal{S}_{\text{eff}}(\sigma, \Delta, \Delta^*) = - \int d^3x \left[\frac{N}{4G_1} \sigma^2(x) + \frac{N}{4G_2} \Delta(x) \Delta^*(x) \right] + \tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}. \quad (3.4)$$

Фермионный вклад в эффективное действие, то есть член $\tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}$ в (3.4), дается выражением

$$\exp(i\tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}) = \int \prod_{l=1}^2 \prod_{a=1}^N [d\bar{\psi}_{la}] [d\psi_{la}] \exp \left\{ i \int \sum_{k=1}^2 \left[\bar{\psi}_{ka} \left(\gamma^\rho i \partial_\rho + \mu_k \gamma^0 - \sigma \right) \psi_{ka} - \frac{\Delta^*}{2} \psi_{ka}^T C \psi_{ka} - \frac{\Delta}{2} \bar{\psi}_{ka} C \bar{\psi}_{ka}^T \right] d^3x \right\}. \quad (3.5)$$

Вакуумные значения составных скалярных бозонных полей конденсатов $\langle \sigma(x) \rangle$, $\langle \Delta(x) \rangle$ и $\langle \Delta^*(x) \rangle$ определяются уравнениями седловой точки

$$\frac{\delta \mathcal{S}_{\text{eff}}}{\delta \sigma(x)} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{S}_{\text{eff}}}{\delta \Delta(x)} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{S}_{\text{eff}}}{\delta \Delta^*(x)} = 0. \quad (3.6)$$

Так же, как в главе 2, будем полагать, что вакуумные конденсаты не зависят от координат пространства-времени:

$$\langle \sigma(x) \rangle \equiv M, \quad \langle \Delta(x) \rangle \equiv \Delta, \quad \langle \Delta^*(x) \rangle \equiv \Delta^*, \quad (3.7)$$

где M, Δ, Δ^* постоянные величины. В действительности это координаты точки глобального минимума термодинамического потенциала $\Omega(M, \Delta, \Delta^*)$. В ведущем порядке разложения по большому N эта величина определяется следующим выражением:

$$\int d^3x \Omega(M, \Delta, \Delta^*) = -\frac{1}{N} \mathcal{S}_{\text{eff}} \{ \sigma(x), \Delta(x), \Delta^*(x) \} \Big|_{\sigma(x)=M, \Delta(x)=\Delta, \Delta^*(x)=\Delta^*},$$

которое дает

$$\int d^3x \Omega(M, \Delta, \Delta^*) = \int d^3x \left(\frac{M^2}{4G_1} + \frac{\Delta \Delta^*}{4G_2} \right) + \frac{i}{N} \ln \left(\int \prod_{l=1}^2 \prod_{b=1}^N [d\bar{\psi}_{lb}] [d\psi_{lb}] e \left(i \int \sum_{k=1}^2 \left[\bar{\psi}_{ka} D_k \psi_{ka} - \frac{\Delta^*}{2} \psi_{ka}^T C \psi_{ka} - \frac{\Delta}{2} \bar{\psi}_{ka} C \bar{\psi}_{ka}^T \right] d^3x \right) \right), \quad (3.8)$$

где $D_k = \gamma^\nu i \partial_\nu + \mu_k \gamma^0 - M$.

Без потери общности величины Δ, Δ^* могут рассматриваться как действительные (см. комментарии в описании модели в главе 2). Положим, что $\Delta = \Delta^* \equiv \Delta$, где Δ уже действительная величина. Для того чтобы вычислить термодинамический потенциал (3.8), необходимо вычислить функциональный интеграл по фермионным полям, который является гауссовым (см. Приложение 7.3). В результате мы получим следующее выражение для термодинамического потенциала модели (3.1) при нулевой температуре:

$$\Omega(M, \Delta) = \frac{M^2}{4G_1} + \frac{\Delta^2}{4G_2} + i \sum_{k=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln \left[(p_0^2 - (\mathcal{E}_{\Delta, k}^+)^2) (p_0^2 - (\mathcal{E}_{\Delta, k}^-)^2) \right], \quad (3.9)$$

где $(\mathcal{E}_{\Delta, k}^\pm)^2 = E^2 + \mu_k^2 + \Delta^2 \pm 2\sqrt{M^2 \Delta^2 + \mu_k^2 E^2}$ и $E = \sqrt{M^2 + |\vec{p}|^2}$.

Везде мы будем предполагать, что $\mu \geq 0$, $\nu \geq 0$, $M \geq 0$ и $\Delta \geq 0$. Используя в выражении (3.9) достаточно общую формулу (см. Приложение 7.11) (справедливую с точностью до бесконечного члена, не зависящего от действительной величины A)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \ln(p_0 - A) = i\pi |A|, \quad (3.10)$$

возможно свести выражение (3.9) к следующему виду:

$$\Omega(M, \Delta) \equiv \Omega^{un}(M, \Delta) = \frac{M^2}{4G_1} + \frac{\Delta^2}{4G_2} - \sum_{k=1}^2 \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} (\mathcal{E}_{\Delta,k}^+ + \mathcal{E}_{\Delta,k}^-). \quad (3.11)$$

Интегральный член в формуле (3.11) расходится на бесконечности (при больших импульсах), таким образом, чтобы получить какую-либо информацию из этого выражения, мы должны перенормировать его.

Заметим, что формулы из этого параграфа напоминают соответствующее выражение из параграфа 2.2. Однако, есть существенная разница, которая заключается в том, что в этой модели мы рассматриваем два $O(N)$ -мультиплета дираковских полей, соответствующих двум различным химическими потенциалам, что то же самое, двум различным проекциям спина.

3.3 Процедура перенормировки

Прежде всего необходимо регуляризовать термодинамический потенциал (3.11) при нулевой температуре, введя обрезание по импульсу, то есть полагая, что $|p_1| < \Lambda$, $|p_2| < \Lambda$ в (3.11). В результате получим следующее регуляризованное выражение для термодинамического потенциала (конечное при конечном значении Λ):

$$\Omega^{reg}(M, \Delta) = \frac{M^2}{4G_1} + \frac{\Delta^2}{4G_2} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^2 \int_0^\Lambda dp_1 \int_0^\Lambda dp_2 (\mathcal{E}_{\Delta,k}^+ + \mathcal{E}_{\Delta,k}^-). \quad (3.12)$$

В (3.12) подынтегральный член имеет следующую асимптотику при $|\vec{p}| \rightarrow \infty$, ($k = 1, 2$)

$$\mathcal{E}_{\Delta,k}^+ + \mathcal{E}_{\Delta,k}^- = 2|\vec{p}| + \frac{M^2 + \Delta^2}{|\vec{p}|} + \mathcal{O}(1/|\vec{p}|^3), \quad (3.13)$$

где $|\vec{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$. (Заметим, что первые два члена разложения (3.13) не зависят от $\mu_{1,2}$.) Интегрируя каждый член разложения, получим

$$\begin{aligned} \Omega^{reg}(M, \Delta) = M^2 \left[\frac{1}{4G_1} - \frac{4\Lambda \ln(1 + \sqrt{2})}{\pi^2} \right] + \\ + \Delta^2 \left[\frac{1}{4G_2} - \frac{4\Lambda \ln(1 + \sqrt{2})}{\pi^2} \right] - \frac{4\Lambda^3(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))}{3\pi^2} + \mathcal{O}(\Lambda^0), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $\mathcal{O}(\Lambda^0)$ означает, что выражение конечно в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$. Предположим, что голые константы связи G_1 и G_2 зависят от параметра обрезания Λ таким образом, что в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ получим конечное выражение в скобках (3.14). Очевидно, для того чтобы добиться этого, достаточно потребовать

$$\frac{1}{4G_1} \equiv \frac{1}{4G_1(\Lambda)} = \frac{4\Lambda \ln(1 + \sqrt{2})}{\pi^2} + \frac{1}{\pi g_1}, \quad \frac{1}{4G_2} \equiv \frac{1}{4G_2(\Lambda)} = \frac{4\Lambda \ln(1 + \sqrt{2})}{\pi^2} + \frac{1}{\pi g_2}, \quad (3.15)$$

где $g_{1,2}$ конечные и не зависящие от Λ параметры модели с размерностью обратной массы. Более того, так как голые константы связи G_1 и G_2 не зависят от точки нормировки, то же верно и для $g_{1,2}$. Следовательно, учитывая (3.12) и (3.14) и соотношения (3.15) и не учитывая члены, которые не зависят от M и Δ , получим перенормированное выражение для термодинамического потенциала

$$\Omega^{ren}(M, \Delta) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left\{ \Omega^{reg}(M, \Delta) \Big|_{G_1=G_1(\Lambda), G_2=G_2(\Lambda)} + \frac{4\Lambda^3(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))}{3\pi^2} \right\}. \quad (3.16)$$

Также отметим, что это выражение является ренормгрупповым инвариантом.

Положим, что $\mu = 0$ и $\nu \equiv \mu_B B = 0$. В этом случае $\mu_{1,2} = 0$ и $\mathcal{O}(\Lambda^0)$ член в (3.14) может быть вычислен явно. В результате мы получим следующее выражение для термодинамического потенциала:

$$V(M, \Delta) \equiv \Omega^{ren}(M, \Delta) \Big|_{\mu=0, \nu=0} = \frac{M^2}{\pi g_1} + \frac{\Delta^2}{\pi g_2} + \frac{(M + \Delta)^3}{3\pi} + \frac{|M - \Delta|^3}{3\pi}. \quad (3.17)$$

(Параметры $g_{1,2}$ введены в (3.15) таким образом, что при $\mu = \nu = 0$ термодинамический потенциал (3.17) отличается на фактор 2 от соответствующей величины главы 2.)

Получим выражение для перенормированного термодинамического потенциала (3.16) при $\mu \neq 0$ и $\nu \neq 0$, то есть $\mu_{1,2} \equiv \mu \pm \nu \neq 0$. Для этого перепишем перенормированный термодинамический потенциал $\Omega^{un}(M, \Delta)$ (3.11) в следующем виде

$$\Omega^{un}(M, \Delta) = \frac{M^2}{4G_1} + \frac{\Delta^2}{4G_2} - \sum_{k=1}^2 \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left(\mathcal{E}_{\Delta, k}^+ \Big|_{\mu, \nu=0} + \mathcal{E}_{\Delta, k}^- \Big|_{\mu, \nu=0} \right) \quad (3.18)$$

$$- \sum_{k=1}^2 \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left(\mathcal{E}_{\Delta, k}^+ + \mathcal{E}_{\Delta, k}^- - \mathcal{E}_{\Delta, k}^+ \Big|_{\mu, \nu=0} - \mathcal{E}_{\Delta, k}^- \Big|_{\mu, \nu=0} \right), \quad (3.19)$$

где для каждого $k = 1, 2$

$$\mathcal{E}_{\Delta, k}^+ \Big|_{\mu, \nu=0} + \mathcal{E}_{\Delta, k}^- \Big|_{\mu, \nu=0} = \sqrt{|\vec{p}|^2 + (M + \Delta)^2} + \sqrt{|\vec{p}|^2 + (M - \Delta)^2}.$$

Так как первые члены разложения (3.13) не зависят от $\mu_{1,2}$, ясно, что интеграл в последней сумме в (3.19) сходящийся. Другие члены в (3.19) из перенормированного термодинамического потенциала в конкретном случае при $\mu = 0$ и $\nu = 0$ сводятся после процедуры перенормировки к выражению (3.17). Таким образом, после перенормировки получим из (3.19) следующее конечное выражение:

$$\begin{aligned} \Omega^{ren}(M, \Delta) = V(M, \Delta) - \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \sum_{k=1}^2 \left(\mathcal{E}_{\Delta, k}^+ + \mathcal{E}_{\Delta, k}^- - \right. \\ \left. - \sqrt{|\vec{p}|^2 + (M + \Delta)^2} - \sqrt{|\vec{p}|^2 + (M - \Delta)^2} \right), \end{aligned} \quad (3.20)$$

где $V(M, \Delta)$ определяется формулой (3.17). Интегральные члены в (3.20) могут быть вычислены. В результате получим

$$\begin{aligned} \Omega^{ren}(M, \Delta) &= \frac{M^2}{\pi g_1} + \frac{\Delta^2}{\pi g_2} + \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{1}{6\pi} \left(M + \sqrt{\mu_k^2 + \Delta^2} \right)^3 + \frac{1}{6\pi} \left| M - \sqrt{\mu_k^2 + \Delta^2} \right|^3 \right. \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} t_k^+ \left(M + \sqrt{\mu_k^2 + \Delta^2} \right) + \frac{1}{4\pi} t_k^- \left| M - \sqrt{\mu_k^2 + \Delta^2} \right| \\ &\quad \left. - \frac{(\mu_k^2 - M^2)\Delta^2}{4\pi|\mu_k|} \ln \left| \frac{t_k^+ + |\mu_k|(M + \sqrt{\mu_k^2 + \Delta^2})}{t_k^- + |\mu_k|M - \mu_k\sqrt{\mu_k^2 + \Delta^2}} \right| \right\}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где $t_k^\pm = M\sqrt{\mu_k^2 + \Delta^2} \pm \mu_k^2$. Это не очевидно, но при $\mu_k = 0$ ($k = 1, 2$) выражение (3.21) для $\Omega^{ren}(M, \Delta)$ совпадает с $V(M, \Delta)$ (3.17).

В этой модели рассматриваются два $O(N)$ мультиплетов дираковских полей, возникающих из-за введения спина электрона. В связи с этим мы определили в (3.15) параметры $g_{1,2}$ таким образом, что при $\nu = 0$ термодинамический потенциал (3.21) отличается в два раза от термодинамического потенциала из главы 2 с одним мультиплетом (в модели не учитывается спин). Однако, при $\nu \neq 0$, то есть когда $\mu_1 \neq \mu_2$, есть существенная разница между термодинамическими потенциалами двух моделей.

3.4 Фазовая структура модели

Точка глобального минимума (M_0, Δ_0) термодинамического потенциала $\Omega^{ren}(M, \Delta)$ определяет вакуумные средние скалярных полей $M_0 = \langle \sigma(x) \rangle$ и $\Delta_0 = \langle \Delta(x) \rangle$. Величины M_0 и Δ_0 обычно называют параметрами порядка или щелями. Более того, щель M_0 равна динамической массе одночастичного фермионного возбуждения вакуума. В нашем рассмотрении щели M_0 и Δ_0 являются функциями параметров свободной модели g_1 и g_2 и внешних параметров, таких как химический потенциал μ и внешнее магнитное поле B в плоскости системы.

3.4.1 Случай $\mu = 0$, $B = 0$

Фазовый портрет модели (3.1) в простейшем случае, когда $\mu = 0$ и $B = 0$ рассмотрен в главе 2 (см. Рис. 2.1).

3.4.2 Случай $\mu \neq 0$ и/или $B \neq 0$

В этом случае удобно начать с формулы для термодинамического потенциала (3.21). Поведение точки глобального минимума (M_0, Δ_0) термодинамического потенциала в зависимости от μ и B дает нам информацию о фазовой структуре модели. Более того, мы заинтересованы в рассмотрении таких термодинамических величин, как плотность числа частиц n , намагниченность m и магнитная восприимчивость χ , которые задаются выражениями

$$n = -\frac{\partial \Omega^{ren}(M_0, \Delta_0)}{\partial \mu}, \quad m = -\frac{\partial \Omega^{ren}(M_0, \Delta_0)}{\partial B}, \quad \chi = \frac{\partial m}{\partial B}. \quad (3.22)$$

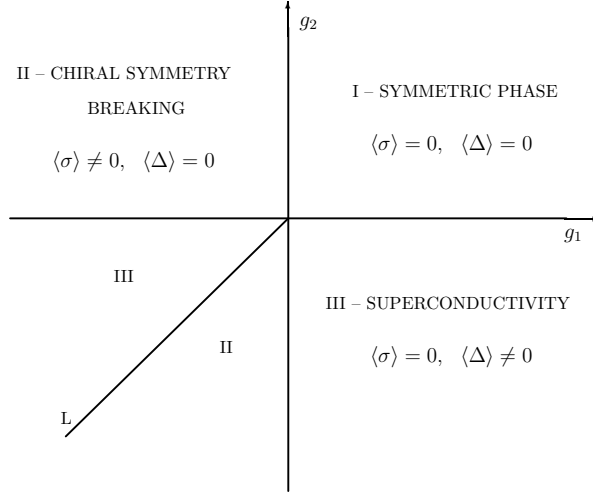


Рисунок 3.1 — The (g_1, g_2) -фазовый портрет модели при $\mu = 0$ и $B = 0$. Обозначения I, II и III означают симметричную, фазу с нарушенной киральной симметрией и сверхпроводящую фазу, соответственно. В фазе II $\langle \sigma \rangle = -1/g_1$. В фазе III $\langle \Delta \rangle = -1/g_2$. На кривой $L \equiv \{(g_1, g_2) : g_1 = g_2\}$, где $g_{1,2} < 0$, минимумы термодинамического потенциала, соответствующие фазам II и III, эквивалентны .

В терминах модели (3.1) эти величины могут быть представлены в следующем виде

$$n = n_1 + n_2, \quad m = \mu_B (n_1 - n_2), \quad (3.23)$$

где

$$n_1 = -\frac{\partial \Omega^{ren}(M_0, \Delta_0)}{\partial \mu_1}, \quad n_2 = -\frac{\partial \Omega^{ren}(M_0, \Delta_0)}{\partial \mu_2} = -\text{sign}(\mu_2) \frac{\partial \Omega^{ren}(M_0, \Delta_0)}{\partial |\mu_2|}$$

являются плотностями числа частиц с проекциями спина $1/2$ и $-1/2$, соответственно, и $\text{sign}(x) = 1$ при $x > 0$ и $\text{sign}(x) = -1$ при $x < 0$. Заметим, что в конкретном случае $\mu \neq 0$, $B = 0$ плотности числа частиц с разными проекциями спина равны, $n_1 = n_2$. Таким образом, в этом случае $n \neq 0$, $m = 0$. В противоположном случае $\mu = 0$, $B \neq 0$ выполняется соотношение $n_1 = -n_2$ и в результате получаем $n = 0$, $m \neq 0$. Из этих формул следует, что

$$\chi = -\mu_B^2 \left[\frac{\partial^2 \Omega^{ren}(M_0, \Delta_0)}{(\partial \mu_1)^2} + \frac{\partial^2 \Omega^{ren}(M_0, \Delta_0)}{(\partial |\mu_2|)^2} \right]. \quad (3.24)$$

Численные и аналитические исследования термодинамического потенциала (3.21) показывают, что при μ и/или B не равным нулю, точка глобального минимума принимает одну из форм $(M_0 \neq 0, \Delta_0 = 0)$ (фаза с нарушенной киральной симметрией II) или $(M_0 = 0, \Delta_0 \neq 0)$ (сверхпроводящая фаза III), то есть симметричная фаза отсутствует в модели при условии $\mu \neq 0$ и/или $B \neq 0$. Таким образом, удобно представить выражения для термодинамических величин (3.22) в каждой из фаз II и III. Для фазы II мы имеем выражения

$$n|_{\text{phase II}} = \frac{1}{2\pi} [(\mu_1^2 - M_0^2)\theta(\mu_1 - M_0) + \text{sign}(\mu_2)(\mu_2^2 - M_0^2)\theta(|\mu_2| - M_0)],$$

$$m|_{\text{phase II}} = \frac{\mu_B}{2\pi} [(\mu_1^2 - M_0^2)\theta(\mu_1 - M_0) - \text{sign}(\mu_2)(\mu_2^2 - M_0^2)\theta(|\mu_2| - M_0)],$$

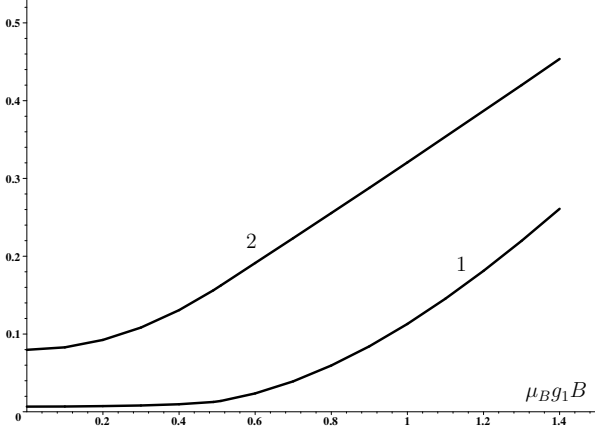


Рисунок 3.2 — Сверхпроводящая щель Δ_0 и плотность числа частиц n в зависимости от B при произвольном фиксированном $g_1 > 0$ и $g_2 = 0.5g_1$ и $\mu = 0.5/g_1$. Кривые 1 и 2 представляют безразмерные величины $g_1\Delta_0$ и $g_1^2 n$, соответственно.

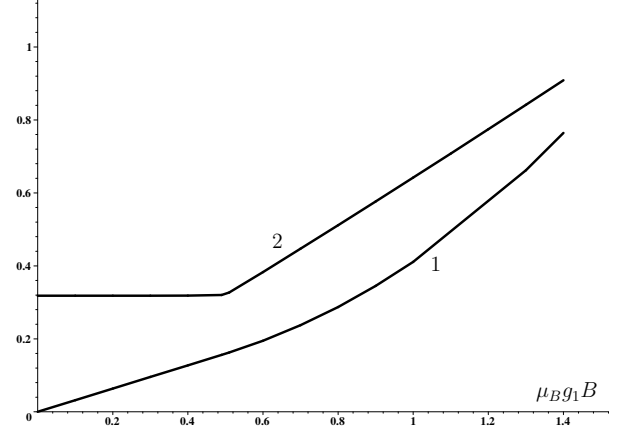


Рисунок 3.3 — Намагниченность m и магнитная восприимчивость χ в зависимости от B при произвольном фиксированном $g_1 > 0$ и при $g_2 = 0.5g_1$ и $\mu = 0.5/g_1$. Кривые 1 и 2 - графики безразмерных величин $g_1^2 m/\mu_B$ и $g_1\chi/\mu_B^2$, соответственно.

$$\chi|_{\text{phase II}} = \frac{\mu_B^2}{\pi} [\mu_1\theta(\mu_1 - M_0) + |\mu_2|\theta(|\mu_2| - M_0)],$$

в то время как для фазы III эти выражения имеют следующий вид

$$n|_{\text{phase III}} = \frac{1}{2\pi} \left[\mu_1 \sqrt{\mu_1^2 + \Delta_0^2} + \Delta_0^2 \ln \frac{\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 + \Delta_0^2}}{\Delta_0} + \text{sign}(\mu_2) \left(|\mu_2| \sqrt{\mu_2^2 + \Delta_0^2} + \Delta_0^2 \ln \frac{|\mu_2| + \sqrt{\mu_2^2 + \Delta_0^2}}{\Delta_0} \right) \right], \quad (3.25)$$

$$m|_{\text{phase III}} = \frac{\mu_B}{2\pi} \left[\mu_1 \sqrt{\mu_1^2 + \Delta_0^2} + \Delta_0^2 \ln \frac{\mu_1 + \sqrt{\mu_1^2 + \Delta_0^2}}{\Delta_0} - \text{sign}(\mu_2) \left(|\mu_2| \sqrt{\mu_2^2 + \Delta_0^2} + \Delta_0^2 \ln \frac{|\mu_2| + \sqrt{\mu_2^2 + \Delta_0^2}}{\Delta_0} \right) \right], \quad (3.26)$$

$$\chi|_{\text{phase III}} = \frac{\mu_B^2}{\pi} \left[\sqrt{\mu_1^2 + \Delta_0^2} + \sqrt{\mu_2^2 + \Delta_0^2} \right]. \quad (3.27)$$

Случай $g_1 > 0$. Наши исследования показывают, что в этом случае при произвольных ненулевых значениях μ и/или B в системе всегда реализуется сверхпроводящая фаза III. Так как при $g_2 < 0$ это явление имело место даже при $\mu = 0$ и $B = 0$, мы можем говорить, что химический потенциал и/или магнитное поле усиливают сверхпроводимость, которая изначально была вызвана довольно сильным взаимодействием в фермион-фермионном канале ($G_2 > G_c$). В противоположном случае, при $g_2 > 0$, система находится в симметричной фазе при $\mu = 0$ и $B = 0$. Однако, произвольно малые ненулевые значения μ и/или B индуцируют в этом случае сверхпроводимость. На Рис. 3.2 и 3.3 представлено поведение сверхпроводящей

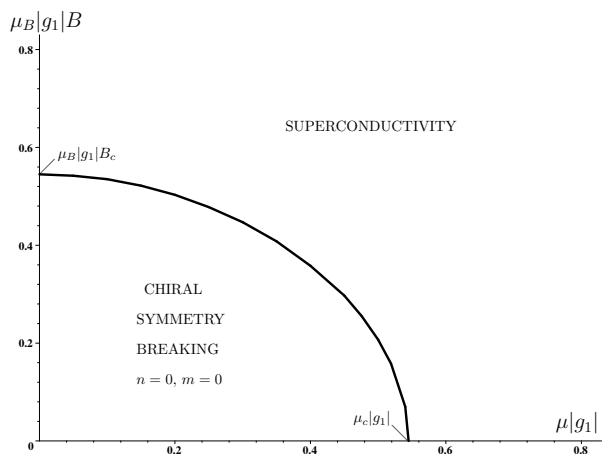


Рисунок 3.4 — Фазовый портрет модели в плоскости (μ, B) при произвольных фиксированных $g_1 < 0$ и $g_2 = -1.5|g_1|$.

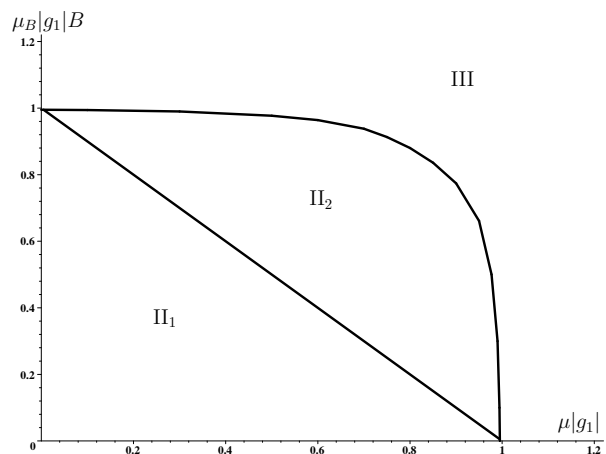


Рисунок 3.5 — Фазовый портрет модели в плоскости (μ, B) при произвольных фиксированных $g_1 < 0$ и $g_2 = 0.5|g_1|$. Π_1 и Π_2 обозначают фазу с нарушенной киральной симметрией с $n = 0, m = 0$ и $n \neq 0, m \neq 0$, соответственно. III обозначает сверхпроводящую фазу.

щели Δ_0 и таких термодинамических параметров модели, как плотность числа частиц n , намагниченность m и магнитная восприимчивость χ , в зависимости от B при произвольном фиксированном $g_1 > 0$ и $g_2 = 0.5g_1$ и при фиксированном химическом потенциале $\mu = 0.5/g_1$.¹

Случай $g_1 < 0$. В этом случае фазовый портрет модели в плоскости (μ, B) намного богаче, чем в случае $g_1 > 0$. Действительно, полагая $g_2 = -1.5|g_1|$, где g_1 принимает произвольное фиксированное и отрицательное значение, несложно получить фазовый портрет модели в терминах (μ, B) , который приведен на Рис. 3.4. В этом случае в фазе с нарушенной киральной симметрией как плотность числа частиц n , так и намагниченность m равны нулю. Качественно подобная фазовая структура имеет место для всех значений константы связи g_2 из интервала $g_2 \in (-k|g_1|, -|g_1|)$, где $k \approx 3.08$. Однако, если $g_2 > 0$ ($g_1 < 0$) или $g_2 < -k|g_1|$, то ситуация качественно меняется. В этом случае в качестве представителя выберем константу связи $g_2 = 0.5|g_1|$. Фазовый портрет модели представлен на Рис. 3.5. Из рисунка видно, что фаза с нарушенной киральной симметрией II делится на две области, обозначенные Π_1 и Π_2 . В области Π_1 величины n и m равны нулю, в то время как в области Π_2 они отличны от нуля $n \neq 0$ и $m \neq 0$. На границе между фазами с нарушенной киральной симметрией Π_1 и Π_2 выполняется соотношение $|g_1|\mu + \mu_B|g_1|B = 1$. Более того, на Рис. 3.6 и 3.7 представлены графики щелей M_0 и Δ_0 , а также плотности числа частиц n , намагниченности m и магнитной восприимчивости χ как функции внешнего магнитного поля B при $g_2 = 0.5|g_1|$ и $\mu = 0.7/|g_1|$.

Заметим, что термодинамический потенциал (3.21) симметричен по отношению к преобразованию $\mu \leftrightarrow \nu$. Таким образом, такие физические величины, как M_0, Δ_0, χ , остаются неизменными, в то время как $n \leftrightarrow m$ при преобразовании $\mu \leftrightarrow \nu$. Подчеркнем, что рисунки 3.2, 3.3, 3.6, и 3.7 показывают физические величины как функции $\nu \equiv \mu_B B$ при фиксирован-

¹Рис. 3.2-3.7 приведены в терминах безразмерных величин, которые получены после умножения на соответствующую степень $|g_1|$ с соответствующей размерностью. Например, вместо величин $\mu, \mu_B B, \Delta_0, g_2$ мы используем соответствующие безразмерные аналоги $|g_1|\mu, \mu_B|g_1|B, |g_1|\Delta_0, g_2/|g_1|$. Вместо намагниченности m изображена безразмерная величина $g_1^2 m / \mu_B$ и так далее.

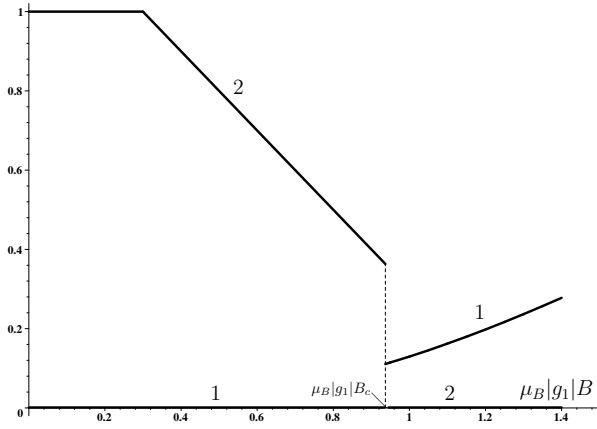


Рисунок 3.6 — Параметры порядка (щели) M_0 и Δ_0 в зависимости от ν vs B при фиксированных произвольном $g_1 < 0$, $g_2 = 0.5|g_1|$ и $\mu = 0.7/|g_1|$. Кривые 1 и 2 - зависимости безразмерных величин $|g_1|\Delta_0$ и $|g_1|M_0$, соответственно. Критическое значение поля $\mu_B|g_1|B_c \approx 0.937$.

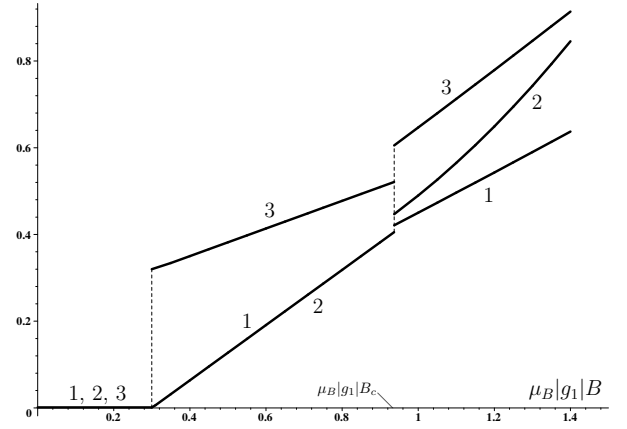


Рисунок 3.7 — Плотность числа частиц n , намагниченность t и магнитная восприимчивость χ в зависимости от B при произвольном фиксированном $g_1 < 0$, $g_2 = 0.5|g_1|$ и $\mu = 0.7/|g_1|$. Кривые 1, 2 и 3 - зависимости безразмерных величин $g_1^2 n$, $g_1^2 t / \mu_B$ и $|g_1|\chi / \mu_B^2$, соответственно. Критическое значение поля $\mu_B|g_1|B_c \approx 0.937$.

ном значении μ , то есть зависимость от μ при фиксированном ν явно здесь не представлена. Однако, нет необходимости в специальных численных вычислениях в этом направлении, учитывая вышеупомянутую симметрию по отношению к преобразованию $\mu \leftrightarrow \nu$. Действительно, положим, что $g_1 > 0$, $g_2 = 0.5g_1$ и $\mu_B B = 0.5/g_1$. В этом случае, для того чтобы рассмотреть поведение величин Δ_0 , n , t и χ по отношению к μ , достаточно представить, что горизонтальная ось на Рис. 3.2 и 3.3 соответствует переменной μ . Таким образом, линии 1 и 2 на Рис. 3.9 будут изображать графики Δ_0 и t по отношению к μ , в то время как линия 1 и 2 на Рис. 3.3 будут соответствовать графикам n и χ по отношению к μ , соответственно. Подобным образом, из Рис. 3.6 и 3.7 можно получить информацию о поведении M_0 , Δ_0 , n , t и χ в зависимости от μ в случае $g_1 < 0$, $g_2 = 0.5|g_1|$ и $\mu_B B = 0.7/|g_1|$.

Таким образом, как следует из нашего предыдущего рассмотрения (см. Рис. 3.4 и 3.5), при произвольных величинах $\mu \geq 0$ и достаточно сильном внешнем магнитном поле появляется явление сверхпроводимости (образование куперовских пар) в рамках (2+1)-мерной модели типа Гросса-Неве (3.1) (конечно, если $G_2 > 0$), то есть внешнее магнитное поле B способствует явлению сверхпроводимости при произвольном соотношении между константами связи $g_{1,2}$ (или, эквивалентно $G_{1,2}$). В частности, если $G_{1,2} < G_c$, то есть $g_{1,2} > 0$, то сверхпроводимость индуцируется бесконечно малыми величинами μ и/или \vec{B}_{\parallel} . Более того, из нашего рассмотрения ясно, что сверхпроводящая фаза в модели сопровождается появлением намагниченности, или спиновой поляризации с положительной восприимчивостью. Это значит, что индуцированный магнитный момент системы (который исчезает при $\vec{B}_{\parallel} = 0$) и внешнее магнитное поле \vec{B}_{\parallel} имеют одно и то же направление, то есть сверхпроводящая фаза является парамагнитной, а не диамагнитной, как в обычных сверхпроводниках (conventional superconductors). Заметим, что явление магнитной сверхпроводимости, (которое включает как парамагнитную, так и ферромагнитную сверхпроводимость), имеет долгую историю исследований в физике конденсированного состояния вещества ([100]).

3.5 Итоги и выводы

В этой главе мы рассмотрели (2+1)-мерную модель типа Гросса-Неве (3.1) с двумя каналами взаимодействия, киральным и сверхпроводящим, под влиянием внешнего магнитного поля. Показано, что внешнее магнитное поле в плоскости системы \vec{B}_{\parallel} способствует возникновению парамагнитной сверхпроводимости в системе. Это значит, что, если при $\vec{B}_{\parallel} = 0$ электромагнитная группа симметрии $U(1)$ была не нарушена, то при $|\vec{B}_{\parallel}| > B_c$, где критическое поле B_c может даже равняться нулю при некоторых соотношениях констант связи $G_{1,2}$, происходит явление спонтанного нарушения группы $U(1)$. Кроме того, если при $\vec{B}_{\parallel} = 0$ симметрия $U(1)$ была спонтанно нарушена (вследствие достаточно сильного взаимодействия в фермион-фермионном канале), тогда ненулевые значения внешнего магнитного поля \vec{B}_{\parallel} усиливают сверхпроводимость, то есть сверхпроводящий параметр порядка Δ_0 увеличивается с увеличением $|\vec{B}_{\parallel}|$. Более того, внешнее магнитное поле также индуцирует ненулевую спиновую поляризацию (парамагнитную намагниченность) в сверхпроводящей фазе.

Различные частные случаи этой задачи были уже рассмотрены ранее. Действительно, двадцать лет назад было выяснено, что при $G_2 = 0$ и $G_1 > 0$ бесконечно слабое перпендикулярное внешнее магнитное поле \vec{B}_{\perp} может не только усиливать нарушение киральной симметрии (если $G_1 > G_c$), но также индуцировать нарушение киральной симметрии при $G_1 < G_c$ (см. [4; 37–40]). Противоположно этому, недавно было найдено [9], что приложение внешнего параллельного к системе магнитного поля \vec{B}_{\parallel} может привести к восстановлению киральной симметрии (в нашем случае, если положить $G_2 = 0$). Для объяснения такой разной реакции киральной симметрии на перпендикулярное и параллельное магнитные поля нужно вспомнить, что \vec{B}_{\perp} действует на орбитальный момент импульса электронов, в то время как \vec{B}_{\parallel} взаимодействует только с их спином. В последнем случае из-за эффекта Зеемана увеличивается химический потенциал электронов, что приводит к восстановлению киральной симметрии [4; 15; 25; 26; 41].

Результаты этой главы демонстрируют, что, в отличие от киральной симметрии, электромагнитная симметрия $U(1)$ в (2+1)-мерной модели типа Гросса-Неве совершенно по-другому реагирует на приложение внешнего параллельного магнитного поля. В работе [59] показано, что в рамках (2+1)-мерной модели типа Гросса-Неве с ненулевой константой связи G_2 в сверхпроводящем канале и при $G_1 = 0$, восстановление симметрии $U(1)$ происходит при достаточно сильном внешнем перпендикулярном магнитном поле \vec{B}_{\perp} (в отличие от кирального канала, где \vec{B}_{\perp} приводило к нарушению киральной симметрии). А влияние внешнего параллельного магнитного поля было исследовано в нашей работе. Основным результатом этой главы состоит в том, что если внешнее параллельное магнитное поле воздействует на (2+1)-мерную модель типа Гросса-Неве (3.1) (по крайней мере, при $G_2 > 0$), то при достаточно сильном параллельном магнитном поле \vec{B}_{\parallel} происходит явление сверхпроводимости, то есть спонтанное нарушение электромагнитной симметрии $U(1)$. В частности, если взаимодействие в обоих каналах модели Гросса-Неве (3.1) достаточно слабое, то есть $G_{1,2} < G_c$ (или $g_{1,2} > 0$), тогда сверхпроводимость индуцируется бесконечно малыми значениями \vec{B}_{\parallel} .

Для того чтобы понять последнее свойство, нужно учесть, что из-за эффекта Зеемана, то есть из-за ν -члена в лагранжиане (3.1), внешнее параллельное магнитное поле \vec{B}_{\parallel} индуцирует (при $\mu = 0$) поверхность Ферми для электронов в любой планарной системе. Однако, в нашей модели из-за того, что $G_2 > 0$, существует притяжение между электронами над поверхностью Ферми. Таким образом, поверхность Ферми нестабильна по отношению к образованию куперовских пар и в системе формируется новое сверхпроводящее вакуумное состояние.

Заметим, что существует несколько примеров в КТП, в которых наблюдается похожий эффект, хотя и в отличных физических системах. Важно заметить, что существует возможность того, что сильное внешнее магнитное поле индуцирует электромагнитную сверхпроводимость вакуума в рамках квантовой хромодинамики [101].

В некоторых работах (например, в [102]) показано, что ферромагнетизм и сверхпроводимость могут сосуществовать в плотной кварковой среде, тем самым объясняя сильные магнитные поля в магнетарах.²

²В ферромагнитных сверхпроводниках спиновая поляризация, или намагниченность, появляется в связи со спонтанным нарушением симметрии, в данном случае, вращательной симметрии. В нашей модели (3.1) намагниченность в фазе сверхпроводящего состояния существует только в присутствии внешнего магнитного поля \vec{B}_{\parallel} , которое явно нарушает вращательную симметрию модели.

Глава 4. Нарушение киральной симметрии в (2+1)-мерной модели Гросса-Неве с учетом зеемановского взаимодействия с внешним наклонным магнитным полем

4.1 Введение

Так как возбуждениями произвольной системы конденсированного состояния вещества обычно являются электроны (квазичастицы) с $\pm 1/2$ проекциями спина на направление внешнего магнитного поля \vec{B} , то существуют два независимых способа введения в рассмотрение внешнего магнитного поля \vec{B} в эти системы: 1) когда \vec{B} взаимодействует только с орбитальным моментом импульса электронов (заметим, что в планарных системах только перпендикулярная компонента \vec{B}_\perp внешнего магнитного поля \vec{B} оказывает влияние на систему в этом случае), и 2) когда в дополнение к этому учитывается зеемановское взаимодействие спина электрона (или его собственного магнитного момента) с \vec{B} . В первых исследованиях эффекта магнитного катализа в терминах (2+1)-мерной модели типа Гросса-Неве (см., например, [10; 37; 39; 41; 48; 52–55; 103]) использовался только первый способ, где было показано, что киральная симметрия модели спонтанно нарушается при произвольных значениях магнитного поля \vec{B} даже при бесконечно малых значениях константы связи. Позже, особенно в связи с физикой графена, было учтено также и зеемановское взаимодействие (см., например, [104; 105]), но только в случае, когда магнитное поле \vec{B} направлено перпендикулярно к системе. В недавней работе [9] был рассмотрен другой предельный случай направления внешнего магнитного поля. Изучалось влияние на (2+1)-мерную модель типа Гросса-Неве магнитного поля, параллельного к системе \vec{B}_\parallel , (в этом случае, так как $\vec{B}_\perp = 0$, магнитное поле взаимодействует с фермионами только посредством зеемановского взаимодействия). В частности, в [9] было показано, что при достаточно больших значениях \vec{B}_\parallel восстанавливается киральная симметрия модели. Естественно, возникает вопрос, как будет вести себя киральная симметрия (2+1)-мерной модели типа Гросса-Неве под действием внешнего произвольно направленного магнитного поля, когда \vec{B} взаимодействует как с орбитальным магнитным моментом, так и со спином электронов. (В этой связи стоит отметить, что в рамках планарных систем со свободными электронами в [106] было предсказано скачущее поведение намагниченности относительно $|\vec{B}|$ при достаточно малых (лабораторных) значениях $|\vec{B}|$. В [106] эффект был объяснен с помощью зеемановского взаимодействия спина с наклонным магнитным полем.)

Таким образом, в данной главе исследуется эффект магнитного катализа и другие магнитные явления в ведущем порядке приближения больших N в рамках (2+1)-мерной модели типа Гросса-Неве под влиянием наклонного внешнего магнитного поля \vec{B} . Модель инвариантна по отношению к дискретной киральной симметрии и описывает четырехфермионное взаимодействие квазичастиц (электронов) с $(\pm 1/2)$ проекциями спина на направление магнитного поля \vec{B} . Учитывается зеемановское взаимодействие магнитного момента электронов с \vec{B} . Температура и химический потенциал везде полагаются равными нулю. В частности, показывается, что при значениях константы связи меньше критической киральная симметрия, которая является спонтанно нарушенной при достаточно малых значениях \vec{B} , восстанавливается при достаточно больших значениях внешнего магнитного поля (в отличие от случая, в котором не учитывалось зеемановское взаимодействие [10; 37; 39; 41; 48; 52–55; 103]). Более того, было обнаружено скачкообразное поведение динамической массы фермионов в зависимости от внешнего магнитного поля $|\vec{B}|$, то есть эволюция системы при изменении маг-

нитного поля \vec{B} сопровождается несколькими различными фазами с нарушенной киральной симметрией. Оказывается, что из-за присутствия зеемановского взаимодействия в модели можно наблюдать осцилляции намагниченности де Гааза-Ван Альфена и также диамагнитные и парамагнитные явления. Мы надеемся, что наши результаты могут быть полезны в понимании физических явлений в тонких органических пленках, графене, то есть в системах конденсированного состояния вещества, имеющих пространственно (квази)двумерную структуру.

Глава организована следующим образом. В параграфе 4.2 описана (2+1)-мерная модель Гросса-Неве и получено выражение для перенормированного термодинамического потенциала в разных частных случаях, то есть в отсутствие и в присутствии зеемановского взаимодействия, когда учитывается внешнее магнитное поле. В параграфе 4.3 исследуется модификация эффекта магнитного катализа в связи с учетом зеемановского взаимодействия в случае значений констант связи, меньших критической (параграф 4.3.1). Здесь также показано (параграф 4.3.2), что наклонное внешнее магнитное поле приводит к явлению осцилляций намагниченности. В параграфах 4.4.1 и 4.4.2 анализируется случай значений константы связи, больших критической. Показано, что фазовый портрет системы содержит две фазы со спонтанно нарушенной киральной симметрией. Одна фаза является диамагнитной, а другая фаза парамагнитной. Также показано, что при достаточно больших значениях модуля внешнего магнитного поля $|\vec{B}|$ и при $B_{\perp} \rightarrow 0$ восстанавливается киральная симметрия модели. В параграфе 4.4.3 приведены некоторые численные оценки в контексте физики конденсированного состояния вещества, которые показывают, что фазовые переходы, индуцированные эффектом Зеемана, происходят, хотя и при больших, но, тем не менее, достижимых в лабораторных условиях значениях внешнего магнитного поля. В параграфе 4.5 дается обзор результатов данной главы.

4.2 Модель и ее термодинамический потенциал

Мы полагаем, что некоторая физическая система располагается в двумерной плоскости, перпендикулярно оси \hat{z} обычного пространства-времени. Более того, присутствует внешнее однородное, не зависящее от времени магнитное поле \vec{B} , направленное под наклоном к данной плоскости. Соответствующий (3+1)-мерный векторный потенциал A_{μ} задан формулами $A_{0,1} = 0$, $A_2 = B_{\perp}x$, $A_3 = B_{\parallel}y$, то есть пространственные компоненты $B_{x,y,z}$ внешнего магнитного поля имеют вид $B_x = B_{\parallel}$, $B_y = 0$, $B_z = B_{\perp}$. Мы предполагаем, что данная плоская физическая система состоит из квазичастиц (электронов) с двумя проекциями спина $\pm 1/2$ на направление внешнего магнитного поля \vec{B} . Также предполагается, что их низкоэнергетическая динамика описывается (2+1)-мерной моделью Гросса-Неве, чей лагранжиан имеет следующий вид:

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^2 \bar{\psi}_{ka} \left[\gamma^0 i \partial_t + \gamma^1 i \nabla_1 + \gamma^2 i \nabla_2 - \nu (-1)^k \gamma^0 \right] \psi_{ka} + \frac{G}{N} \left(\sum_{k=1}^2 \bar{\psi}_{ka} \psi_{ka} \right)^2, \quad (4.1)$$

где $\nabla_{1,2} = \partial_{1,2} + ieA_{1,2}$ и предполагается суммирование по повторяющимся индексам $a = 1, \dots, N$ внутренней группы $O(N)$. $\psi_{ka}(x)$ в (4.1) дираковские фермионы, преобразующиеся по приводимому четырехкомпонентному представлению (2+1)-мерной группы Лоренца (см. Приложение 7.2). Индекс $a = 1, \dots, N$ соответствует фундаментальному представлению вспомогательной группы $O(N)$. Индекс $k = 1, 2$ соответствует проекциям спина электронов $1/2$ и $-1/2$ на направление внешнего магнитного поля. Последний член в скобках соответ-

ствует зеемановскому расщеплению во внешнем магнитном поле \vec{B} . Параметр ν обозначает $\nu = g_S \mu_B |\vec{B}|/2$, где $|\vec{B}| = \sqrt{B_{\parallel}^2 + B_{\perp}^2}$, g_S - спектроскопический фактор Ланде и μ_B - магнитный момент электрона (то есть магнетон Бора). Для каждого фиксированного $k = 1, 2$ и $a = 1, \dots, N$ величины $\psi_{ka}(x)$ в (4.1) обозначают безмассовое дираковское фермионное поле, преобразующееся по приводимому четырехкомпонентному спинорному представлению $(2+1)$ -мерной группы Лоренца. Более того, все дираковские поля $\psi_{ka}(x)$ представляют собой два фундаментальных мультиплета $\psi_{1a}(x)$ и $\psi_{2a}(x)$ ($a = 1, \dots, N$) внутренней группы $O(N)$, которая введена здесь для того, чтобы сделать возможным вычисления в рамках непертурбативного разложения в пределе больших N . Мы предполагаем, что спинорные поля $\psi_{1a}(x)$ и $\psi_{2a}(x)$ ($a = 1, \dots, N$) соответствуют фермионам с проекцией спина $1/2$ и $-1/2$ на направление внешнего магнитного поля, соответственно.

В (4.1) ν член введен для того, чтобы учесть энергию зеемановского взаимодействия электронов с внешним магнитным полем \vec{B} . (Для того чтобы исследовать влияние именно внешнего магнитного поля на фазовую структуру модели, мы будем предполагать во всей главе, что химический потенциал и температура равняются нулю.) В нашем рассмотрении зеемановский ν -член (4.1) вводится феноменологически, так что величина μ_B может рассматриваться как свободный параметр модели. Однако, в конце главы, производя численные оценки в параграфе 4.4.3, мы полагаем, что μ_B равняется магнетону Бора. Заметим, что существует интересная возможность динамической генерации магнитного момента электрона [107]. Этот подход, однако, за рамками нашего рассмотрения (нами здесь не исследовался). В последующем во всей главе будем предполагать, что $g_S = 2$, и только в конце главы мы кратко обсудим влияние $g_S > 2$ на физические результаты, как в [106].

В данной главе мы используем естественную систему единиц $\hbar = k_B = c = 1$. Однако, для приложения наших результатов к физике конденсированного состояния вещества необходимо слегка преобразовать лагранжиан (4.1). А именно, нужно произвести замены $\nabla_{1,2} \rightarrow v_F \nabla_{1,2}$, а также $G \rightarrow v_F G$, где v_F скорость Ферми квазичастиц (например, в графене $v_F \approx c/300$). Для простоты во всех выражениях данной главы будем полагать, что $v_F = 1$. Случай $v_F \neq 1$ рассмотрен в параграфе 4.4.3, где сделаны некоторые оценки в контексте физики конденсированного состояния вещества.

Модель (4.1) инвариантна по отношению к дискретным киральным преобразованиям $\psi_{ka} \rightarrow \gamma^5 \psi_{ka}$. Также ясно, что лагранжиан (4.1) инвариантен относительно группы $O(N)$. Заметим, что при $N = 1$ спектр квазичастиц модели (4.1) является таким же, как в графене [104], но при $N > 1$ наши результаты можно интерпретировать как происходящие в системе с N слоями.

В дальнейшем будем использовать вспомогательную теорию со следующим лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{N\sigma^2}{4G} + \sum_{k=1}^2 \bar{\psi}_{ka} \left(\gamma^0 i \partial_t + \gamma^1 i \nabla_1 + \gamma^2 i \nabla_2 + \mu_k \gamma^0 - \sigma \right) \psi_{ka}, \quad (4.2)$$

где $\mu_1 = \nu$, $\mu_2 = -\nu$, и с этого момента будем считать, что $\nu = \mu_B |\vec{B}|$ (в этой и последующих формулах будем предполагать суммирование по повторяющимся индексам). Очевидно, что лагранжианы (4.1) и (4.2) эквивалентны, что может быть показано с помощью уравнения движения для скалярного бозонного поля $\sigma(x)$, которое принимает вид

$$\sigma(x) = -\frac{2G}{N} \sum_{k=1}^2 \bar{\psi}_{ka} \psi_{ka}. \quad (4.3)$$

Легко увидеть из (4.3), что нейтральное поле $\sigma(x)$ является действительной величиной, то есть $(\sigma(x))^\dagger = \sigma(x)$ (символ \dagger обозначает эрмитово сопряжение). Более того, если $\langle \sigma(x) \rangle \neq 0$, то, произведя сдвиг $\sigma(x) \rightarrow \sigma(x) + \langle \sigma(x) \rangle$ в (4.2), ясно, что спонтанно нарушится дискретная киральная симметрия модели и фермионы динамически приобретут массу, равную $\langle \sigma(x) \rangle$.

Исследуем фазовую структуру четырехфермионной модели (4.1), начиная с эквивалентного лагранжиана (4.2). В ведущем порядке приближения больших N эффективное действие $\mathcal{S}_{\text{eff}}(\sigma)$ рассматриваемой модели выражается в терминах функционального интеграла по фермионным полям

$$e^{i\mathcal{S}_{\text{eff}}(\sigma)} = \int \prod_{k=1}^2 \prod_{a=1}^N [d\bar{\psi}_{ka}] [d\psi_{ka}] \exp\left(i \int \mathcal{L} d^3x\right),$$

где

$$\mathcal{S}_{\text{eff}}(\sigma) = - \int d^3x \frac{N}{4G} \sigma^2(x) + \tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}. \quad (4.4)$$

Вклад фермионов в эффективное действие, то есть член $\tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}$ в (4.4), задается выражением

$$e^{(i\tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}})} = \int \prod_{l=1}^2 \prod_{a=1}^N [d\bar{\psi}_{la}] [d\psi_{la}] e^{i \int \sum_{k=1}^2 \bar{\psi}_{ka} \left(\gamma^0 i \partial_t + \gamma^1 i \nabla_1 + \gamma^2 i \nabla_2 + \mu_k \gamma^0 - \sigma \right) \psi_{ka} d^3x}. \quad (4.5)$$

Вакуумное значение $\langle \sigma(x) \rangle$ составного бозонного поля задается уравнением седловой точки

$$\frac{\delta \mathcal{S}_{\text{eff}}}{\delta \sigma(x)} = 0. \quad (4.6)$$

Для простоты во всей главе предполагаем, что вышеупомянутое вакуумное значение не зависит от координат пространства-времени, то есть

$$\langle \sigma(x) \rangle \equiv M, \quad (4.7)$$

где M постоянная величина. В действительности это координаты точки глобального минимума термодинамического потенциала $\Omega(M; \nu, B_\perp)$. В ведущем порядке разложения по большим N выражение для термодинамического потенциала имеет следующий вид:

$$\int d^3x \Omega(M; \nu, B_\perp) = - \frac{1}{N} \mathcal{S}_{\text{eff}}(\sigma(x)) \Big|_{\sigma(x)=M},$$

что дает

$$\int d^3x \Omega(M; \nu, B_\perp) = \int d^3x \frac{M^2}{4G} + \frac{i}{N} \ln \left(\int \prod_{l=1}^2 \prod_{b=1}^N [d\bar{\psi}_{lb}] [d\psi_{lb}] e^{i \int \sum_{k=1}^2 \bar{\psi}_{ka} D_k \psi_{ka} d^3x} \right), \quad (4.8)$$

где $D_k = \gamma^0 i \partial_t + \gamma^1 i \nabla_1 + \gamma^2 i \nabla_2 + \mu_k \gamma^0 - M$.

4.2.1 Частный случай $B_\perp = 0$, $\nu \neq 0$

Для того чтобы найти удобное выражение для термодинамического потенциала в этом случае необходимо вычислить гауссов функциональный интеграл (4.8) при $B_\perp = 0$ (см. Приложение 7.3, где был вычислен более общий функциональный интеграл с дифермионными конденсатами). В результате получим следующее выражение для термодинамического по-

тенциала модели (4.1) при нулевой температуре:

$$\Omega(M; \nu) = \frac{M^2}{4G} + 2i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln \left[(p_0^2 - (E + \nu)^2)(p_0^2 - (E - \nu)^2) \right], \quad (4.9)$$

где $E = \sqrt{M^2 + |\vec{p}|^2}$ и $|\vec{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$. Из (4.9) ясно, что без потери общности можно положить, что $\nu \geq 0$ и $M \geq 0$. Используя в выражении (4.9) формулу (3.10), возможно свести это выражение к следующему виду:

$$\Omega(M; \nu) \equiv \Omega^{un}(M; \nu) = \frac{M^2}{4G} - 2 \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} (|E + \nu| + |E - \nu|). \quad (4.10)$$

Интегральный член в (4.10) является расходящимся на бесконечности, таким образом, для того чтобы получить информацию из этого выражения, нужно его перенормировать. Для начала регуляризуем термодинамический потенциал (4.10), произведя обрезание по области интегрирования, то есть положим, что $|p_1| < \Lambda$, $|p_2| < \Lambda$. В результате имеем следующее регуляризованное выражение (которое конечно при конечных значениях Λ):

$$\Omega^{reg}(M; \nu) = \frac{M^2}{4G} - \frac{2}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp_1 \int_0^\Lambda dp_2 (|E + \nu| + |E - \nu|). \quad (4.11)$$

Используем в (4.11) следующее асимптотическое разложение при $|\vec{p}| \rightarrow \infty$, то есть при $|\vec{p}| \gg \nu$,

$$|E + \nu| + |E - \nu| = 2|\vec{p}| + \frac{M^2}{|\vec{p}|} + \mathcal{O}(1/|\vec{p}|^3). \quad (4.12)$$

(Заметим, что первые члены в (4.12) не зависят от ν .) Таким образом, интегрируя почленно, получим

$$\Omega^{reg}(M; \nu) = M^2 \left(\frac{1}{4G} - \frac{4\Lambda \ln(1 + \sqrt{2})}{\pi^2} \right) - \frac{4\Lambda^3(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))}{3\pi^2} + \mathcal{O}(\Lambda^0), \quad (4.13)$$

где $\mathcal{O}(\Lambda^0)$ обозначает выражение, которое является конечным при $\Lambda \rightarrow \infty$. Также мы предполагаем, что константа связи G зависит от параметра обрезания Λ таким образом, что в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ получим конечное выражение в круглых скобках в (4.13). Для того чтобы удовлетворить этому требованию, достаточно потребовать, что

$$\frac{1}{4G} \equiv \frac{1}{4G(\Lambda)} = \frac{4\Lambda \ln(1 + \sqrt{2})}{\pi^2} + \frac{1}{\pi g} \equiv \frac{1}{4G_c} + \frac{1}{\pi g}, \quad (4.14)$$

где g конечный и не зависящий от Λ параметр модели с массовой размерностью, равной обратной массе, и $G_c = \frac{\pi^2}{16\Lambda \ln(1 + \sqrt{2})}$. Более того, так как голая константа связи G не зависит от точки нормировки, таким же свойством обладает и g . Таким образом, учитывая в (4.11) и (4.13) соотношение (4.14) и пренебрегая бесконечными и не зависящими от M константами, получим следующее *перенормированное*, то есть конечное выражение для термодинамического потенциала

$$\Omega^{ren}(M; \nu) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left\{ \Omega^{reg}(M; \nu) \Big|_{G=G(\Lambda)} + \frac{4\Lambda^3(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))}{3\pi^2} \right\}. \quad (4.15)$$

Также нужно упомянуть, что термодинамический потенциал (4.15) является ренормгрупповым инвариантом.

Положим, что $\nu \equiv \mu_B |\vec{B}| = 0$. Тогда $\mathcal{O}(\Lambda^0)$ член в (4.13) может быть вычислен явно. В результате мы имеем в этом частном случае для термодинамического потенциала следующее выражение:

$$V(M) \equiv \Omega^{ren}(M; \nu) \Big|_{\nu=0} = \frac{M^2}{\pi g} + \frac{2M^3}{3\pi}. \quad (4.16)$$

Из (4.16) следует, что при $g > 0$, то есть при $G < G_c$ (4.14), точка глобального минимума термодинамического потенциала находится в точке $M = 0$ и киральная симметрия не нарушена. Однако, при $g < 0$, то есть при $G > G_c$, точка глобального минимума термодинамического потенциала находится в точке $M_0 = -1/g$ и происходит спонтанное нарушение киральной симметрии.

Теперь получим выражение для перенормированного термодинамического потенциала (4.15) при $\nu \neq 0$. Для этого перепишем неперенормированное выражение для термодинамического потенциала $\Omega^{un}(M; \nu)$ (4.10) в следующем виде

$$\Omega^{un}(M; \nu) = \frac{M^2}{4G} - 2 \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} (2E) - 2 \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} (|E + \nu| + |E - \nu| - 2E). \quad (4.17)$$

Так как первые члены асимптотического разложения (4.12) не зависят от ν , то ясно, что последний интеграл в (4.17) является сходящимся. Другие члены в (4.17) представляют собой неперенормированный потенциал в частном случае $\nu = 0$, который после процедуры перенормировки сводится к выражению (4.16). Таким образом, после процедуры перенормировки мы получим из (4.17) следующее конечное выражение:

$$\Omega^{ren}(M; \nu) = V(M) - 2 \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} (|E + \nu| + |E - \nu| - 2E), \quad (4.18)$$

где $V(M)$ задается (4.16). Интегральные члены в (4.18) могут быть вычислены явно. В результате получим

$$\Omega^{ren}(M; \nu) = V(M) - \frac{1}{3\pi} \theta(\nu - M) (\nu - M)^2 (2M + \nu). \quad (4.19)$$

4.2.2 Частный случай $\nu = 0$, $B_\perp \neq 0$

Здесь мы обсудим, как ненулевое перпендикулярное магнитное поле B_\perp влияет на фазовую структуру изначальной модели (4.1) в упрощенном случае $\mu_B = 0$, то есть без учета зеемановского взаимодействия ($\nu = 0$).

Ранее для этого случая был получен и исследован перенормированный термодинамический потенциал модели Гросса-Неве с одним фундаментальным мультиплетом относительно $O(N)$ четырехкомпонентного дираковского спинорного поля [4; 10; 37; 39; 41; 48; 52–55; 103], учитывалась конечная температура и ненулевой химический потенциал, но магнитное поле имело только перпендикулярную компоненту. Так как в этом случае нет зеемановского взаимодействия, то не вводилась дополнительная спиновая степень свободы.

Мы рассмотрим перенормированный термодинамический потенциал модели с двумя фундаментальными спиновыми мультиплетами относительно $O(N)$ четырехкомпонентного дираковского спинорного поля.

В Приложении 7.6 получено выражение для термодинамического потенциала под влиянием перпендикулярного внешнего магнитного поля в случае нулевой температуры, нулевого

химического потенциала и нулевого зеемановского взаимодействия, которое имеет вид

$$\Omega^{ren}(M) = \frac{NM^2}{2g} + \frac{NeB_{\perp}M}{2\pi} - \frac{N(2eB_{\perp})^{\frac{3}{2}}}{2\pi} \zeta\left(-\frac{1}{2}, \frac{M^2}{2eB_{\perp}}\right). \quad (4.20)$$

Результат легко обобщается на случай модели Гросса-Неве с двумя мультиплетами относительно $O(N)$. Таким образом, мы имеем

$$\Omega^{ren}(M; B_{\perp}) = \frac{NM^2}{\pi g} + \frac{NMeB_{\perp}}{\pi} - \frac{N(2eB_{\perp})^{3/2}}{\pi} \zeta\left(-\frac{1}{2}, \frac{M^2}{2eB_{\perp}}\right). \quad (4.21)$$

Термодинамический потенциал получается удвоенным за счет двух-кратного увеличения степеней свободы, но для этого нужно переопределить параметр g , сделав его в два раза меньше. Также для удобства мы ввели π в определение g .

Так как $\zeta(-1/2, x) = -2x^{3/2}/3 + \mathcal{O}(\sqrt{x})$ при $x \rightarrow \infty$, то ясно, что термодинамический потенциал (4.21) совпадает с $V(M)$ (4.16) при $B_{\perp} = 0$.

Используя соотношение

$$\frac{d\zeta(a, s)}{da} = -s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^{s+1}} = -s\zeta(a, s+1), \quad (4.22)$$

получаем для уравнения щели следующее выражение

$$\frac{d\Omega^{ren}(M)}{dM} = \frac{2NM}{\pi g} + \frac{NeB_{\perp}}{\pi} - \frac{N(2eB_{\perp})^{\frac{1}{2}}M}{\pi} \zeta\left(\frac{1}{2}, \frac{M^2}{2eB_{\perp}}\right). \quad (4.23)$$

ζ -функция при $M \rightarrow 0$ имеет следующую асимптотику

$$\zeta\left(\frac{1}{2}, \frac{M^2}{2eB_{\perp}}\right) = \frac{\sqrt{2eB_{\perp}}}{M} + const + o\left(\frac{M}{\sqrt{2eB_{\perp}}}\right). \quad (4.24)$$

Подставляя эту асимптотику в (4.23), получим

$$\left. \frac{d\Omega^{ren}(M)}{dM} \right|_{M=0} = -\frac{NeB_{\perp}}{\pi} < 0. \quad (4.25)$$

Это значит, что термодинамический потенциал (4.21) не может иметь точку глобального минимума в точке $M = 0$, если $B_{\perp} \neq 0$. Таким образом, если модель (4.1) находится во внешнем (бесконечно малом) перпендикулярном магнитном поле B_{\perp} и если не учитывается зеемановское взаимодействие электронов с магнитным полем ($\nu = 0$), то при произвольных (даже бесконечно малых) значениях голой константы связи G в модели происходит нарушение киральной симметрии. Явление спонтанного нарушения киральной симметрии при неравном нулю значении магнитного поля называется эффектом магнитного катализа. В частности, это означает, что при $g > 0$, то есть при $G < G_c$, спонтанное нарушение киральной симметрии индуцируется внешним магнитным полем. При $g < 0$, то есть при $G > G_c$, киральная симметрия нарушена даже при $\vec{B} = 0$ из-за достаточно сильной константы связи самодействия G , однако, внешнее магнитное поле в этом случае усиливает нарушение киральной симметрии, то есть значение конденсата увеличивается с увеличением магнитного поля.

Для случая $g > 0$ получим асимптотику M при $eB_{\perp}g \rightarrow 0$. При нулевом магнитном поле $M = 0$ является минимумом термодинамического потенциала.

Подставляя формулу (4.24) в выражение (4.23), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega^{ren}(M)}{dM} &= \frac{2NM}{\pi g} + \frac{NeB_{\perp}}{\pi} - \frac{N(2eB_{\perp})^{\frac{1}{2}}M}{\pi} \left(\frac{\sqrt{2eB_{\perp}}}{M} + const + o\left(\frac{M}{\sqrt{2eB_{\perp}}}\right) \right) = \\ &= \frac{2NM}{\pi g} - \frac{NeB_{\perp}}{\pi} + O\left(\sqrt{2eB_{\perp}}M\right) + o(M). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Считая, что M стремится к нулю как $eB_{\perp}g$ или быстрее, получим асимптотику при $eB_{\perp}g \rightarrow 0$

$$M = \frac{eB_{\perp}g}{2}. \quad (4.27)$$

В случае $g < 0$, M ведет себя следующим образом: $M \rightarrow m = -\frac{1}{g}$ при $B_{\perp} \rightarrow 0$.

Будем использовать следующую асимптотику для ζ

$$\zeta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{x}\right) = -2x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^m B_{2n} \frac{\Gamma(2n - \frac{1}{2})}{(2n)!} x^{2n - \frac{1}{2}}. \quad (4.28)$$

Подставляя эту асимптотику в выражение (4.23), получим

$$\frac{d\Omega^{ren}(M)}{dM} = \frac{2NM}{\pi g} + \frac{NeB_{\perp}}{\pi} + \frac{N}{\pi}M^2 - \frac{NeB_{\perp}}{\pi} - \frac{N(2eB_{\perp})^2 B_2 \Gamma(\frac{3}{2})}{\pi\sqrt{\pi} 2M^2} + O\left(\frac{(eB_{\perp})^4}{M^6}\right). \quad (4.29)$$

Учитывая $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ и $B_2 = \frac{1}{6}$,

$$\frac{d\Omega^{ren}(M)}{dM} = \frac{N}{\pi}M(M - m) - \frac{N(eB_{\perp})^2}{6\pi} \frac{1}{M^2}. \quad (4.30)$$

Подставляем $M = m + \hat{M}$ в выражение (4.30)

$$\frac{N}{\pi}m\hat{M} - \frac{N(eB_{\perp})^2}{6\pi} \frac{1}{m^2(1 + \frac{\hat{M}}{m})^2} = 0. \quad (4.31)$$

В итоге получаем асимптотику для вакуумного среднего M в случае $g < 0$, $B_{\perp} \rightarrow 0$

$$M = m + \frac{e^2 B_{\perp}^2}{12m^3} + o\left(\frac{e^2 B_{\perp}^2}{m^3}\right) = m \left(1 + \frac{e^2 B_{\perp}^2}{12m^4} + o\left(\frac{e^2 B_{\perp}^2}{m^4}\right) \right). \quad (4.32)$$

Асимптотика при $eB_{\perp}g^2 \rightarrow \infty$ получена в работе [4]

$$M \approx \sqrt{eB_{\perp}}. \quad (4.33)$$

Коэффициент пропорциональности можно найти численно, в работе [4] дано значение

$$M = 0,45\sqrt{eB_{\perp}}. \quad (4.34)$$

4.2.3 Термодинамический потенциал в общем случае $\nu \neq 0$, $B_\perp \neq 0$

Термодинамический потенциал в случае ненулевого химического потенциала и нулевой температуры имеет вид (см. Приложение 7.8)

$$\Omega_{B_\perp \mu}^{ren} = \Omega_{B_\perp} - \frac{eB_\perp N}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \theta(\mu - \epsilon_n)(\mu - \epsilon_n), \quad (4.35)$$

где Ω_{B_\perp} термодинамический потенциал в случае нулевой температуры и нулевого химического потенциала во внешнем магнитном поле (см. Приложение 7.6).

Учитывая тот факт, что в случае $\nu \neq 0$, $B_\perp \neq 0$ каждый из двух мультиплетов относительно $O(N)$ имеет свой химический потенциал $\mu_k = \pm\nu$, можно легко получить выражение для термодинамического потенциала, используя выражение для термодинамического потенциала с ненулевым μ (4.35), и найти следующее выражение для перенормированного термодинамического потенциала модели (4.1):

$$\Omega^{ren}(M; \nu, B_\perp) = \Omega^{ren}(M; B_\perp) - \frac{NeB_\perp}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \theta(\nu - \epsilon_n)(\nu - \epsilon_n), \quad (4.36)$$

где $s_n = 2 - \delta_{0n}$, $\epsilon_n = \sqrt{M^2 + 2neB_\perp}$, и термодинамический потенциал $\Omega^{ren}(M; B_\perp)$, являющийся термодинамическим потенциалом при нулевом ν , задан выражением (4.21).

Заметим, что из-за присутствия функции $\theta(x)$, суммирование по n в (4.36) в действительности производится от 0 до $\text{Int}[(\nu^2 - M^2)/2eB_\perp]$, где $\text{Int}[x]$ целая часть от x . Из (4.36) следует, что точка глобального минимума $M_0(B_\perp, \nu)$ (или щель) термодинамического потенциала (4.36) подчиняется следующему уравнению щели

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega^{ren}(M; \nu, B_\perp)}{\partial M} &= \frac{N2M}{\pi g} + \frac{NeB_\perp}{\pi} - \frac{NM(2eB_\perp)^{1/2}}{\pi} \zeta\left(\frac{1}{2}, \frac{M^2}{2eB_\perp}\right) + \\ &+ \frac{NeB_\perp}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \theta(\nu - \epsilon_n) \frac{M}{\epsilon_n} = 0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Вспомним, что в рамках модели (4.1) щель $M_0(B_\perp, \nu)$ является динамической массой квази-частиц (электронов).

Разобьем область (ν, B_\perp) на области Ω_n

$$(\nu, B_\perp) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n, \quad \text{где } \Omega_n : \{(\nu, B_\perp) : 2eB_\perp n < \nu^2 < 2eB_\perp(n+1)\}. \quad (4.38)$$

В области Ω_0 в сумме в выражении (4.37) остается только один член, а в области Ω_n $n+1$ членов.

Используем разложение ζ -функции

$$\zeta\left(\frac{1}{2}, \epsilon\right) = \sum_{k=0}^n (\epsilon + k)^{-\frac{1}{2}} - 2\sqrt{n + \epsilon} - \sum_{k=n}^{\infty} f(\epsilon), \quad (4.39)$$

где

$$f_n(\epsilon) = \frac{1}{2} \int_n^{n+1} \frac{u - n}{(u + \epsilon)^{\frac{3}{2}}} du > 0. \quad (4.40)$$

Область Ω_0 на плоскости занимает площадь от прямой $\nu = 0$ до прямой $\nu = \sqrt{2eB_\perp}$. Учитывая асимптотики (4.27) и (4.34), ясно, что при достаточно малых и достаточно больших значениях B_\perp кривая $\nu = M_0(B_\perp)$ лежит в области Ω_0 , где $M_0(B_\perp)$ является конденсатом в случае нулевого химического потенциала и нулевой температуры.

Запишем уравнение щели (4.37) в области Ω_0 , используя формулу (4.39) с $n = 0$,

$$\frac{2M}{\pi g} + \frac{2M^2}{\pi} + \frac{M\sqrt{2eB_\perp}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{M^2}{2eB_\perp} \right) - \frac{eB_\perp}{\pi} (1 - \theta(\nu - M)) = 0. \quad (4.41)$$

Это уравнение при $\nu > M$ имеет только одно решение $M = 0$, так как при этом последний член обращается в ноль, а все остальные члены неотрицательны. Если $\nu \leq M$, то уравнение щели (4.41) будет совпадать с уравнением щели для нулевого химического потенциала, так как вклад, вносимый зеемановским взаимодействием, пропорционален θ -функции, которая в этом случае зануляется. Уравнение щели имеет одно ненулевое решение $M_0(B_\perp)$ только при $\nu < M_0(B_\perp)$. Если же $\nu > M_0(B_\perp)$, то уравнение щели имеет единственное решение $M = 0$.

В случае произвольной области Ω_m уравнение щели будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{2M}{\pi g} + \frac{2M^2}{\pi} + \frac{M\sqrt{2eB_\perp}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{M^2}{2eB_\perp} \right) - \frac{eB_\perp}{\pi} (1 - \theta(\nu - M)) + \\ + \frac{eB_\perp}{\pi} \sum_{n=0}^m s_n \theta(\nu - \sqrt{M^2 + 2eB_\perp n}) \frac{M}{\sqrt{M^2 + 2eB_\perp n}} = 0. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Преыдущие рассуждения в этом случае аналогичны. При $\nu > M$ уравнение имеет только одно решение $M = 0$, так как добавившийся член также неотрицательный. При $\nu \leq M$ добавившийся член также обращается в ноль из-за θ -функции. Точки плоскости (ν, B_\perp) , лежащие выше кривой $\nu = M_0(B_\perp)$, соответствуют глобальному минимуму термодинамического потенциала $M = 0$, то есть киральная симметрия является ненарушенной. Если $\nu < M_0(B_\perp)$, то термодинамический потенциал имеет еще один локальный минимум в точке $M = M_0(B_\perp)$.

Уравнение, определяющее кривую фазового перехода $\nu = \nu_c(B_\perp)$, имеет вид

$$\Omega_{B_\perp \nu}(0) = \Omega_{B_\perp \nu}(M_0(B_\perp)). \quad (4.43)$$

Учитывая (4.35) и учитывая, что $\nu_c(B_\perp)$ должна быть меньше $M_0(B_\perp)$, в противном случае нет ненулевого решения $M_0(B_\perp)$, уравнение (4.43) можно переписать в виде

$$\Omega_{B_\perp}(M_0(B_\perp)) = \Omega_{B_\perp}(0) - \frac{eB_\perp N}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \theta(\nu - \sqrt{2eB_\perp n}) (\nu - \sqrt{2eB_\perp n}). \quad (4.44)$$

Ранее отмечалось, что при достаточно малых и при достаточно больших значениях магнитного поля B_\perp линия $\nu = M_0(B_\perp)$ лежит в области Ω_0 . При этих значениях B_\perp критическая кривая также находится в Ω_0 и уравнение (4.44) упрощается, так как под знаком суммы необходимо оставить только первое слагаемое. В результате получаем для кривой $\nu = \nu_c(B_\perp)$ при этих значениях поля B_\perp следующее выражение

$$\nu_c(B_\perp) = \frac{\pi}{eB_\perp N} [\Omega_{B_\perp}(0) - \Omega_{B_\perp}(M_0(B_\perp))]. \quad (4.45)$$

При малых значениях B_{\perp} , когда $M_0(B_{\perp})$ мало, из предыдущего выражения (4.45) с учетом выражения (4.25) следует

$$\nu_c(B_{\perp}) \approx -\frac{\pi}{eB_{\perp}N} \frac{d\Omega_{B_{\perp}}(0)}{dM} M_0(B_{\perp}) = M_0(B_{\perp}). \quad (4.46)$$

При $B_{\perp} \rightarrow \infty$, используя выражения (4.45), (4.20), (4.34), получим асимптотику

$$\nu_c(B_{\perp}) \approx -\frac{(0,45)^2}{g} + \sqrt{eB_{\perp}} \left(2\sqrt{2}\zeta \left(-\frac{1}{2}, \frac{0,45^2}{2} \right) - 2\sqrt{2}\zeta \left(-\frac{1}{2}, 0 \right) - 0,45 \right). \quad (4.47)$$

Численное значение коэффициента:

$$\nu_c(B_{\perp}) \approx 0.23\sqrt{eB_{\perp}}. \quad (4.48)$$

При отрицательном значении константы связи $g < 0$ ситуация несколько более сложная и рассуждения, подобные случаю $g > 0$, имеют смысл только при достаточно больших значениях магнитного поля. В этом случае при $\nu < M$ уравнение (4.41) может иметь решение $M_0(B_{\perp})$ (при $\nu < M_0(B_{\perp})$). В области $\nu > M$ уравнение (4.41), очевидно, имеет решение $M = 0$. Из-за отрицательного значения константы связи g мы не можем говорить, как мы это делали в случае $g > 0$, что уравнение не может иметь решений, отличных от нуля. Чтобы выяснить, при каких условиях могут существовать или не существовать эти отличные от нуля решения, удобно переписать уравнение (4.41) в несколько другом виде.

С этой целью вычислим интеграл $f_0(\theta)$

$$f_0(\theta) = \frac{1 + 2\theta - 2\sqrt{\theta(\theta + 1)}}{\sqrt{(\theta + 1)}}. \quad (4.49)$$

Вынося нулевое слагаемое из суммы в (4.41), перепишем уравнение (4.41) в виде

$$\frac{2M}{\pi} \left(-m + \frac{M^2 + eB_{\perp}}{\sqrt{M^2 + 2eB_{\perp}}} \right) + \frac{M\sqrt{2eB_{\perp}}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(\frac{M^2}{2eB_{\perp}} \right) - \frac{eB_{\perp}}{\pi} (1 - \theta(\nu - M)) = 0, \quad (4.50)$$

где $m = -\frac{1}{g}$.

При $\nu > M$ третий член обращается в ноль, второй член неотрицательный и обращается в ноль только при $M = 0$, а выражение в скобках в первом члене положительно при $M \geq 0$, если $eB_{\perp} > 2m^2$. При таких значениях поля все члены выражения (4.50) в области $\nu > M$ положительны и обращаются в ноль только при $M = 0$ и, таким образом, справедливы все рассуждения, которые были сделаны в случае $g > 0$.

Таким образом, асимптотика критического магнитного поля $\nu_c(B_{\perp})$ при $B_{\perp} \rightarrow \infty$ является такой же, как и в случае $g > 0$, и имеет вид (4.48)

$$\nu_c(B_{\perp}) \approx 0.23\sqrt{eB_{\perp}}. \quad (4.51)$$

О поведении критического параллельного магнитного поля в области малых B_{\perp} при $g < 0$ мы ничего не можем сказать, кроме того, что $\nu_c(0) = M$.

4.3 Некоторые свойства модели при $g > 0$

В начале исследуем, как внешнее магнитное поле влияет на фазовую структуру и намагниченность модели при $g > 0$, то есть в случае значений голой константы связи, меньших критической, $G < G_c$. Необходимо исследовать свойства точки глобального минимума термодинамического потенциала (4.36) при $g > 0$. Вспомним, что $\nu \equiv \mu_B |\vec{B}|$, где $|\vec{B}| = \sqrt{B_\perp^2 + B_\parallel^2}$.

4.3.1 Эффект магнитного катализа

Представим на секунду, что ν не зависит от $|\vec{B}|$. Тогда параметр ν является не зеемановской энергией расщепления, а скорее обычным химическим потенциалом. В этом случае, то есть когда есть два независимых внешних параметра B_\perp и ν , на фазовом портрете (egB_\perp, ν) для каждого фиксированного значения B_\perp существует критическое значение $\nu_c(B_\perp)$ параметра ν , что при $\nu < \nu_c(B_\perp)$ (при $\nu > \nu_c(B_\perp)$) реализуется фаза с нарушенной киральной симметрией (кирально симметричная фаза). На критической кривой $\nu = \nu_c(B_\perp)$ в модели происходит фазовый переход первого рода.

Более того, было показано, что $\nu_c(B_\perp) = M_0(B_\perp) + o(egB_\perp)$ при $B_\perp \rightarrow 0$ и $\nu_c(B_\perp) \sim \sqrt{eB_\perp}$ при $B_\perp \rightarrow \infty$ (где $M_0(B_\perp)$ щель из (4.27)). Следовательно, и это самое важное для нашего рассмотрения, существует прямая линия λ в плоскости (egB_\perp, ν) , касательная к критической кривой $\nu = \nu_c(B_\perp)$ в точке $B_\perp = 0$, такая, что область (egB_\perp, ν) над кривой λ принадлежит симметричной фазе модели. Из (4.27) ясно, что

$$\lambda = \{(egB_\perp, \nu) : \nu = egB_\perp/2\}. \quad (4.52)$$

Более того, прямая линия $\nu = k egB_\perp$ с $k < 1/2$ пересекает область, соответствующую фазе с нарушенной киральной симметрией, в плоскости (egB_\perp, ν) .

Случай $B_\parallel = 0$, то есть $B_\perp = |\vec{B}|$.

Как предполагалось с самого начала, мы положим, что \vec{B} и ν зависят друг от друга и, более того, внешнее магнитное поле \vec{B} перпендикулярно к системе, то есть $B_\perp = |\vec{B}|$ и $\nu = \mu_B B_\perp$. Таким образом, в рассматриваемом случае только точки прямой $\nu = \mu_B B_\perp \equiv k egB_\perp$ плоскости (egB_\perp, ν) имеют реальный физический смысл (очевидно, что $\kappa = \mu_B/(eg)$). Так, если $\kappa > 1/2$, то есть при достаточно малых значениях g , прямая $\nu = \mu_B B_\perp$ лежит целиком над линией λ (4.52) и в системе запрещено спонтанное нарушение киральной симметрии. Однако, если константа связи g больше критической $g_c = 2\mu_B/e$, мы имеем $\kappa < 1/2$ и прямая $\nu = \mu_B B_\perp$ лежит под линией λ . Очевидно, что в этом случае прямая $\nu = \mu_B B_\perp$ пересекает область с нарушенной киральной симметрией в плоскости (egB_\perp, ν) . Таким образом, при $g > g_c$ киральная симметрия может быть нарушена только для некоторого конечного интервала значений B_\perp . Это значит, что эффект магнитного катализа при $B_\parallel = 0$ и $\mu_B \neq 0$, то есть с учетом зеемановского взаимодействия электронов с магнитным полем, качественно отличен от случая $B_\parallel = 0$ и $\mu_B = 0$ (см. параграф 4.2.2).

Действительно,

1) при $\mu_B = 0$ внешнее (произвольно малое) магнитное поле B_\perp индуцирует спонтанное нарушение киральной симметрии при произвольных значениях $g > 0$ (см. параграф 4.2.2), в то время как при $\mu_B \neq 0$ киральная симметрия может быть нарушена магнитным полем B_\perp только при $g > g_c > 0$.

2) В случае $g > g_c$ при $\mu_B \neq 0$ киральная симметрия может быть спонтанно нарушена только при достаточно малых значениях B_\perp , то есть при $B_\perp < B_{\perp c}$, где $0 < B_{\perp c} < \infty$. Симметрия восстанавливается при достаточно больших значениях $B_\perp > B_{\perp c}$. В противо-

ложность этому, если не учитывать зеемановское взаимодействие, мы имеем $B_{\perp c} = \infty$ при произвольных $g > 0$.

Для иллюстрации этого были сделаны некоторые численные исследования термодинамического потенциала (4.36) при $B_{\perp} = |\vec{B}|$. Например, было найдено, что при $g = 2.5g_c$, $g = 3.5g_c$ и $g = 5g_c$ соответствующие критические значения перпендикулярного магнитного поля $B_{\perp c}$, при которых происходит восстановление киральной симметрии, равны следующим значениям $eg^2 B_{\perp c} \approx 0.059$, $eg^2 B_{\perp c} \approx 0.518$ и $eg^2 B_{\perp c} \approx 2.04$. Более того, на Рис. 4.1 представлено поведение динамической массы электронов (или щели) $M_0(B_{\perp}, \nu)$ в зависимости от B_{\perp} в частном случае $g = 5g_c$. Из этого графика видно, что значение щели увеличивается с увеличением B_{\perp} вплоть до критического значения $B_{\perp c}$, где она скачком прыгает в ноль, то есть происходит фазовый переход первого рода.

Случай $B_{\perp} \neq |\vec{B}|$.

Рассмотрим общий случай, когда $B_{\parallel} \neq 0$, то есть $B_{\perp} \neq |\vec{B}|$. В этом случае массовая щель $M_0(B_{\perp}, \nu)$ является функцией от двух независимых переменных, B_{\perp} и $|\vec{B}|$, с дополнительным очевидным физическим ограничением $B_{\perp} \leq |\vec{B}|$. Исследуя свойства точки глобального минимума термодинамического потенциала (4.36), зависящего от B_{\perp} и $|\vec{B}|$, возможно получить соответствующий фазовый портрет модели. Для значения параметра $g = 5g_c$ фазовая структура модели показана на Рис. 4.2.

Из рисунка ясно, что при произвольно малом перпендикулярном магнитном поле \vec{B} , таком что $|\vec{B}| < B_{\perp c}$ (см. предыдущие параграфы), система находится в фазе с нарушенной киральной симметрией 2. Таким образом, существуют два качественно разных способа восстановления киральной симметрии. Во-первых, можно увеличивать значение внешнего магнитного поля \vec{B} , или, во-вторых, можно наклонить \vec{B} относительно плоскости системы. В последнем случае требуются не такие большие углы наклона ϕ внешнего магнитного поля ($\phi \approx 45^\circ$, где ϕ угол между \vec{B} и перпендикуляром к плоскости системы) для того чтобы восстановить симметрию.

4.3.2 Осцилляции намагниченности

Рассмотрим влияние внешнего магнитного поля на намагниченность $m(|\vec{B}|, B_{\perp})$ системы при $g > 0$. При фиксированном угле ϕ между магнитным полем \vec{B} и нормалью к плоскости системы определим намагниченность следующим выражением

$$m(|\vec{B}|, B_{\perp}) \equiv - \left. \frac{d\Omega^{ren}(M; \nu, B_{\perp})}{d|\vec{B}|} \right|_{M=M_0(B_{\perp}, \nu)}, \quad (4.53)$$

где $M_0(B_{\perp}, \nu)$ массовая щель. Необходимо учитывать, что при фиксированном ϕ перпендикулярная компонента магнитного поля B_{\perp} пропорциональна $|\vec{B}|$, то есть $B_{\perp} = |\vec{B}| \cos \phi$, поэтому в (4.53) мы имеем

$$\frac{d}{d|\vec{B}|} = \frac{\partial}{\partial |\vec{B}|} + \frac{B_{\perp}}{|\vec{B}|} \frac{\partial}{\partial B_{\perp}}. \quad (4.54)$$

Принимая во внимание это соотношение, получим

$$m(|\vec{B}|, B_{\perp}) = - \left. \frac{B_{\perp}}{|\vec{B}|} \frac{\partial \Omega^{ren}(M; B_{\perp})}{\partial B_{\perp}} \right|_{M=M_0(B_{\perp}, \nu)} + \quad (4.55)$$

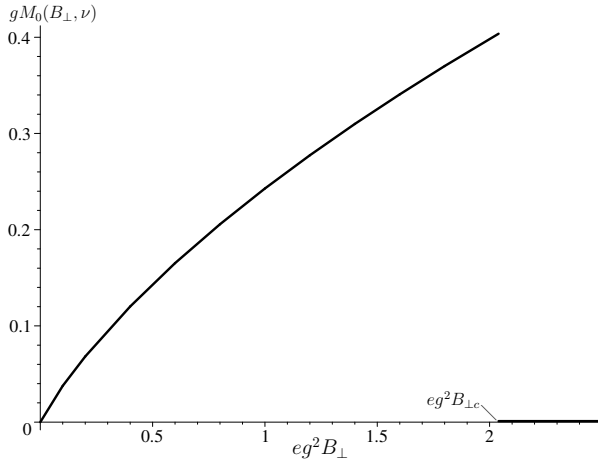


Рисунок 4.1 — *Случай* $g > 0$: Массовая щель $M_0(B_\perp, \nu)$ в зависимости от B_\perp в частном случае $B_\parallel = 0$ и $g = 5g_c \equiv 10\mu_B/e$. Здесь $eg^2 B_{\perp c} \approx 2.04$.

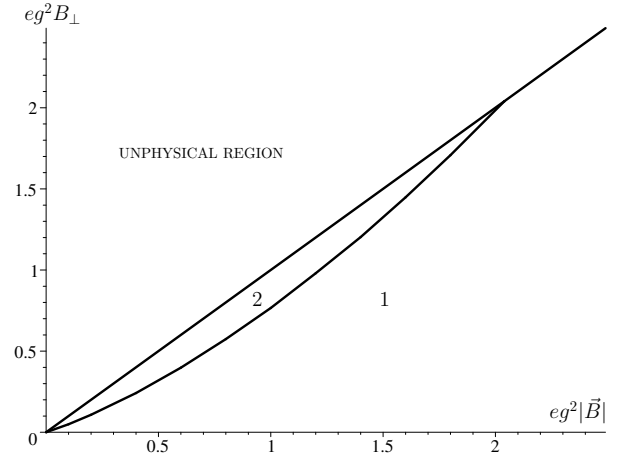


Рисунок 4.2 — *Случай* $g > 0$: Фазовый портрет модели в терминах $(|\vec{B}|, B_\perp)$ при $g = 5g_c \equiv 10\mu_B/e$. Символы 1 и 2 обозначают кирально симметричную фазу и фазу с нарушенной киральной симметрией, соответственно. В нефизической области рисунка $B_\perp > |\vec{B}|$. На границе между фазами 1 и 2 происходит фазовый переход первого рода.

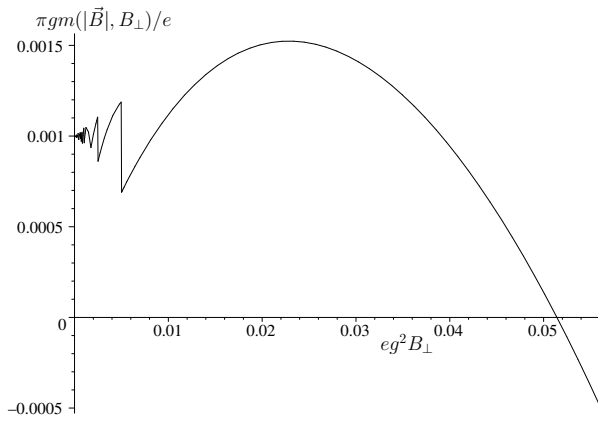


Рисунок 4.3 — *Случай* $g > 0$: Намагниченность $m(|\vec{B}|, B_\perp)$ в зависимости от B_\perp при фиксированном $eg^2 |\vec{B}| = 1$ и $g = 5g_c \equiv 10\mu_B/e$.

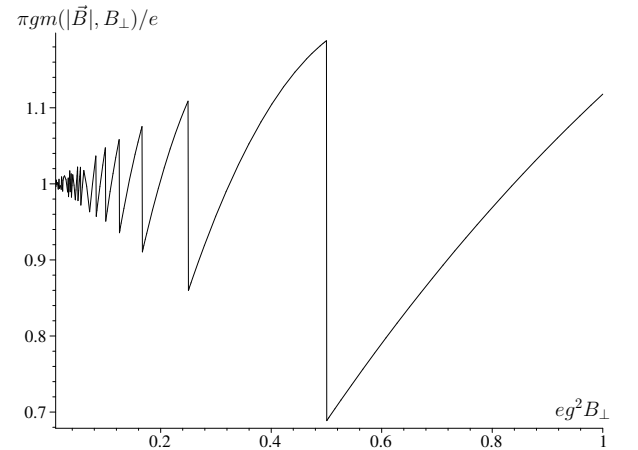


Рисунок 4.4 — *Случай* $g > 0$: Намагниченность $m(|\vec{B}|, B_\perp)$ в зависимости от B_\perp при фиксированном $eg^2 |\vec{B}| = 1$ и $g = 0.5g_c \equiv \mu_B/e$.

$$+\frac{eB_{\perp}}{\pi|\vec{B}|}\sum_{n=0}^{\infty}s_n\theta(\nu-\varepsilon_n)\left(2\nu-\frac{\varepsilon_n^2+enB_{\perp}}{\varepsilon_n}\right)\Bigg|_{M=M_0(B_{\perp},\nu)},$$

где используются обозначения выражения (4.36). В фазе 2 с нарушенной киральной симметрией на Рис. 4.2 значение массовой щели $M_0(B_{\perp},\nu)$ больше ν , поэтому ряд в (4.55) не вносит вклада в намагниченность. Как результат, намагниченность $m(|\vec{B}|,B_{\perp})$ достаточно гладкая функция от $|\vec{B}|$ и B_{\perp} в фазе 2. Однако, в кирально симметричной фазе 1 на Рис. 4.2 $M_0(B_{\perp},\nu) \equiv 0$ и в результате возникает осциллирующее поведение намагниченности, которое является результатом вклада члена, содержащего ряд, в выражении (4.55). Действительно, при $M_0(B_{\perp},\nu) = 0$ для намагниченности в кирально симметричной фазе 1 получаем следующее выражение:

$$m(|\vec{B}|,B_{\perp})\Big|_{\text{phase 1}} = \frac{eB_{\perp}}{\pi} \left[\frac{3}{|\vec{B}|} \sqrt{2eB_{\perp}} \zeta(-1/2) + 2\mu_B \right] + \quad (4.56)$$

$$\frac{2eB_{\perp}}{\pi|\vec{B}|} \sum_{n=1}^{\infty} \theta(\nu - \sqrt{2enB_{\perp}}) \left(2\nu - \frac{3}{2} \sqrt{2enB_{\perp}} \right), \quad (4.57)$$

где $\zeta(-1/2) \approx -0.208$. Графики функций (4.57) $m(|\vec{B}|,B_{\perp})$ в зависимости от B_{\perp} представлены на Рис. 4.3 и 4.4 в двух частных случаях $g = 5g_c$ и $g = 0.5g_c$, соответственно, при фиксированных значениях $|\vec{B}|$ таких, что $eg^2|\vec{B}| = 1$. Из этих рисунков ясно, что в области малых значений B_{\perp} величина (4.57) является сильно осциллирующей функцией.

Предположим, что $|\vec{B}|$ фиксировано. Так как все члены в ряде выражения (4.57) являются положительными величинами, то можно заключить, что в области достаточно малых B_{\perp} оба выражения в квадратных скобках в (4.57) и намагниченность в целом являются положительными величинами. Таким образом, при малых значениях B_{\perp} вакуумное состояние модели является парамагнитным. Ситуация изменяется, если B_{\perp} приближается к $|\vec{B}|$. В этом случае в зависимости от соотношения между безразмерными параметрами e и μ_B/g , можно получить совсем другие магнитные свойства вакуумного состояния модели. Действительно, если $\mu_B/g \geq e$ (см., например, Рис. 4.4), то намагниченность положительна для всех физических значений B_{\perp} , $0 \leq B_{\perp} \leq |\vec{B}|$, и система находится в парамагнитном вакуумном состоянии. Однако, при достаточно малых значениях $\mu_B/g \ll e$ существует интервал достаточно больших значений B_{\perp} , где оба выражения в квадратных скобках (4.57) и намагниченность $m(|\vec{B}|,B_{\perp})$ в целом являются отрицательными величинами, поэтому мы имеем в этом случае диамагнитное вакуумное состояние системы. Например, на Рис. 4.3 представлен график намагниченности $m(|\vec{B}|,B_{\perp})$ в зависимости от B_{\perp} при фиксированном $|\vec{B}|$ и при $\mu_B/g = 0.1e$. Видно, что в этом случае система находится в парамагнитном состоянии, если $eg^2B_{\perp} < 0.051$, и в диамагнитном, если $eg^2B_{\perp} > 0.051$.

Видно, что в области значений B_{\perp} , близких к $|\vec{B}|$, ряд в (4.57) состоит из конечного числа ненулевых членов (и, чем больше величина B_{\perp} , тем меньше ненулевых членов в ряде). Таким образом, поведение намагниченности в зависимости от B_{\perp} может быть легко вычислено в этом случае. Однако, сложнее получить информацию о поведении намагниченности при малых значениях B_{\perp} непосредственно из выражения (4.57), так как при $B_{\perp} \rightarrow 0$ суммирование в (4.57) нужно производить по бесконечному числу ненулевых членов. Эта задача хорошо известна в физике твердого тела [108;109], а также в релятивистских системах конденсированного состояния вещества [110;111], где исследовались магнитные осцилляции. Ясно, что соответствующая техника может быть использована также и в этой модели.

Для того чтобы изучить асимптотическое поведение намагниченности при $B_{\perp} \rightarrow 0$, мы используем в (4.57) хорошо известную формулу Пуассона [109]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \Phi(n) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \int_0^{\infty} \Phi(x) \cos(2\pi kx) dx, \quad (4.58)$$

где $\alpha_k = 2 - \delta_{0k}$. После достаточно утомительных вычислений можно найти следующее асимптотическое поведение намагниченности (4.57) при $\vec{B}_{\perp} \rightarrow 0$ и произвольном фиксированном $|\vec{B}|$ (вспомним, что $\nu = \mu_B |\vec{B}|$):

$$m(|\vec{B}|, B_{\perp}) = \frac{\mu_B \nu^2}{\pi} + \frac{\mu_B e B_{\perp}}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{\pi k}{e B_{\perp}} \nu^2\right) + o(e B_{\perp}). \quad (4.59)$$

Заметим, что ведущий асимптотический член в этом выражении, то есть первый член в правой части (4.59), равен намагниченности, соответствующей термодинамическому потенциалу (4.19) с нулевой компонентой B_{\perp} внешнего магнитного поля. Более того, бесконечный ряд в выражении (4.59) не более чем Фурье разложение периодической функции $f(x)$, где $x = \nu^2 / (2e B_{\perp})$. Ее период равен 1, и в интервале $0 < x < 1$ она имеет вид $f(x) = \pi/2 - \pi x$.

Заметим, что в системах конденсированного состояния вещества как нерелятивистских [108; 109], так и релятивистских [110–112] магнитные осцилляции обычно возникают в присутствии химического потенциала μ , то есть в системах с нулевым химическим потенциалом ($\mu = 0$) магнитные осцилляции, как правило, отсутствуют. Однако, как следует из нашего рассмотрения (см. также работу [106]), в системах с планарной структурой магнитные осцилляции могут быть индуцированы даже при $\mu = 0$ при наклоне внешнего магнитного поля по отношению к плоскости системы.

4.4 Фазовая структура модели при $g < 0$

В данном параграфе исследуем влияние внешнего магнитного поля на свойства изначальной модели (4.1) при $g < 0$, то есть при значениях голой константы связи, больших критической, $G > G_c$. Вспомним, что, если не учитывать зеемановское взаимодействие, то спонтанное нарушение киральной симметрии изначально индуцировано в этом случае достаточно большим значением константы связи и далее усиливается внешним магнитным полем. (см., например, [10; 37; 39; 41; 48; 52–55; 103]). Это означает, что динамическая масса электронов увеличивается с увеличением B_{\perp} во всем интервале $0 < B_{\perp} < \infty$ (в этом случае B_{\parallel} не оказывает влияние на свойства модели). Учет зеемановского взаимодействия сильно изменяет свойства модели.

4.4.1 Частный случай $|g| = \mu_B/e$

Случай перпендикулярного магнитного поля. Во-первых, давайте предположим, что внешнее магнитное поле \vec{B} направлено перпендикулярно к плоскости системы, то есть $B_{\perp} = |\vec{B}|$ и $B_{\parallel} = 0$. Для простоты зафиксируем величину g соотношением $|g| = \mu_B/e$. Исследуя в этом случае термодинамический потенциал (4.36), а также уравнение щели (4.37), мы получили поведение массовой щели $M_0(B_{\perp}, \nu)$ в зависимости от B_{\perp} (кривая 1 на Рис. 4.5). До критического значения $B_{\perp c_1}$ (такого, что $eg^2 B_{\perp c_1} \approx 0.81$) происходит усиление нарушения киральной симметрии, то есть массовая щель увеличивается при увеличении B_{\perp} . Более

того, в этой фазе с кирально нарушенной симметрией щель $M_0(B_\perp, \nu)$ имеет достаточно большие значения, такие что $M_0(B_\perp, \nu) > \nu$. Следовательно, вклад в намагниченность $m(|\vec{B}|, B_\perp)$ от зеемановского взаимодействия исчезает, то есть все члены в ряде (4.55) равны нулю. В результате намагниченность в этой фазе полностью определяется взаимодействием \vec{B} с орбитальным моментом импульса. Вследствие этого $m(|\vec{B}|, B_\perp)$ отрицательна при $0 < B_\perp < B_{\perp c_1}$ (см. Рис. 4.5, где кривая 2 соответствует намагниченности) и вакуумное состояние в этой фазе является диамагнитным.

Таким образом, в критической точке $B_\perp = B_{\perp c_1}$ массовая щель $M_0(B_\perp, \nu)$ прыгает к значительно меньшим ненулевым значениям и происходит фазовый переход первого рода в другую фазу с нарушенной киральной симметрией. Дальнейшее увеличение B_\perp ведет к восстановлению киральной симметрии при $B_\perp = B_{\perp c_2}$, где $eg^2 B_{\perp c_2} \approx 0.94$. Здесь происходит фазовый переход второго рода, так как массовая щель $M_0(B_\perp, \nu)$ непрерывно переходит в ноль (см. Рис. 4.5). Заметим также, что как во второй фазе с нарушенной киральной симметрией (при $B_{\perp c_1} < B_\perp < B_{\perp c_2}$), так и в симметричной фазе (при $B_{\perp c_2} < B_\perp < \infty$), намагниченность системы положительна, то есть вакуумное состояние этих фаз является парамагнитным (см. Рис. 4.5).

Случай наклонного магнитного поля. Скажем несколько слов о реакции системы с $g < 0$ на произвольно направленное внешнее магнитное поле, то есть когда $B_\perp \neq |\vec{B}|$. С помощью численного исследования термодинамического потенциала (4.36), где для простоты мы положили $|g| = \mu_B/e$, мы получили фазовый портрет модели, представленный на Рис. 4.6. На рисунке символ 1 соответствует кирально симметричной парамагнитной фазе, а символы 2 и 3 используются для обозначения двух различных фаз с нарушенной киральной симметрией. Первая из них, то есть фаза 2, является диамагнитной с $m(|\vec{B}|, B_\perp) < 0$, а вторая фаза, то есть фаза 3, является фазой с парамагнитным вакуумным состоянием, так как в этой области $m(|\vec{B}|, B_\perp) > 0$. Заметим, что при $g < 0$ также можно наблюдать осцилляции намагниченности только в случае кирально симметричной фазы 1, когда $B_\perp \rightarrow 0$.

Из Рис. 4.5 и 4.6 ясно, что в присутствии зеемановского взаимодействия меняется поведение киральной симметрии под влиянием внешнего как перпендикулярного, так и наклонного магнитного поля при $g < 0$. Действительно, при $\mu_B \neq 0$ увеличение кирального конденсата в этом случае происходит только при достаточно малых значениях $|\vec{B}|$, то есть в фазе 2 на Рис. 4.6 (это означает, что зафиксировав угол наклона магнитного поля, мы получим, что массовая щель $M_0(B_\perp, \nu)$ увеличивается при увеличении $|\vec{B}|$). Дальнейшее увеличение $|\vec{B}|$ приводит к восстановлению киральной симметрии.

4.4.2 Фазовая структура в общем случае

Ясно, что для других соотношений между $|g|$ и μ_B , то есть при $|g| \neq \mu_B/e$, фазовый портрет модели в терминах $(eg^2|\vec{B}|, eg^2B_\perp)$ может сильно отличаться от представленного на Рис. 4.6. Для того чтобы представить фазовую структуру модели при произвольном фиксированном соотношении между $|g|$ и μ_B , удобно использовать для ее описания новые безразмерные параметры, $x = \mu_B|\vec{B}|/|g|$ и $y = eg^2B_\perp$.¹ Предположив, что x и y полностью независимые величины, возможно исследовать поведение точки глобального минимума термодинамического потенциала (4.36) как функцию от x и y и затем получить фазовый портрет модели в терминах (x, y) , он изображен на Рис. 4.7 и/или 4.8. (На линию L на этих графиках в этом случае смотреть не надо. Заметим, что на Рис. 4.8 фазовый портрет изображен для большей области параметра y .) Можно увидеть три разных фазы, которые уже были представлены на Рис. 4.6. Поэтому мы используем те же обозначения для них, 1, 2 и 3. В действительности, есть ограничения на x и y , связанные с физическим требованием $B_\perp \leq |\vec{B}|$.

¹Строго говоря, только x является новым параметром, так как y был уже использован на Рис. 4.6 и т.д.

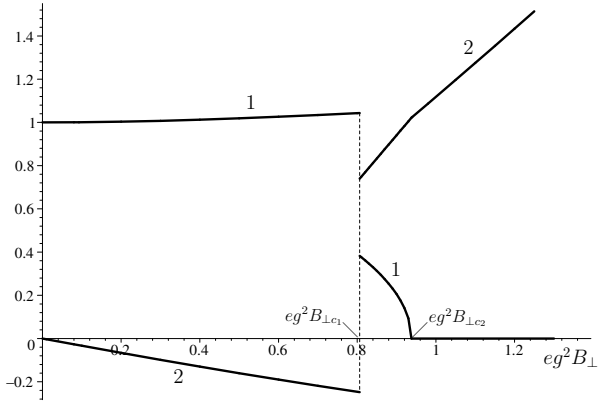


Рисунок 4.5 — *Случай* $g < 0$: Массовая щель $M_0(B_\perp, \nu)$ и намагниченность $m(|\vec{B}|, B_\perp)$ в зависимости от B_\perp в частном случае $B_\parallel = 0$ и $|g| = \mu_B/e$. Кривые 1 и 2 — графики безразмерных величин $gM_0(B_\perp, \nu)$ и $\pi g m(|\vec{B}|, B_\perp)/e$, соответственно. $eg^2 B_{\perp c1} \approx 0.81$ и $eg^2 B_{\perp c2} \approx 0.94$.

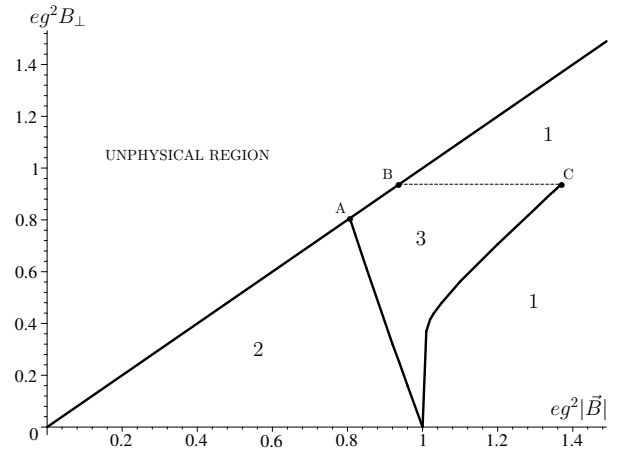


Рисунок 4.6 — *Случай* $g < 0$: Фазовый портрет модели в терминах $(|\vec{B}|, B_\perp)$ при $|g| = \mu_B/e$. Символ 1 обозначает кирально симметричную фазу, символы 2 и 3 обозначают две различные фазы с нарушенной киральной симметрией (на границе между 2 и 3 массовая щель меняется скачком). Координаты точек А, В и С примерно равны $(0.81, 0.81)$, $(0.94, 0.94)$ и $(1.37, 0.94)$, соответственно. На линии ВС происходит фазовый переход второго рода, на других линиях происходит фазовый переход первого рода. Нефизическая область на графике соответствует $B_\perp > |\vec{B}|$.

В терминах x и y оно выглядит как $y \leq cx$, где $c = e|g|/\mu_B$, то есть не вся плоскость (x, y) на Рис. 4.7 и 4.8 может рассматриваться как фазовая диаграмма, а только те области, которые лежат под линией L. Точки линии L соответствуют перпендикулярному внешнему магнитному полю, то есть на линии L мы имеем $B_{\perp} = |\vec{B}|$. Ясно, что, если варьировать величину $c = e|g|/\mu_B$, то линия L на Рис. 4.7 и 4.8 меняет наклон и в результате разрешенная физическая область, которая лежит под ней, также меняется. Однако, расположение и форма критических кривых на Рис. 4.7, 4.8 не меняется при различных значениях параметра c . При этом могут только растягиваться оси на графике.

Из Рис. 4.8 легко увидеть, что в интервале $3 < y < 11$ критическая кривая l на фазовой диаграмме может быть аппроксимирована прямой линией с коэффициентом наклона $c^* \approx 28$.

Типичный фазовый портрет, соответствующий малым значениям константы связи $|g|$, таким что $c = e|g|/\mu_B < c^*$, имеет вид, представленный на Рис. 4.7 (это область под линией L). Ясно, что в этом случае линия L пересекает критическую кривую l фазового портрета, то есть даже если занулить B_{\parallel} и увеличивать B_{\perp} , то система перейдет в кирально симметричную фазу 1. В результате при $c < c^*$ киральная симметрия всегда восстанавливается при $|\vec{B}| \rightarrow \infty$, вне зависимости от направления внешнего магнитного поля (даже при перпендикулярном магнитном поле). В частности, случай $c = 1$ был детально рассмотрен в предыдущем параграфе 4.4.1, и Рис. 4.7 при $c = 1$ совпадает с фазовой диаграммой из Рис. 4.6.

Рассмотрим противоположный случай $c = e|g|/\mu_B > c^*$. Мы знаем, что асимптотическое поведение критической кривой имеет вид $\nu_c \sim \sqrt{B_{\perp}}$ (4.51). Таким образом, ясно, что кривая L в любом случае пересечет критическую кривую l , но, как видно на Рис. 4.8 (на нем этого пересечения не происходит), это произойдет при больших значениях $|\vec{B}|$. В области бесконечных значений y кривая l ведет себя как $\sqrt{B_{\perp}}$ (как упоминалось выше), но она ведет себя как прямая до достаточно больших значений y . Можно заключить, что при интересующих нас не слишком больших значениях магнитного поля кривая l не выйдет на асимптотику и, таким образом, типичный фазовый портрет, соответствующий большим значениям константы связи $|g|$, таким что $c > c^*$, имеет вид, представленный на Рис. 4.8. (это область, лежащая под и/или справа от линии L). Видно, что при произвольных значениях перпендикулярного магнитного поля киральная симметрия не может быть восстановлена, так как мы двигаемся по линии L, когда увеличиваем $B_{\perp} = |\vec{B}|$. Однако, если $|\vec{B}|$ достигает значений, соответствующих $x > 0.7$, в этом случае при фиксированном $|\vec{B}|$ возможно восстановить киральную симметрию, наклонив магнитное поле от его ортогонального направления. В частности, если параметр x лежит в интервале $0.7 < x < 1.4$ (см. Рис. 4.8), то в системе может происходить несколько фазовых переходов, индуцированных наклоном внешнего магнитного поля.

4.4.3 Численные оценки в контексте физики конденсированного состояния вещества

Оценим величины магнитного поля, при которых фазовые переходы на Рис. 4.6, 4.7, 4.8 могут происходить в $(2+1)$ -мерных системах конденсированного состояния вещества. Для этого учтем скорость Ферми квазичастиц $v_F \neq 1$ в лагранжиане (4.1). (см. параграф 4.2). Используя те же вычисления, как в параграфе 4.2 данной главы и/или в [9;106;113], возможно получить термодинамический потенциал Ω_{v_F} в случае $v_F \neq 1$. Действительно, существует простая связь между Ω_{v_F} и перенормированным термодинамическим потенциалом (4.36), соответствующим случаю $v_F = 1$. Надо в (4.36) произвести замены $eB_{\perp} \rightarrow ev_F^2 B_{\perp}$, $g \rightarrow g/v_F$ (заметим, что зеемановский член $\mu_B |\vec{B}|$ не изменяется в этом случае) и затем умножить полученное выражение на $1/v_F^2$.

Предположим, что $g < 0$ (вспомним, что здесь мы также фиксируем спектроскопический фактор Ланде g_S значением $g_S = 2$, как в графене). Затем в частном случае $\vec{B} = 0$ термодинамический потенциал Ω_{v_F} , полученный из термодинамического потенциала $V(M)$

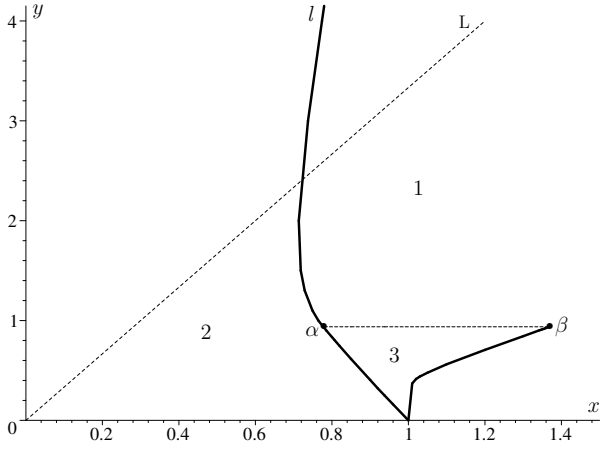


Рисунок 4.7 — *Случай $g < 0$* : Фазовая диаграмма модели в терминах (x, y) , где $x = \mu_B |\vec{B}| |g|$ и $y = eg^2 B_\perp$, типичная для значений $c \equiv e|g|/\mu_B < c^* \approx 28$. Физическая область диаграммы, соответствующая соотношению $B_\perp \leq |\vec{B}|$, лежит под линией $L = \{(x, y) : y = cx\}$. Символ 1 обозначает кирально симметричную фазу, символы 2 и 3 обозначают две различные фазы с нарушенной киральной симметрией. На сплошных линиях происходит фазовый переход первого рода. На линии $\alpha\beta$ происходит фазовый переход второго рода. Координаты точек $\alpha \approx (0.71, 0.94)$, $\beta \approx (1.37, 0.94)$.

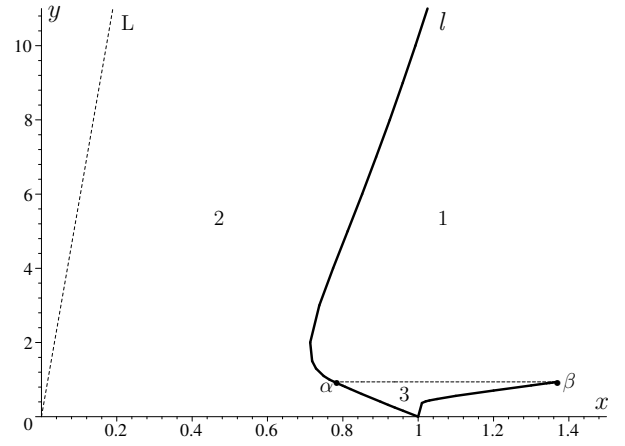


Рисунок 4.8 — *Случай $g < 0$* : Фазовая диаграмма модели в терминах (x, y) , где $x = \mu_B |\vec{B}| |g|$ и $y = eg^2 B_\perp$, типичная для значений $c \equiv e|g|/\mu_B > c^* \approx 28$. Физическая область диаграммы, соответствующая соотношению $B_\perp \leq |\vec{B}|$, лежит под и/или справа от линии $L = \{(x, y) : y = cx\}$. Другие обозначения такие же, как на Рис. 4.7.

(4.16) случая $v_F = 1$, уже имеет глобальный минимум в точке $M_{0F} \equiv -v_F/g$ (это массовая щель системы). Так как во всех численных вычислениях случая $v_F = 1$ все размерные величины были сделаны безразмерными умножением на соответствующие степени $|g|$, в случае $v_F \neq 1$ вместо степеней $|g|$ надо использовать степени $|g|/v_F$. Таким образом, для того чтобы получить фазовые диаграммы в случае $v_F \neq 1$, достаточно на диаграммах из Рис. 4.7, 4.8 просто заменить оси x, y на новые оси x_F, y_F , где $x_F = x/v_F \equiv \mu_B |\vec{B}| |g|/v_F$, и $y_F = y$. (В последующем, при ссылках на Рис. 4.7, 4.8 в случае $v_F \neq 1$, будем предполагать, что вместо x и y на графиках используются новые параметры x_F и y_F .) Прямая L, под которой находится физическая область, задается уравнением $y_F = c_F x_F$, где $c_F \equiv cv_F = e|g|v_F/\mu_B = ev_F^2/(\mu_B M_{0F})$.

Из Рис. 4.7, 4.8 видно, что при $B_\perp = 0$ и $v_F \neq 1$ фазовый переход второго рода происходит при значениях магнитного поля $|\vec{B}_0|$, соответствующих $x_F = 1$, то есть $|\vec{B}_0| = v_F/(|g|\mu_B) = M_{0F}/\mu_B$. Так как величина массовой щели M_{0F} в системах конденсированного состояния вещества обычно имеет порядок величины 1-10 мЭВ, легко получить, что значение критического магнитного поля $|\vec{B}_0|$ имеет порядок величины 14-140 Т, соответственно. Из Рис. 4.7, 4.8 видно, что при $B_\perp \neq 0$ значения $|\vec{B}|$, при которых происходят фазовые переходы, может иметь даже меньшие значения и могут даже равняться $0.7|\vec{B}_0|$. В численных оценках использовались следующие соотношения (см., например, [113]): $\mu_B = e/(2m_e)$, где m_e масса покоя электрона, $m_e \approx 0.5$ МэВ; $1 \text{ Т} \approx 700 \text{ эВ}^2$; $e \approx 1/\sqrt{137}$, как в графене.

Если $v_F = 1/300$ и $g_S = 2$, как в графене, то коэффициент наклона c_F прямой L имеет порядок величины, равный 10^3 при $M_{0F} = 10$ мЭВ и 10^4 при $M_{0F} = 1$ мЭВ, то есть $c_F \gg c^* \approx 28$. Таким образом, к плоским системам типа графена относится только фазовая диаграмма на Рис. 4.8. В этом случае (вспомним, что критическая кривая l ведет себя как прямая линия с коэффициентом наклона $c^* \approx 28$ в области больших y , вплоть до $y \sim 30$) киральная симметрия не может быть восстановлена при произвольно больших значениях внешнего перпендикулярного магнитного поля и при $B_\perp \lesssim |\vec{B}|$ усиливается нарушение киральной симметрии. Однако, с помощью наклона магнитного поля по отношению к нормали к плоскости системы возможно восстановить киральную симметрию при $|\vec{B}| > 0.7|\vec{B}_0|$. Угол φ_0 между \vec{B} и плоскостью системы, при котором восстанавливается симметрия, может быть численно оценен. Например, при $|\vec{B}| = 1.5|\vec{B}_0|$ (то есть при $x_F = 1.5$) компонента поля B_\perp , при которой восстанавливается киральная симметрия, соответствует величине $y \approx 30$ (точка (1.5,30) лежит на критической кривой l на Рис. 4.8). Следовательно, $\sin \varphi_0 = B_\perp/|\vec{B}| \approx 30/(1.5c_F)$. Получим, что при $M_{0F} = 10$ мЭВ и $M_{0F} = 1$ мЭВ они принимают значения $\sin \varphi_0 \approx 0.02$ и $\sin \varphi_0 \approx 0.002$, соответственно, то есть восстановление киральной симметрии происходит при очень слабых значениях компоненты магнитного поля B_\perp .

В работе [106], где исследовались свойства планарной системы свободных электронов, было показано, что в полупроводниках, в которых отсутствует щель, скорость Ферми v_F может варьироваться в интервале $v_F \in (1/3000, 1/300)$, в то время как спектроскопический фактор Ланде g_S может равняться даже 200. Спектроскопический фактор Ланде $g_S \neq 2$ может быть введен в наше рассмотрение просто заменой $\mu_B \rightarrow g_S \mu_B/2$. Если $g_S = 200$ и $v_F = 1/300$, как в [106], то как модуль критического магнитного поля $|\vec{B}_0|$, так и коэффициент наклона c_F прямой L, принимают значения в 100 раз меньшие, чем в случае $g_S = 2$, то есть при $M_{0F} = 10$ мЭВ мы имеем $|\vec{B}_0| = 1.4 \text{ Т}$ и $c_F = 10 < c^* \approx 28$. Это означает, что фазовый портрет модели выглядит как на Рис. 4.7. В результате киральная симметрия восстанавливается при внешнем (даже перпендикулярном) магнитном поле, равном $|\vec{B}| \sim |\vec{B}_0| = 1.4 \text{ Т}$. Более того, возможно достичь парамагнитную фазу с нарушенной киральной симметрией 3 (см. Рис. 4.7 и 4.8) при не слишком больших углах наклона.

Если в дополнение к $g_S = 200$ и $v_F = 1/300$ мы рассмотрим систему с $M_{0F} = 1$ мЭВ, то $|\vec{B}_0| = 0.14 \text{ Т}$, $c_F = 100 > c^* \approx 28$ и, следовательно, к системам такого типа относится фазовая диаграмма на Рис. 4.8. Однако, в этом случае угол наклона φ_0 , при котором киральная симметрия может восстанавливаться, имеет в 100 раз большее значение. Например, при $|\vec{B}| =$

$1.5|\vec{B}_0|$ угол φ_0 , при котором происходит восстановление киральной симметрии, задается следующим соотношением $\sin \varphi_0 \approx 0.2$, то есть $\varphi_0 \approx 10^\circ$.

Заметим, что мы проводили оценки для фазовых переходов в системе с $v_F = 1/300$. Однако, в планарных бесщелевых полупроводниках при меньших значениях v_F , например, при $v_F = 1/3000$, получаются даже меньшие значения критического магнитного поля $|\vec{B}_0|$. А коэффициент наклона c_F прямой L в этом случае может быть очень малым, то есть $c_F \sim 1$. Таким образом, к таким системам конденсированного состояния вещества относится фазовая диаграмма на Рис. 4.6 с множеством фазовых переходов.

В заключение отметим, что эффекты, связанные с зеемановским взаимодействием, могут наблюдаться в реальных системах конденсированного состояния вещества при лабораторных значениях внешнего магнитного поля.

4.5 Итоги и выводы

В данной главе мы исследовали (при нулевых температуре и химическом потенциале) влияние действия произвольного внешнего магнитного поля \vec{B} на (2+1)-мерную модель Гросса-Неве (4.1). Эта модель описывает четырехфермионное взаимодействие квазичастиц (электронов), обладающих спином $1/2$. В дополнение к этому она описывает взаимодействие магнитного поля \vec{B} с орбитальным моментом импульса электронов и их спином. Последнее известно как зеемановское взаимодействие и пропорционально магнитному моменту электрона μ_B , который в нашей рассматриваемой модели является свободным параметром модели.

При $\mu_B = 0$ свойства модели рассматривались в [10; 37; 39; 41; 48; 52–55; 103], где, в частности, было показано, что внешнее перпендикулярное магнитное поле \vec{B}_\perp индуцирует спонтанное нарушение киральной симметрии при $G < G_c$ или усиливает киральный конденсат при $G > G_c$. (Такая способность внешнего магнитного поля была названа эффектом магнитного катализа). Более того, в этом случае система ведет себя как диамагнетик под влиянием внешнего магнитного поля, то есть намагниченность отрицательна. Без учета зеемановского взаимодействия ни у какой физической величины не было обнаружено осцилляций при изменении магнитного поля.

В данной главе мы изучили, какие изменения вносит учет зеемановского взаимодействия (то есть $\mu_B \neq 0$) в эффект магнитного катализа и явления намагниченности. Для этой цели мы получили в ведущем порядке приближения больших N перенормированный термодинамический потенциал $\Omega^{ren}(M; \nu, B_\perp)$ (4.36), где $\nu = \mu_B |\vec{B}|$. Поведение точки глобального минимума термодинамического потенциала в зависимости от массовой щели M дает нам фазовую структуру модели, в то время как его производная по $|\vec{B}|$ дает намагниченность. Заметим также, что перенормированный термодинамический потенциал (4.36) не зависит больше от голой константы связи G . Вместо этого появляется зависимость термодинамического потенциала от нового конечного параметра g , который связан с G соотношением (4.14). Заметим, что из (4.14) следует, что значения $g > 0$ ($g < 0$) соответствуют $G < G_c$ ($G > G_c$.) Основные результаты нашего исследования следующие.

1) Мы обнаружили, что при $\mu_B \neq 0$ и $g > 0$ существует критическая константа связи $g_c = 2\mu_B/e$ такая, что при $g > g_c$ произвольное достаточно слабое внешнее магнитное поле \vec{B} индуцирует спонтанное нарушение киральной симметрии при условии, что отклонение от вертикали \vec{B} не такое большое и $|\vec{B}| < B_c(g)$, где $0 < B_c(g) < \infty$ (см. Рис. 4.2). При $0 < g < g_c$ киральная симметрия не может быть нарушена внешним магнитным полем. (В противоположность этому, при $\mu_B = 0$ и при любых значениях $g > 0$ нарушение киральной симметрии индуцируется произвольным внешним магнитным полем \vec{B} , таким что $\vec{B}_\perp \neq 0$.)

2) Предположим, что $\mu_B \neq 0$, $g > g_c > 0$ и что киральная симметрия нарушена, то есть \vec{B} имеет достаточно большую компоненту B_\perp . Тогда киральная симметрия может быть восстановлена простым наклоном внешнего магнитного поля по отношению к плоскости системы, то есть без увеличения модуля магнитного поля $|\vec{B}|$.

3) Мы показали, что при $\mu_B \neq 0$, $g > 0$ и произвольном фиксированном $|\vec{B}| \neq 0$ можно наблюдать эффекты осцилляции намагниченности в области малых значений B_\perp (см. Рис. 4.3 и 4.4). Заметим, что явление магнитной осцилляции де Гааза-ван Альфена достаточно типичное явление физики конденсированного состояния вещества [108;109] и плотной релятивистской материи [110–112]. Они обычно происходят при ненулевом химическом потенциале. В противоположность этому, в нашей (2+1)-мерной системе (4.1) это явление индуцируется (при нулевом химическом потенциале) наклоном внешнего магнитного поля.

4) Если $\mu_B \neq 0$ и $g < 0$, то фазовая структура и магнитные свойства модели намного богаче, чем в случае $\mu_B = 0$, $g < 0$. Действительно, из Рис. 4.6, 4.7 и 4.8 видно, что при учете зеемановского взаимодействия фазовый портрет модели содержит, по крайней мере, две фазы с нарушенной киральной симметрией, обозначенных как 2 и 3. В фазе 2, которая является диамагнитной, магнитное поле усиливает нарушение киральной симметрии, в то время как в парамагнитной фазе 3 киральный конденсат уменьшается с увеличением внешнего магнитного поля. Более того, если параметр $c \equiv e|g|/\mu_B < c^* \approx 28$, то при достаточно больших значениях $|\vec{B}|$ (даже в перпендикулярном магнитном поле) в модели происходит восстановление киральной симметрии. При $\mu_B = 0$ и $g < 0$ существует только диамагнитная фаза 2 с усилением нарушения киральной симметрии при произвольных значениях и направлениях \vec{B} таких, что $B_\perp > 0$.

5) Критическая кривая l на Рис. 4.8 может быть экстраполирована в области значений $y \equiv eg^2B_\perp$: $11 < y < 30$ прямой линией с коэффициентом наклона $c^* \approx 28$. Видно, что при $g < 0$ и $c \equiv e|g|/\mu_B > c^*$ прямая L на Рис. 4.8 не пересекает ни одну из критических кривых фазового портрета. В этом случае при произвольном перпендикулярном магнитном поле киральная симметрия не может быть восстановлена. Однако, увеличивая угол наклона магнитного поля от перпендикулярного направления, возможно восстановить симметрию. Как показано в численных оценках (см. параграф 4.4.3), именно такая ситуация реализуется для планарных систем типа графена.²

6) Посмотрим на Рис. 4.8, где $c > c^*$, и зафиксируем $|\vec{B}|$, например, в таком интервале $0.8 < x \equiv \mu_B|\vec{B}||g| < 1$. Тогда, при $B_\perp \lesssim |\vec{B}|$ в модели реализуется фаза с нарушенной киральной симметрией 2. Из этого рисунка видно, что, уменьшая значение B_\perp (или просто наклона \vec{B}), в этом случае можно восстановить киральную симметрию. Однако, дальнейшее уменьшение B_\perp приводит к переходу системы в фазу с нарушенной киральной симметрией 3 и 2. В противоположность этому, если $|\vec{B}|$ фиксирован в интервале, который соответствует значениям x : $1 < x < 1.3$, то после восстановления киральной симметрии, имеющей место при средних значениях B_\perp , происходит переход в фазу с нарушенной киральной симметрией 3 и затем, окончательно, в симметричную фазу модели. Таким образом, при фиксированных значениях $|\vec{B}|$ происходит серия фазовых переходов, (один следует за другим), вызванная изменением наклона внешнего магнитного поля к плоскости системы.

Проведены численные оценки в контексте физики конденсированного вещества, из которых можно сделать вывод, что рассмотренные эффекты могут наблюдаться в реальных системах конденсированного состояния вещества при лабораторных значениях внешнего магнитного поля.

²На самом деле прямая L на Рис. 4.8 пересекает критическую кривую l в случае $e|g|/\mu_B > c^*$, но это происходит при очень больших значениях $|\vec{B}|$, не достижимых в лаборатории в данный момент. Например, как видно из численных оценок параграфа 4.4.3, в системах типа графена, для которых коэффициент наклона $e|g|/\mu_B$ прямой L является очень большим, восстановление киральной симметрии в этом случае может происходить при значениях перпендикулярного магнитного поля $|\vec{B}| \gg 140$ Т.

Глава 5. Нарушение киральной симметрии в трехмерной модели Гросса-Неве с компактификацией в присутствии магнитного поля

5.1 Введение

Рассмотрению модели Гросса-Неве в случае пространств с нетривиальной топологией и ненулевой кривизной посвящено ряд работ ([5–8; 116]). Рассматривать квантовую теорию поля в случае этих пространств имеет смысл, так как в них могла существовать вселенная на ранних этапах своей эволюции. Одним из простых примеров пространства с нетривиальной топологией является пространство $R^d \times S^1 \times \dots \times S^1$. Такие пространства используются в моделях с компактифицированными дополнительными измерениями, также в пространствах с такой топологией удобно описывать явления типа эффекта Казимира.

Изучая теории в пространствах с простейшей нетривиальной топологией, возможно сделать обобщения и предсказать свойства физических систем в пространствах более сложной структуры.

Физика в пространстве с компактифицированным измерением может измениться по сравнению с обычным пространством Минковского. Это можно увидеть на достаточно простом примере, и этот факт является важным для дальнейшего изложения. Покажем, что в случае пространства $R^d \times S^1$ постоянный векторный потенциал, направленный вдоль компактифицированного измерения, не может быть убран с помощью калибровочного преобразования

$$A_\mu = 0 \text{ при } \mu = 1, \dots, d, \quad A_{d+1} = \text{const.}$$

Калибровочные преобразования имеют вид:

$$\psi \rightarrow e^{ie\alpha} \psi, \quad (5.1)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha.$$

Так как на ψ наложены граничные условия $\psi(x_1, \dots, x_d, x_{d+1} + L) = \psi(x_1, \dots, x_d, x_{d+1})$, α удовлетворяет условию:

$$\alpha(x_1, \dots, x_d, x_{d+1} + L) = \alpha(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) + 2\pi en, \quad (5.2)$$

где L -длина компактифицированного измерения.

Такому условию удовлетворяет $\alpha(x) = 2\pi n \frac{x}{L}$.

Соответственно, преобразование для A_{d+1} имеет вид

$$A_{d+1} \rightarrow A_{d+1} - \frac{2\pi en}{L}. \quad (5.3)$$

Таким образом, видно, что в общем случае A_{d+1} не может быть убрана с помощью калибровочного преобразования.

В данной главе рассматривается модель Гросса-Неве в случае пространства $R^2 \times S^1$ в присутствии внешнего магнитного поля, направленного вдоль некомпактифицированного измерения, в случае конечных температур и ненулевого химического потенциала.

5.2 Модель и ее термодинамический потенциал

Рассмотрим модель Гросса-Неве в случае пространства $R^2 \times S^1$, то есть на цилиндре (помимо времени есть одно некомпактифицированное и одно компактифицированное пространственные измерения).

Будем считать, что цилиндр вложен в $(3+1)$ -мерное пространство Минковского, в котором присутствует однородное магнитное поле, направленное вдоль оси этого цилиндра.

На поверхности цилиндра векторный потенциал имеет только одну постоянную компоненту вдоль компактифицированного измерения. Как показано во введении, она не может быть убрана калибровочным преобразованием, то есть существует ненулевой магнитный поток вдоль оси цилиндра.

Помимо того, будем считать, как в предыдущей главе, что магнитное поле взаимодействует со спином фермионов, который введем как дополнительный индекс у спинорного поля ψ . Заметим, что спин, введенный таким образом, не имеет отношения к группе Лоренца.

Лагранжиан, описывающий данную модель, имеет следующий вид:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^s i \gamma^\mu D_\mu \psi^s + \frac{G}{2N} (\bar{\psi}^s \psi^s)^2 + \mu \bar{\psi}^s \gamma^0 \psi^s + \frac{\sigma_s}{2} g \mu_B B \bar{\psi}^s \gamma^0 \psi^s, \quad (5.4)$$

γ -матрицы выбраны в виде:

$$\gamma^0 = \sigma^3, \quad \gamma^1 = i\sigma^1, \quad \gamma^2 = i\sigma^2. \quad (5.5)$$

В этой главе мы будем работать в неприводимом представлении. Обобщение на приводимое представление очевидно. У ψ опущен флейворный индекс, пробегающий значения от 1 до N .

Спиновый индекс s пробегает значения 1 и 2.

Взаимодействие поля B со спином введено, как и в предыдущей главе, посредством последнего члена в лагранжиане, где $\sigma_{1,2} = \pm 1$, μ_B - магнитный момент и B - магнитное поле.

μ - химический потенциал, G - константа связи, ковариантная производная $D_\mu : D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$.

Векторный потенциал A_μ имеет компоненты: $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = const$. Так как одно измерение является компактным, необходимо наложить граничные условия. На ψ наложены следующие граничные условия:

$$\psi(x^0, x^1, x^2 + L) = e^{2\pi i \alpha} \psi(x^0, x^1, x^2). \quad (5.6)$$

Модель имеет $U(N)$ флейворную симметрию.

Также лагранжиан инвариантен относительно дискретного кирального преобразования, которое имеет вид:

$$\psi'_L(x_0, x_1, x_2) = \pm \psi_L(x_0, x_1, -x_2), \quad \bar{\psi}'_L(x_0, x_1, x_2) = \pm \bar{\psi}_L(x_0, x_1, -x_2), \quad (5.7)$$

$$\bar{\psi}'_R(x_0, x_1, x_2) = \mp \bar{\psi}_R(x_0, x_1, -x_2), \quad \psi'_R(x_0, x_1, x_2) = \mp \psi_R(x_0, x_1, -x_2),$$

где $\psi_{R,L}(x) = \frac{1 \pm i\gamma^2}{2} \psi(x)$, $\bar{\psi}_{R,L}(x) = \bar{\psi}(x) \frac{1 \mp i\gamma^2}{2}$.

Можно, конечно, работать в приводимом представлении и определить киральную симметрию, используя γ_5 -матрицу, но, как мы уже отмечали, по сути это ничего не меняет, только лишь введет дополнительные степени свободы и при небольшом изменении определения g приведет к удвоению термодинамического потенциала. Определить же дискретную киральную симметрию с помощью γ_5 -матрицы в неприводимом представлении невозможно,

так как нет γ_5 -матрицы. Видно, что член с химическим потенциалом входит таким же образом, как и член, описывающий взаимодействие магнитного поля со спином, поэтому их можно объединить и записать лагранжиан в виде:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^s i\gamma^0 \partial_0 \psi^s + \bar{\psi}^s i\gamma^1 \partial_1 \psi^s + \bar{\psi}^s i\gamma^2 (\partial_2 - ieA_2) \psi^s + \frac{G}{2N} (\bar{\psi}^s \psi^s)^2 + \mu_s \bar{\psi}^s \gamma^0 \psi^s, \quad (5.8)$$

где мы ввели два химических потенциала, которые соответствуют частицам с направлением спина вверх и с направлением спина вниз $\mu_{\uparrow\downarrow} = \mu \pm \nu$, $\nu = \frac{1}{2}g\mu_B B$.

Введем вспомогательное скалярное поле $\sigma(x)$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^s i\gamma^0 \partial_0 \psi^s + \bar{\psi}^s i\gamma^1 \partial_1 \psi^s + \bar{\psi}^s i\gamma^2 (\partial_2 - ieA_2) \psi^s - \bar{\psi}^s \sigma \psi^s - \frac{N}{2G} \sigma^2 + \mu_s \bar{\psi}^s \gamma^0 \psi^s. \quad (5.9)$$

Лагранжиан (5.9) эквивалентен лагранжиану (5.8), в чем можно убедиться, используя уравнение движение для скалярного поля σ , которое имеет вид

$$\sigma = -\frac{N}{G} \bar{\psi}^s \psi^s.$$

Вычислим эффективное действие, взяв функциональный интеграл по фермионным полям. В итоге получим эффективное действие в $\frac{1}{N}$ -разложении (опустив функциональное интегрирование по скалярному полю).

$$\mathcal{S}_{\text{eff}} = -i \ln \int D[\bar{\psi}(x)] D[\psi(x)] e^{i \int d^3x (\bar{\psi} (i\gamma^0 (\partial_0 + \mu_s) + i\gamma^1 \partial_1 + i\gamma^2 (\partial_2 - ieA_2) - \sigma) \psi - \frac{N}{2G} \sigma^2)} = \quad (5.10)$$

$$= - \int d^3x \frac{N}{2G} \sigma^2 - i \ln \det (i\gamma^0 (\partial_0 + \mu_s) + i\gamma^1 \partial_1 + i\gamma^2 (\partial_2 - ieA_2) - \sigma). \quad (5.11)$$

Введем термодинамический потенциал $\Omega = -\frac{\mathcal{S}_{\text{eff}}}{\int d^3x}$.

Вычисляя детерминант по спинорным индексам и пользуясь формулой $\ln \det = \text{tr} \ln$, получим

$$\Omega = \frac{N}{2G} \sigma^2 + i \frac{N}{L} \sum_{s=1,2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln \left((p_0 + \mu_s)^2 - p_1^2 - \left(\frac{2\pi}{L} (n + \alpha) - eA_2 \right)^2 - \sigma^2 \right). \quad (5.12)$$

Введем величину ϕ , фазу Ааронова-Бома: $\phi = \frac{eLA_2}{2\pi} = \frac{e\pi L^2 B}{8\pi}$.

В слагаемом $\left(\frac{2\pi}{L} (n + \alpha) - eA_2 \right) = \frac{2\pi}{L} (n + \alpha - \frac{eLA_2}{2\pi}) = \frac{2\pi}{L} (n + \alpha - \phi)$ будем обозначать $\alpha - \phi$ как α , предполагая, что в α вносит вклад как фаза экспоненты в граничных условиях, так и фаза Ааронова-Бома.

Сделаем виков поворот $p_0 \rightarrow -ip_0$, получим

$$\Omega = \frac{N}{2G} \sigma^2 - \frac{N}{L} \sum_{s=1,2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln \left((p_0 - i\mu_s)^2 + p_1^2 + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (n + \alpha)^2 + \sigma^2 \right). \quad (5.13)$$

Рассмотрим нашу модель при конечной температуре, для этого воспользуемся правилом:

$$\int \frac{dp_0}{2\pi} f(p_0) \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(p_{0l}), \quad \text{где } p_{0l} = \frac{2\pi}{\beta} \left(l + \frac{1}{2} \right), \frac{1}{\beta} = T. \quad (5.14)$$

В итоге для термодинамического потенциала получим выражение:

$$\Omega = \frac{N}{2G}\sigma^2 - \frac{N}{\beta L} \sum_s \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp_1}{2\pi} \ln\left(\left(\frac{2\pi}{\beta}\left(l + \frac{1}{2}\right) - i\mu_s\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2(n + \alpha)^2 + p_1^2 + \sigma^2\right). \quad (5.15)$$

5.3 Расчет термодинамического потенциала модели

Далее для простоты положим $\mu = 0$, так как в этом случае ν играет ту же роль, что и μ . Если мы хотим получить выражение для ненулевых как μ , так и ν , то необходимо разделить вклад, вносимый химическим потенциалом, на две части, поставив перед суммой $\frac{1}{2}$, далее в первой части вместо химического потенциала написать $\mu + \nu$, а во второй вместо химического потенциала написать $\mu - \nu$.

Также перепишем \ln в более удобном виде, воспользовавшись тем, что независимые от σ слагаемые можно опустить,

$$\Omega = \frac{N}{2G}\sigma^2 - \frac{2N}{\beta L} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp_1}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{\sigma^2}{\left(\frac{2\pi}{\beta}\left(l + \frac{1}{2}\right) - i\nu\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2(n + \alpha)^2 + p_1^2}\right). \quad (5.16)$$

Просуммируем по l , воспользовавшись формулой (7.4) из Приложения 7.1,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{b^2}{a^2 + (n + \alpha)^2}\right) = \\ & = \int d\tau \ln\left(1 + \frac{b^2}{a^2 + \tau^2}\right) + \ln \frac{1 - 2\cos(2\pi\alpha)e^{-2\pi\sqrt{a^2+b^2}} + e^{-4\pi\sqrt{a^2+b^2}}}{1 - 2\cos(2\pi\alpha)e^{-2\pi\sqrt{a^2}} + e^{-4\pi\sqrt{a^2}}}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

В итоге для термодинамического потенциала получим следующее выражение

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_L + \Omega_{\mu T}, \quad (5.18)$$

где

$$\Omega_0 = \frac{N}{2G}\sigma^2 - 2N \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln(p^2 + \sigma^2) = \frac{N}{\pi} \left(\frac{\sigma^3}{3} - \frac{\sigma^2\sigma_0}{2}\right)$$

- термодинамический потенциал модели Гросса-Неве без внешних условий,

$$\Omega_L = -\frac{2N}{L} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln \frac{1 - 2\cos(2\pi\alpha)e^{-L\sqrt{p^2+\sigma^2}} + e^{-2L\sqrt{p^2+\sigma^2}}}{1 - 2\cos(2\pi\alpha)e^{-L\sqrt{p^2}} + e^{-2L\sqrt{p^2}}}$$

- вклад в термодинамический потенциал, вносимый компактификацией, при нулевых температуре и химическом потенциале,

$$\Omega_{\mu T} = -\frac{2N}{\beta L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp_1}{2\pi} \left(\ln(1 + e^{-\beta\sqrt{p_1^2+\sigma_n^2}+\beta\nu}) + \ln(1 + e^{-\beta\sqrt{p_1^2+\sigma_n^2}-\beta\nu})\right), \quad (5.19)$$

где $\sigma_n = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2(n + \alpha)^2 + \sigma^2}$,

- вклад в термодинамический потенциал, вносимый температурой и химическим потенциалом при одном компактифицированном измерении.

Выражение (5.19) в случае не равного нулю μ можно переписать в виде

$$\Omega_{\mu T} = -\frac{N}{\beta L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp_1}{2\pi} \ln \left((1 + e^{-\beta E_s^+})(1 + e^{-\beta E_s^-})(1 + e^{-\beta E_p^+})(1 + e^{-\beta E_p^-}) \right),$$

где $E_s^\pm = E_p \pm \mu_s$ а $E_p = \sqrt{(\frac{2\pi}{L})^2(n + \alpha)^2 + p_1^2 + \sigma^2}$.

Представим выражение для Ω_L через специальные функции.

$$\begin{aligned} \Omega_L = & \frac{N}{\pi L^3} Li_3(e^{-L\sigma+2\pi i\alpha}) + \frac{N}{\pi L^3} Li_3(e^{-L\sigma-2\pi i\alpha}) + \frac{N\sigma}{\pi L^2} Li_2(e^{-L\sigma+2\pi i\alpha}) + \\ & + \frac{N\sigma}{\pi L^2} Li_2(e^{-L\sigma-2\pi i\alpha}) - \frac{N}{\pi L^3} Li_3(e^{2\pi i\alpha}) - \frac{N}{\pi L^3} Li_3(e^{-2\pi i\alpha}), \end{aligned} \quad (5.20)$$

где $Li_\nu(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\nu}$.

Возьмем производную Ω по σ .

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{d\sigma} = & \frac{N}{\pi} \sigma \left((\sigma - \sigma_0) + \frac{1}{L} \ln(1 - 2 \cos(2\pi\alpha)e^{-L\sigma} + e^{-2L\sigma}) \right) + \\ & + \frac{2N\sigma}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp_1}{2\pi} \left(\frac{1}{1 + e^{(\beta\sqrt{p_1^2 + \sigma_n^2} - \beta\nu)}} + \frac{1}{1 + e^{(\beta\sqrt{p_1^2 + \sigma_n^2} + \beta\nu)}} \right) \frac{1}{\sqrt{p_1^2 + \sigma_n^2}}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Видим, что $\sigma = 0$ является решением этого уравнения. Также видно, что при $\sigma \rightarrow \infty$, $\Omega \rightarrow \infty$, поэтому, если в нуле достигается максимум термодинамического потенциала, то минимум термодинамического потенциала достигается при значениях $\sigma \neq 0$. Если в нуле достигается минимум термодинамического потенциала, то в отсутствие других минимумов это и есть минимум термодинамического потенциала. Если же есть другие минимумы, то нужно сравнить значения термодинамического потенциала в них, для того чтобы найти глобальный минимум. Оказывается, что в случае нулевого химического потенциала $\mu = 0$ и в отсутствие зеемановского взаимодействия $\nu = 0$ не существует других минимумов и для определения минимума термодинамического потенциала достаточно использовать вторую производную термодинамического потенциала в точке $\sigma = 0$. Вычислим вторую производную в точке $\sigma = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Omega}{d\sigma^2} \Big|_{\sigma=0} = & \frac{N}{\pi} \left(-\sigma_0 + \frac{1}{L} \ln(2 - 2 \cos(2\pi\alpha)) \right) + \\ & + \frac{N}{\pi L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp_1}{\sqrt{p_1^2 + (\sigma_n^0)^2}} \left(\frac{1}{1 + e^{(\beta\sqrt{p_1^2 + (\sigma_n^0)^2} - \beta\nu)}} + \frac{1}{1 + e^{(\beta\sqrt{p_1^2 + (\sigma_n^0)^2} + \beta\nu)}} \right), \end{aligned} \quad (5.22)$$

где $\sigma_n^0 = \sigma_n |_{\sigma=0}$.

В случае, когда α стремится к целому числу, то есть $\alpha = n + \varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, первый член ведет себя как $\frac{N}{\pi L} \ln(\varepsilon^2)$.

Исследуя поведение других членов, получим, что расходящаяся часть второй производной термодинамического потенциала в точке $\sigma = 0$ равна 0:

$$\frac{d^2\Omega}{d\sigma^2} \Big|_{\sigma=0}^{div} = \frac{N}{\pi L} \ln(\varepsilon^2) - \frac{N}{\pi L} \ln(\varepsilon^2) = 0.$$

Рассмотрим случай $T = 0$, то есть $\beta \rightarrow \infty$.

Вторая производная в точке $\sigma = 0$.

$$\left. \frac{d^2\Omega}{d\sigma^2} \right|_{\sigma=0} = \frac{N}{\pi} \left(-\sigma_0 + \frac{\ln(2 - 2\cos(2\pi\alpha))}{L} \right) + \frac{2N}{\pi L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta(\mu_n - 1) \ln \left(\mu_n + \sqrt{\mu_n^2 - 1} \right), \quad (5.23)$$

где $\mu_n = \frac{\nu}{\frac{2\pi}{L}|n+\alpha|}$.

Рассмотрим случай отсутствия взаимодействия магнитного поля со спином при нулевой температуре $T = 0, \nu = 0$. В этом случае

$$\frac{d\Omega}{d\sigma} = \frac{N}{\pi} \sigma \left(\sigma - \sigma_0 + \frac{1}{L} \ln(1 - 2\cos(2\pi\alpha)e^{-L\sigma} + e^{-2L\sigma}) \right) = 0. \quad (5.24)$$

В этом случае можно явно выразить σ :

$$\sigma = \frac{1}{L} \operatorname{arcsch} \left(\frac{e^{L\sigma_0} + 2\cos(2\pi\alpha)}{2} \right). \quad (5.25)$$

Такое же выражение было получено в работах [5], [6], [7].

В случае $B = 0$ при $\frac{1}{6} < \alpha < \frac{5}{6}$ существует область $L < L_c$, где киральная симметрия восстанавливается, где L_c - критический радиус компактификации:

$$L_c = \frac{1}{\sigma_0} \ln(2 - 2\cos(2\pi\alpha)). \quad (5.26)$$

А в случае остальных α киральная симметрия нарушена при любых L . То есть, отсюда видно, что при $\alpha = 0$ киральная симметрия нарушена при любых L , а в случае $\alpha = \frac{1}{2}$ при $L < L_c = \frac{2\ln 2}{\sigma_0}$ киральная симметрия восстанавливается.

Перепишем выражение для термодинамического потенциала $\Omega_{\mu T}$ через специальные функции. Воспользуемся формулой, которую можно найти в ([114]),

$$\int_a^{\infty} x^{n+1} (x^2 - a^2)^{\beta-1} e^{-px} dx = (-1)^n \frac{(2a)^{\beta+\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi}} \Gamma(\beta) \frac{\partial^n}{\partial p^n} [p^{\frac{1}{2}-\beta} K_{\beta+\frac{1}{2}}(ap)]. \quad (5.27)$$

В итоге получаем для $\Omega_{\mu T}$

$$\begin{aligned} \Omega_{\mu T} = & -\frac{2N}{\pi\beta L} \sum_{\sigma_n < \nu} \int \frac{dp_1}{2\pi} \ln \left(1 + e^{-\beta\sqrt{p_1^2 + \sigma_n^2 + \beta\nu}} \right) + \\ & + \frac{2N}{\pi\beta L} \sum_{\sigma_n > \nu} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\sigma_n}{m} K_1(\beta\sigma_n m) e^{\beta\nu m} + \frac{2N}{\pi\beta L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\sigma_n}{m} K_1(\beta\sigma_n m) e^{-\beta\nu m}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

5.4 Термодинамический потенциал, для которого $\left. \frac{d^2\Omega}{d\sigma^2} \right|_{\sigma=0}$ явно конечна при любых значениях α

В этом разделе получим выражение для термодинамического потенциала, для которого вторая производная в точке $\sigma = 0$ явно конечна при любых значениях α .

Вернемся к выражению (5.15). Теперь сначала возьмем сумму по n . Воспользовавшись формулой из Приложения 7.1, получим

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_{\beta\mu 0} + \Omega_{L\beta\mu}, \quad (5.29)$$

$$\Omega_{\beta\mu 0} = -\frac{2N}{\beta} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln \left(\frac{1 + 2\text{ch}(\beta\nu) e^{-\beta\sqrt{p^2+\sigma^2}} + e^{-2\beta\sqrt{p^2+\sigma^2}}}{1 + 2\text{ch}(\beta\nu) e^{-\beta\sqrt{p^2}} + e^{-2\beta\sqrt{p^2}}} \right)$$

- вклад в термодинамический потенциал при ненулевых T и μ без учета компактификации,

$$\Omega_{L\beta\mu} = -\frac{2N}{\beta L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{2\pi} \ln \left(1 - 2\cos(2\pi\alpha) e^{-L\sqrt{p_1^2+\sigma_l^2}} + e^{-2L\sqrt{p_1^2+\sigma_l^2}} \right)$$

- вклад в термодинамический потенциал компактификации при ненулевых T и μ , где $\sigma_l = \sqrt{(\frac{2\pi}{\beta}(l + \frac{1}{2}) - i\nu)^2 + \sigma^2}$.

После несложных преобразований выражение для термодинамического потенциала можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Omega(\sigma) = & \frac{N}{\pi} \left(\frac{\sigma^3}{3} - \frac{\sigma^2\sigma_0}{2} \right) + \sum_{\pm} \frac{N}{\pi\beta^3} \text{Li}_3(-e^{-\beta\sigma\pm\beta\nu}) + \sum_{\pm} \frac{N\sigma}{\pi\beta^2} \text{Li}_2(-e^{-\beta\sigma\pm\beta\nu}) + \\ & + \frac{4N}{\beta L} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_l}{n} K_1(L\sigma_l n) \cos(2\pi\alpha n). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Второе и третье слагаемые с выбранным знаком плюс в термодинамическом потенциале записываются в данном виде только в случае $\sigma > \nu$. Вычислим производную термодинамического потенциала по σ .

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{d\sigma} = & \frac{N}{\pi} \sigma \left((\sigma - \sigma_0) + \frac{1}{\beta} \ln(1 + 2\text{ch}(\beta\nu)e^{-\beta\sigma} + e^{-2\beta\sigma}) \right) - \\ & - \frac{4N\sigma}{\beta} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} K_0(L\sigma_l n) \cos(2\pi\alpha n). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Вычислим вторую производную в точке $\sigma = 0$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2\Omega}{d\sigma^2} \right|_{\sigma=0} = & \frac{N}{\pi} \left(-\sigma_0 + \frac{1}{\beta} \ln(2 + 2\text{ch}(\beta\nu)) \right) - \\ & - \frac{4N}{\beta} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (K_0(L\sigma_l^{+0}n) + K_0(L\sigma_l^{-0}n)) \cos(2\pi\alpha n), \end{aligned} \quad (5.32)$$

где

$$\sigma_l^{\pm} = \sqrt{(\frac{2\pi}{\beta}(l + \frac{1}{2}) \pm i\nu)^2 + \sigma^2}, \quad \sigma_l^{\pm 0} = \sigma_l^{\pm} |_{\sigma=0}. \quad (5.33)$$

Рассмотрим предел $L \rightarrow \infty$ (этот случай был рассмотрен в работе [9]). Видим, что в выражении для первой производной термодинамического потенциала (5.31) последний член стремиться в нулю как $O(\frac{1}{L}e^{-L})$. Следовательно, получаем

$$\frac{d\Omega}{d\sigma} = \frac{N}{\pi} \sigma \left((\sigma - \sigma_0) + \frac{1}{\beta} \ln(1 + 2\text{ch}(\beta\nu)e^{-\beta\sigma} + e^{-2\beta\sigma}) \right).$$

Отсюда легко получить выражение для σ

$$\sigma = \frac{1}{\beta} \operatorname{arcsch} \left(\frac{e^{\beta\sigma_0} - 2 \operatorname{ch}(\beta\nu)}{2} \right).$$

В случае $\nu < 1$ (ν нормирована на σ_0 , т.е. $\nu < \sigma_0$) существует β_c , такое что при $\beta < \beta_c$ киральная симметрия восстановлена.

Критическое значение температуры β_c можно получить из уравнения:

$$e^{\beta\sigma_0} = 2 + e^{\beta\nu} + e^{-\beta\nu}.$$

Видно, что при увеличении ν критическое значение β_c увеличивается и стремится к бесконечности при $\nu \rightarrow 1$. Начиная с $\nu = 1$ критическая температура β_c не существует, то есть киральная симметрия восстановлена для любых значений β .

5.5 Численное исследование и фазовый портрет модели

Исследование фазовой структуры системы возможно только численным исследованием термодинамического потенциала, то есть нахождением глобального минимума термодинамического потенциала.

Рассмотрим случай нулевого химического потенциала без учета зеемановского взаимодействия. В этом случае внешнее магнитное поле будет влиять на систему только посредством фазы Ааронова-Бома.

Вначале рассмотрим случай периодических граничных условий $\alpha = 0$.

В случае $B = 0$ (Рис. 5.1) видно, что при уменьшении β (то есть при увеличении температуры T) киральная симметрия восстанавливается. Причем при увеличении длины компактифицированного измерения L кривая выходит на постоянное значение $\beta = \beta_c$, $\beta_c = 2 \ln 2$, причем это значение достигается при L порядка 3.

Рассмотрим случаи с различными ненулевыми значениями магнитного поля. При увеличении B появляется бугор (Рис. 5.2), то есть в соответствующей области L симметрия восстанавливается при значениях $\beta > \beta_c$.

При достаточно больших B (примерно 220 – 226) бугор уходит на бесконечность, что соответствует графику (Рис. 5.3).

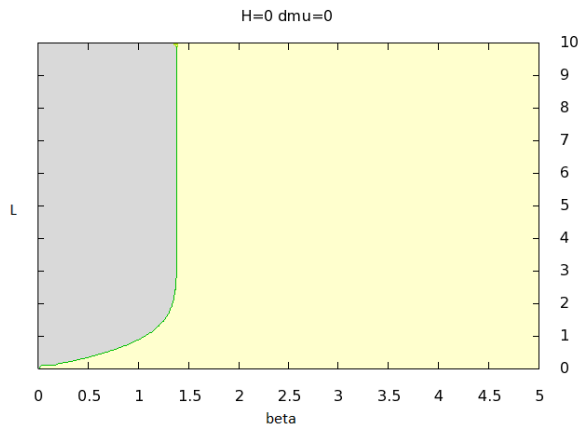
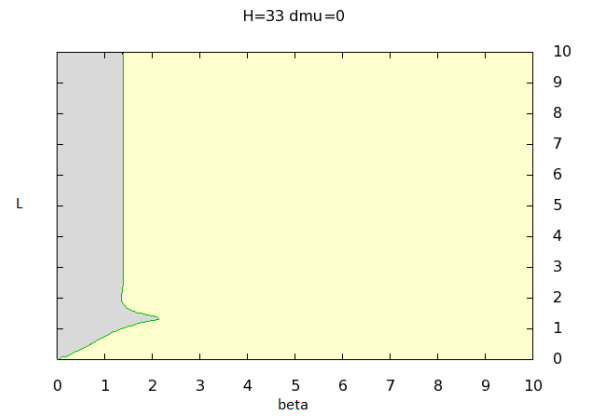
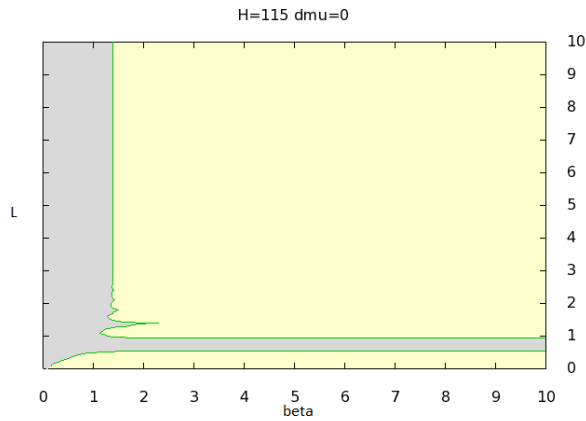
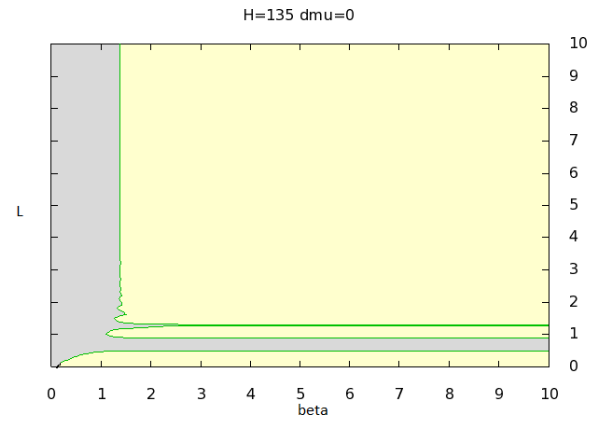
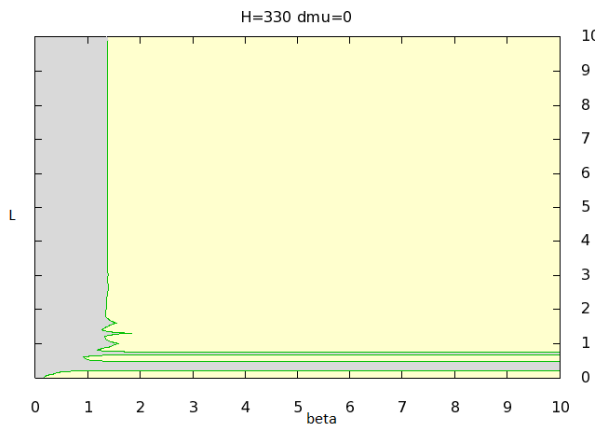
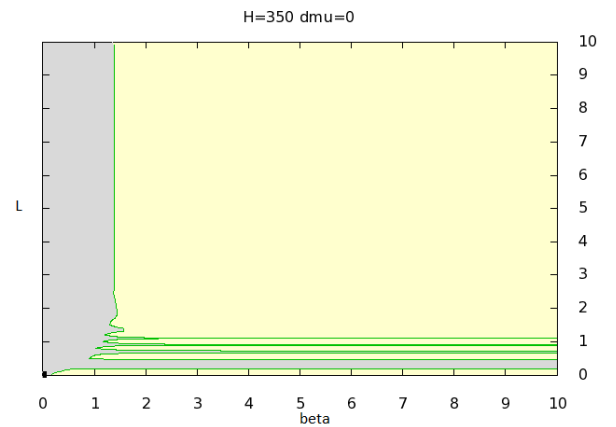
При дальнейшем увеличении B появляется еще один бугор (Рис. 5.3, 5.4), и так далее.

Видно, что при $B = 2073$ (Рис. 5.5) два бугра уходят на бесконечность (хотя на графике присутствуют несколько бугров, не уходящих на бесконечность). Это значит, что при бесконечных β при некоторых значениях L симметрия восстанавливается, затем нарушается, а затем снова восстанавливается при уменьшении L .

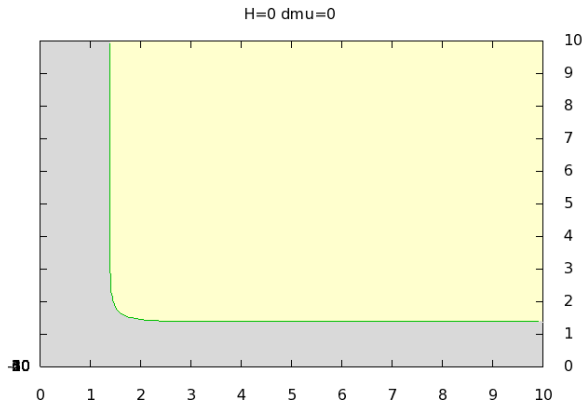
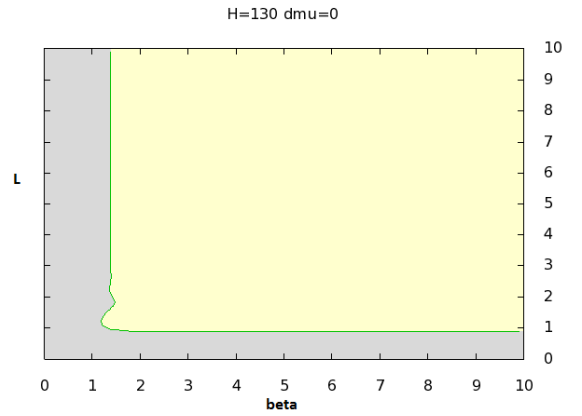
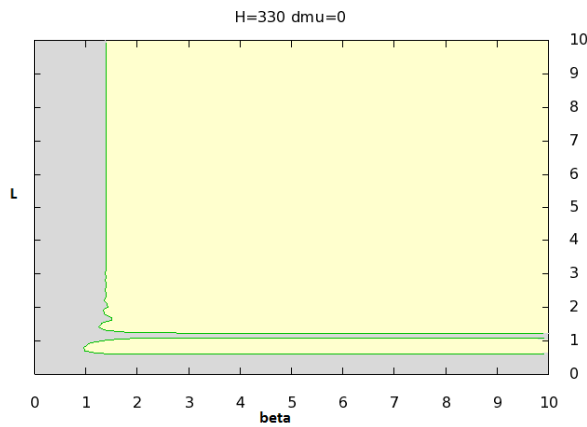
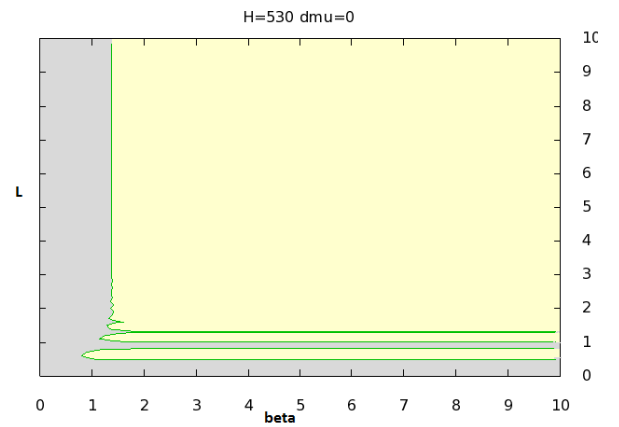
А при больших значениях B (Рис. 5.6) видно, что уже большее число бугров уходит на бесконечность. Видно, что все бугры, уходящие на бесконечность, как и в случае ($T = 0$), не выходят за значения $L > L_c$. Значит, при $L > L_c$ магнитное поле практически не оказывает никакого воздействия на кривую фазового перехода.

Рассмотрим случай антипериодических граничных условий $\alpha = \frac{1}{2}$.

В этом случае при нулевом магнитном поле фазовый портрет системы симметричен относительно замены β на L , как и должно быть согласно выражению (5.15) при $B = 0, \alpha = \frac{1}{2}$. Видим, что кривая выходит при $L \rightarrow \infty$ на β_c , а при $\beta \rightarrow \infty$ кривая выходит на L_c (Рис. 5.8).

Рисунок 5.1 — $\alpha = 0, B = 0$.Рисунок 5.2 — $\alpha = 0, B = 207$.Рисунок 5.3 — $\alpha = 0, B = 722$.Рисунок 5.4 — $\alpha = 0, B = 848$.Рисунок 5.5 — $\alpha = 0, B = 2073$.Рисунок 5.6 — $\alpha = 0, B = 2198$.

На Рис. 5.1–5.6 изображена кривая фазового перехода, отделяющая фазу $\sigma = 0$ (слева) от фазы $\sigma \neq 0$ (справа) при периодических граничных условиях ($\alpha = 0$) без учета взаимодействия магнитного поля со спином ($\nu = 0$) при различных значениях магнитного поля B .

Рисунок 5.7 — $\alpha = \frac{1}{2}, B = 0$.Рисунок 5.8 — $\alpha = \frac{1}{2}, B = 816$.Рисунок 5.9 — $\alpha = \frac{1}{2}, B = 2072$.Рисунок 5.10 — $\alpha = \frac{1}{2}, B = 3328$.

На Рис. 5.7–5.10 изображена кривая фазового перехода, отделяющая фазу $\sigma = 0$ (слева) от фазы $\sigma \neq 0$ (справа) при антипериодических граничных условиях ($\alpha = \frac{1}{2}$) без учета взаимодействия магнитного поля со спином ($\nu = 0$) при различных значениях магнитного поля B .

Если магнитное поле отлично от нуля $B \neq 0$, то при увеличении B , для того чтобы восстановить киральную симметрию, нужно уменьшить длину компактифицированного измерения L до меньших значений, нежели в случае $B = 0$ (Рис. 5.7, 5.8). При достаточно больших магнитных полях при больших значениях β ($\beta > \beta_c$) появляются области L , в которых симметрия восстанавливается, затем при уменьшении L она нарушается и затем снова восстанавливается, как это было в случае периодических граничных условий. Значения L , при которых симметрия окончательно восстанавливается, уменьшаются при увеличении магнитного поля, а областей, где симметрия поочередно нарушается и восстанавливается, становится больше (Рис. 5.9, 5.10).

Сравнивая фазовый портрет при нулевом магнитном поле (Рис. 5.7) и при ненулевом магнитном поле (Рис. 5.9, 5.10), видим, что магнитное поле может нарушать киральную симметрию в области $L < L_c$.

Рассмотрим случай конечной температуры и ненулевого химического потенциала. На Рис. 5.11 представлен фазовый портрет модели в терминах (μ, T) при конечном значении радиуса компактификации L в случае периодических граничных условий. Видно, что фазовый портрет похож на фазовый портрет соответствующей (1+1)-мерной модели Гросса-Неве (см.

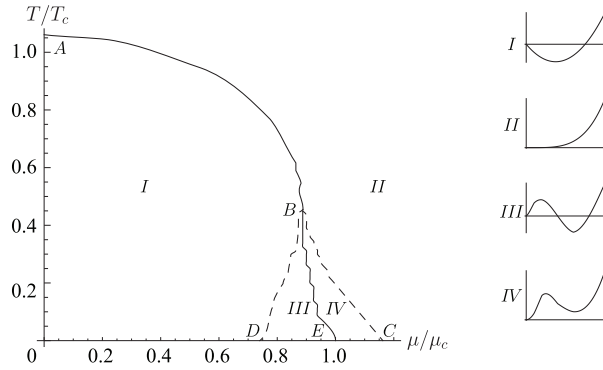


Рисунок 5.11 — Фазовый портрет в терминах (μ, T) для $(2+1)$ -мерной модели Гросса-Неве при $L = 1.2L_c$.

Рис. 1.2), как можно было и ожидать. При увеличении как температуры, так и химического потенциала в системе восстанавливается киральная симметрия.

5.6 Расчет термодинамического потенциала с использованием метода ζ -регуляризации

Здесь мы получим выражение для термодинамического потенциала в случае пространства $R^1 \times S^1 \times S^1$ (вторая S^1 подразумевает, что модель рассматривается при ненулевой температуре), при произвольных граничных условиях для спинорного поля ψ , то есть произвольных α . Это эквивалентно тому, что имеется магнитное поле B , но не учитывается взаимодействие магнитного поля со спином $\nu = 0$, при нулевом химическом потенциале $\mu = 0$. Используем метод ζ -регуляризации [118]. Данный метод был использован в работе [8] для исследования влияния компактификации и ненулевой температуры на нарушение киральной симметрии в двумерной модели Гросса-Неве в случае $\alpha = 0, \alpha = \frac{1}{2}$. Также в этой работе этот метод был сформулирован для пространств $R^d \times S^1 \times S^1$ с произвольными d .

Здесь этот метод был обобщен для случая произвольных α и получено уравнение фазовой кривой.

Сначала мы получим асимптотику термодинамического потенциала в точке $\sigma = 0$ до членов второго порядка по σ , что даст нам возможность определить вторую производную термодинамического потенциала в точке $\sigma = 0$ и выяснить, является ли точка $\sigma = 0$ локальным максимумом или минимумом. В случае $\nu = 0$ термодинамический потенциал всегда имеет только один минимум, поэтому знание асимптотики в нуле дает возможность определить, находится ли минимум термодинамического потенциала в точке $\sigma = 0$ или в некоторой точке, отличной от нуля, то есть является ли киральная симметрия нарушенной или нет. Затем, используя метод ζ -регуляризации, мы получим выражение для термодинамического потенциала в двух видах. Эти выражения совпадают с уже полученными с помощью обрезаия по импульсу выражениями.

Сначала получим асимптотику термодинамического потенциала в точке $\sigma = 0$. Вернемся к выражению (5.15). Для простоты положим $\mu = 0$

$$\Omega = \frac{N}{2G}\sigma^2 - \frac{N}{\beta L} \sum_{s=1,2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{2\pi} \ln \left(\left(\frac{2\pi}{\beta} \left(l + \frac{1}{2} \right) - i\nu \right)^2 + \right) \quad (5.34)$$

$$+ \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (n + \alpha)^2 + p_1^2 + \sigma^2 \Big).$$

Пользуясь соотношением $\ln a = -(a^{-s})'|_{s=0}$, получим

$$\Omega = \frac{N}{2G} \sigma^2 + \tilde{\Omega}'(s)|_{s=0}, \quad (5.35)$$

где

$$\tilde{\Omega}(s) = \frac{2N}{\beta L} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp_1}{2\pi} \left(\frac{(\frac{2\pi}{\beta}(l + \frac{1}{2}) - i\nu)^2 + (\frac{2\pi}{L})^2(n + \alpha)^2 + p_1^2 + \sigma^2}{\mu^2} \right)^{-s} \quad (5.36)$$

и μ -размерный параметр с размерностью массы.

Воспользуемся формулой

$$a^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-at}$$

и в случае $\left(\frac{\pi}{\beta}\right)^2 + \sigma^2 > \nu^2$ получим

$$\tilde{\Omega}(s) = \frac{N}{\beta L} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{2\pi} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-((\frac{2\pi}{\beta}(l+\frac{1}{2})-i\nu)^2 + (\frac{2\pi}{L})^2(n+\alpha)^2 + p_1^2 + \sigma^2) \frac{t}{\mu^2}}.$$

Вычисляя гауссов интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{2\pi} e^{-p_1^2 t} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}$, получим

$$\tilde{\Omega}(s) = \frac{N}{\beta L} \mu^{2s} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-\frac{3}{2}} e^{-\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2 \left(l+\frac{1}{2}\right)^2 t - \frac{i\beta\nu}{2\pi} 2t} e^{-\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 (n+\alpha)^2 t} e^{-\sigma^2 t}.$$

Воспользуемся формулой пересуммирования Пуассона

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-a(n+b)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{a}} \cos(2\pi bn) \quad (5.37)$$

и преобразуем суммы от экспонент следующим образом

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 (n+\alpha)^2 t} = \frac{L}{2\sqrt{\pi t}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{L^2 n^2}{4t}} \cos(2\pi \alpha n) \right)$$

и

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2 \left(l+\frac{1}{2}\right)^2 t - \frac{i\beta\nu}{2\pi} 2t} = \frac{\beta}{2\sqrt{\pi t}} \left(1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta^2 l^2}{4t}} (-1)^l \operatorname{ch}(\beta\nu l) \right).$$

В итоге для $\tilde{\Omega}(s)$ получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}(s) &= \frac{N}{\sqrt{\pi} \beta L} \frac{1}{\Gamma(s)} \mu^{2s} \int_0^{\infty} dt t^{s-\frac{3}{2}} \times \\ &\times \frac{L}{2\sqrt{\pi t}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{L^2 n^2}{4t}} \cos(2\pi \alpha n) \right) \frac{\beta}{2\sqrt{\pi t}} \left(1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta^2 l^2}{4t}} (-1)^l \operatorname{ch}(\beta\nu l) \right) e^{-\sigma^2 t}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Обобщение на случай $\nu \neq 0$ произвести не удастся, поэтому в дальнейшем будем считать, что $\nu = 0$, и получим:

$$\tilde{\Omega}(s) = \frac{N}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{\mu^{2s}}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{\frac{5}{2}-s}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{L^2 n^2}{4t}} \cos(2\pi\alpha n) \right) \left(1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta^2 l^2}{4t}} (-1)^l \right) e^{-\sigma^2 t} \quad (5.39)$$

Имеет место следующая формула

$$e^{-A} = \frac{1}{2\pi i} \int_{Re(z)=c>0} dz \Gamma(z) A^{-z},$$

где интегрирование ведется по контуру $Re(z) = c > 0$. Далее будем считать, что интегрирование ведется по контуру $Re(z) = c > \frac{3}{2}$.

С помощью этой формулы представим экспоненты в виде контурного интеграла и после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}(s) &= \frac{N\sigma^3}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{2s} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} + \\ &+ \frac{N\sigma^3}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^{2s} \frac{1}{2\pi i} \int dz \Gamma(z) \Gamma\left(z + s - \frac{3}{2}\right) \sum_{(l,n) \neq (0,0)} \frac{(-1)^l \cos(2\pi\alpha n)}{(\beta^2 l^2 + L^2 n^2)^z} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{-2z}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Чтобы посчитать Ω , нужно взять производную по s в точке $s = 0$. В обоих слагаемых ненулевой вклад дает только дифференцирование Γ -функции, стоящей в знаменателе. У нас здесь возникнет следующая функция

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\Gamma(s)} \right) \Big|_{s=0} &= - \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma^2(s)} \Big|_{s=0} = - \frac{\psi(s)}{\Gamma(s)} \Big|_{s=0} = 1, \\ \psi(s) &= \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}. \end{aligned}$$

ψ имеет полюсы 1-го порядка в точках $s = -1, -2, -3, \dots$.

$Res_{s=0}(\psi(s)) = -1$, так как $\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}$.

В итоге первое слагаемое в выражении (5.40) вместе с первым слагаемым формулы (5.35) дадут следующий вклад в термодинамический потенциал:

$$\frac{N}{2G_r} \sigma^2 + \frac{N\sigma^3}{3\pi},$$

где G_r - перенормированная константа связи, индекс r мы поставили после ζ -регуляризации выражения для термодинамического потенциала. По сути она осталась неизменной и равна константе связи G .

Введя обозначение $\frac{1}{G_r} = -\frac{\sigma_0}{\pi}$, видим, что выражение для термодинамического потенциала в случае $L = \infty, \beta = \infty, \mu = 0, \nu = 0, B = 0$ совпадает с выражением (1.48), если вычисления проводить, используя обрезание по импульсу, как это делалось во всех предыдущих разделах.

Введем функцию Z

$$Z(a, b, \alpha, s) = \sum_{(l,n) \neq (0,0)} \frac{\cos(2\pi\alpha n)}{(a^2 l^2 + b^2 n^2)^s},$$

которая в случае $\alpha = 0$ сводится к Z -функции Эпштейна

$$Z(a, b, s) = \sum_{(n, m) \neq (0, 0)} \frac{1}{(a^2 n^2 + b^2 m^2)^s}.$$

Выпишем соотношения, с помощью которых сумма, стоящая в выражении для Ω , сводится к введенным Z -функциям.

$$\sum_{(n, m) \neq (0, 0)} \frac{(-1)^n}{(a^2 n^2 + b^2 m^2)^s} = 2Z(2a, b, s) - Z(a, b, s), \quad (5.41)$$

ф

$$\sum_{(n, m) \neq (0, 0)} \frac{(-1)^{n+m}}{(a^2 n^2 + b^2 m^2)^s} = Z(a, b, s) - 2Z(2a, b, s) - 2Z(a, 2b, s) + 4Z(2a, 2b, s), \quad (5.42)$$

$$\sum_{(l, n) \neq (0, 0)} \frac{(-1)^l \cos(2\pi \alpha n)}{(a^2 l^2 + b^2 n^2)^s} = 2Z(2a, b, \alpha, s) - Z(a, b, \alpha, s). \quad (5.43)$$

Интеграл в выражении (5.40) для Ω в случае $\alpha = 0$ с помощью формулы (5.41), а в случае $\alpha = \frac{1}{2}$ с помощью формулы (5.42), сводится к интегралу вида

$$I = \frac{N\sigma^3}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{2\pi i} \int dz \Gamma(z) \Gamma\left(z - \frac{3}{2}\right) Z(\beta, L, z) \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{-2z}.$$

Можно показать, что функция $\Gamma(z)Z(\beta, L, z)\Gamma\left(z - \frac{3}{2}\right)$ имеет полюсы в точках $z = \frac{3}{2} - n, n = 0, 1, \dots$ за счет $\Gamma\left(z - \frac{3}{2}\right)$ и в точках $z = 0, z = 1$ за счет $\Gamma(z)Z(\beta, L, z)$

Полюс в точке $z = \frac{3}{2}$ дает результат, не зависящий от σ , его можно опустить. Полюс в точке $z = 1$ дает слагаемое, пропорциональное σ . Полюс в точке $z = \frac{1}{2}$ дает слагаемое, пропорциональное σ^2 . Дальнейшие полюсы дают слагаемые, пропорциональные более высоким степеням σ .

Используя соотношение $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$ и соотношение из Приложения 7.13, получим

$$Z(\beta, L, \frac{1}{2}) = \frac{8}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} K_1\left(2\pi \frac{L}{\beta} nm\right) \cos(2\pi \alpha m).$$

Итого

$$I = -\frac{N}{2} \frac{1}{\beta L} \sigma - \frac{2N\sigma^2}{\pi\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} K_1\left(2\pi \frac{L}{\beta} nm\right) \cos(2\pi \alpha m) + O(\sigma^3).$$

Первое слагаемое не дает вклада в термодинамический потенциал (это можно увидеть из формул (5.41), (5.42)). Значит, Ω в случае $\alpha = 0$ принимает вид

$$\Omega = \frac{N}{\pi} \left(\frac{\sigma^3}{3} - \frac{\sigma^2 \sigma_0}{2}\right) + \frac{2N\sigma^2}{\pi\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (K_1(2\pi \frac{L}{\beta} nm) - K_1(\pi \frac{L}{\beta} nm)) + O(\sigma^3). \quad (5.44)$$

В случае $\alpha = \frac{1}{2}$ Ω принимает вид

$$\Omega = \frac{N}{\pi} \left(\frac{\sigma^3}{3} - \frac{\sigma^2 \sigma_0}{2}\right) + \frac{2N\sigma^2}{\pi\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (2K_1(4\pi \frac{L}{\beta} nm) - 2K_1(2\pi \frac{L}{\beta} nm)) + \quad (5.45)$$

$$+K_1\left(\pi\frac{L}{\beta}nm\right) - K_1\left(2\pi\frac{L}{\beta}nm\right) + O(\sigma^3).$$

Интеграл в выражении (5.40) для Ω в случае $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ с помощью формулы (5.43) сводится к интегралу вида

$$\frac{N\sigma^3}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{2\pi i} \int dz \Gamma(z) \Gamma\left(z - \frac{3}{2}\right) Z(\beta, L, \alpha, z) \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{-2z}.$$

Функция $\Gamma(z)\Gamma\left(z - \frac{3}{2}\right) Z(\beta, L, \alpha, z)$ имеет полюсы в точках $z = \frac{1}{2}, z = 1, z = \frac{3}{2} - n, n = 0, 1, 2, 3, \dots$ (см. Приложение 7.12).

Полюс в точке $z = \frac{3}{2}$ дает результат, не зависящий от σ , его можно опустить. Полюс в точке $z = 1$ дает слагаемое, пропорциональное σ . Полюс в точке $z = \frac{1}{2}$ дает слагаемое, пропорциональное σ^2 . Дальнейшие полюсы дают слагаемые, пропорциональные более высоким степеням σ .

Полюс $z = 1$ не дает вклада в термодинамический потенциал, что можно видеть из формулы (5.43) и формулы (7.120) из Приложения 7.13. Дает вклад только полюс $z = \frac{1}{2}$, где все три члена выражения (7.120) дают вклад. Первые два не дают вклада в термодинамический потенциал из-за (5.43), дает вклад только третье слагаемое, как и в случае $\alpha = 0$.

В итоге для термодинамического потенциала получим выражение

$$\Omega = \frac{N}{\pi} \left(\frac{\sigma^3}{3} - \frac{\sigma^2\sigma_0}{2} \right) + \frac{2N\sigma^2}{\pi\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(K_1\left(2\pi\frac{L}{\beta}nm\right) - K_1\left(\pi\frac{L}{\beta}nm\right) \right) \cos(2\pi\alpha n) + O(\sigma^3). \quad (5.46)$$

Теперь получим выражение для термодинамического потенциала в случае $\nu \neq 0$, используя метод ζ -регуляризации. Вернемся к выражению (5.39)

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}(s) = & \frac{N}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{\mu^{2s}}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-\frac{5}{2}} e^{-\sigma^2 t} + \frac{N}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{\mu^{2s}}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-\frac{5}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{L^2 n^2}{4t} - \sigma^2 t} \cos(2\pi\alpha n) + \\ & + \frac{N}{\sqrt{\pi}\beta L} \frac{1}{\Gamma(s)} \mu^{2s} \int_0^{\infty} dt t^{s-\frac{3}{2}} \times \\ & \times \frac{L}{2\sqrt{\pi t}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{L^2 n^2}{4t}} \cos(2\pi\alpha n) \right) \frac{\beta}{2\sqrt{\pi t}} 2 \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta^2 l^2}{4t}} (-1)^l \operatorname{ch}(\beta\nu l) e^{-\sigma^2 t}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

В третьем члене выражения (5.47) применим формулу пересуммирования Пуассона назад и после несложных преобразований для термодинамического потенциала получим

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{N}{\pi} \left(\frac{\sigma^3}{3} - \frac{\sigma^2\sigma_0}{2} \right) + \frac{N}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} dt t^{-\frac{5}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{L^2 n^2}{4t} - \sigma^2 t} \cos(2\pi\alpha n) + \\ & + \frac{N}{\pi L} \int_0^{\infty} dt t^{-2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta^2 l^2}{4t} - \sigma_n^2 t} (-1)^l \operatorname{ch}(\beta\nu l). \end{aligned} \quad (5.48)$$

Используя формулу $\int \frac{dx}{x^{n+\frac{1}{2}}} e^{-px-\frac{q}{x}} = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{p}} \frac{\partial^n}{\partial q^n} e^{-2\sqrt{pq}}$,

во втором слагаемом в выражении для Ω вычислим интеграл и получим

$$\frac{2N}{\pi L^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma Ln}}{n^3} \cos(2\pi\alpha n) + \frac{2N\sigma}{\pi L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma Ln}}{n^2} \cos(2\pi\alpha n).$$

Рассмотрим третье слагаемое в выражении для Ω , обозначая его буквой S .

Используя формулу [114]

$$\int_0^\infty dx x^{\alpha-1} e^{-px-\frac{q}{x}} = 2 \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{\alpha}{2}} K_\alpha(2\sqrt{pq}), \quad (5.49)$$

получим выражение для S

$$S = \frac{2N}{\pi L \beta} \sum_{\sigma_n > \nu} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{l} K_1(\beta \sigma_n l) (-1)^l e^{\beta \nu l} + \frac{2N}{\pi L \beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{l} K_1(\beta \sigma_n l) (-1)^l e^{-\beta \nu l} + \\ + \frac{N}{2\pi L} \int_0^\infty dt t^{-2} \sum_{\sigma_n < \nu} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta^2 l^2}{4t} - \sigma_n^2 t} (-1)^l e^{\beta \nu l}.$$

Видим, что при $\sigma > \nu$ это выражение совпадает с выражением (5.28).

Таким образом, выражение для термодинамического потенциала совпадает с выражением из раздела 5.3.

Теперь получим выражение для термодинамического потенциала в другом виде. Снова вернемся к формуле (5.38) и, сгруппировав члены выражение по-другому, проделаем преобразования немного другим способом

$$\tilde{\Omega}(s) = \frac{N}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{\mu^{2s}}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-\frac{5}{2}} e^{-\sigma^2 t} + \frac{N}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{\mu^{2s}}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-\frac{5}{2}} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta^2 l^2}{4t}} (-1)^l \text{ch}(\beta \nu l) + \\ + \frac{N}{\sqrt{\pi} \beta L} \frac{1}{\Gamma(s)} \mu^{2s} \int_0^\infty dt t^{s-\frac{3}{2}} \times \\ \times \frac{\beta}{2\sqrt{\pi t}} \left(1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta^2 l^2}{4t}} (-1)^l \text{ch}(\beta \nu l) \right) \frac{L}{\sqrt{\pi t}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{L^2 n^2}{4t}} \cos(2\pi \alpha n) e^{-\sigma^2 t}. \quad (5.50)$$

В третьем члене выражения (5.50) применим формулу пересуммирования Пуассона назад. Для термодинамического потенциала получим

$$\Omega = \frac{N}{\pi} \left(\frac{\sigma^3}{3} - \frac{\sigma^2 \sigma_0}{2} \right) + \frac{N}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty dt t^{-\frac{5}{2}} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta^2 l^2}{4t} - \sigma^2 t} (-1)^l \text{ch}(\beta \nu l) + \\ + \frac{N}{\pi L} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty dt t^{-2} e^{-\frac{L^2 n^2}{4t} - \sigma_l^2 t} \cos(2\pi \alpha n). \quad (5.51)$$

Преобразуем второй член в этом выражении, обозначим его S' . С помощью формулы (5.6) при $\sigma > \nu$ можно получить

$$S' = \frac{N}{\pi \beta^3} \left(Li_3(-e^{-\beta l(\sigma+\nu)}) + Li_3(-e^{-\beta l(\sigma-\nu)}) + \right. \\ \left. + \beta \sigma (Li_2(-e^{-\beta l(\sigma+\nu)}) + Li_2(-e^{-\beta l(\sigma-\nu)})) \right).$$

Видим, что это выражение совпадает со вторым и третьим членом в выражении (5.30).

В третьем члене выражения (5.51) вычислим интеграл с помощью использованной ранее формулы (5.49) и получим

$$\frac{4N\sigma}{\pi\beta L} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_l}{n} K_1(L\sigma_l n) \cos(2\pi\alpha n).$$

Видим, что это выражение для термодинамического потенциала совпадает с последним членом в выражении (5.30).

Таким образом, выражение для термодинамического потенциала совпадает с выражением из раздела 5.4.

5.7 Выводы и некоторые численные оценки

В данной работе мы изучили $(2+1)$ -мерную модель Гросса-Неве с одним компактифицированным измерением в присутствии магнитного поля при конечной температуре. Магнитное поле направлено вдоль некомпактифицированного измерения. Учитывалось взаимодействие магнитного поля со спином. Мы изучили влияние магнитного поля, температуры, химического потенциала и радиуса компактификации на нарушение дискретной киральной симметрии в данной модели.

Получены выражения для термодинамического потенциала и его производной при конечной температуре в двух видах (5.18), (5.22) и (5.30), (5.32), в одном из которых (5.22) есть два члена, расходящиеся при целочисленных значениях магнитного потока, хотя эти расходимости сокращаются, второй же вид (5.32) является явно конечным. Численные расчеты с помощью этих двух выражений дают одинаковые результаты, но при больших β удобно пользоваться первым видом, так как при больших значениях β ухудшается сходимость в выражении второго вида. В случае $B = 0$ вычисления могут быть проведены только с помощью выражения второго вида. Получено относительно простое выражение для производной термодинамического потенциала при нулевой температуре (5.23).

Результаты показывают, что увеличение температуры восстанавливает киральную симметрию.

В случае периодических граничных условий ($\alpha = 0$), если присутствует ненулевой магнитный поток, он может восстановить симметрию и при нулевой температуре. Однако, он может восстановить симметрию при небольших радиусах компактификации $L < L_c$.

В случае антипериодических граничных условий ($\alpha = \frac{1}{2}$) фазовый портрет системы является симметричным в плоскости (L, β) , то есть уменьшение радиуса компактификации, как и увеличение температуры, восстанавливает киральную симметрию системы. В этом случае при определенных условиях магнитное поле может нарушить киральную симметрию.

При любых граничных условиях при больших магнитных полях есть область L , где киральная симметрия может восстанавливаться или нарушаться несколько раз при незначительных изменениях L .

Методом ζ -регуляризации получено выражение для термодинамического потенциала и его асимптотика в нуле, из которой можно выяснить, является ли нуль локальным максимумом или минимумом.

Сделаем некоторые численные оценки.

- Видно, что магнитное поле входит в выражение для термодинамического потенциала таким образом $\frac{\Phi}{\Phi_0}$, где Φ - магнитный проток, а $\Phi_0 = \frac{2\pi}{e}$,

$$\Phi = LA_2 = \frac{L^2 B}{4\pi}.$$

Магнитный поток вносит заметный вклад, когда $\frac{\Phi}{\Phi_0} \sim 10^{-2}$.

Положим $L \sim 10^{-7}$ см.

Оценим магнитный поле для соответствующих потоков.

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{eL^2 B}{8\pi^2} = \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{L}{\lambda_c} \right)^2 \frac{B}{B_c}, \quad (5.52)$$

где $B_c = \frac{m^2}{e} \sim 10^{13}$ Гс, $\lambda_c = \frac{1}{m}$ - комптоновская длина волны.

Восстанавливая \hbar, c , перепишем $\lambda_c = \frac{\hbar}{mc} \sim 10^{-13}$ м.

Изначально в нашем лагранжиане вместо скорости света c должна стоять скорость Ферми $v_F = \frac{c}{300}$, и в дальнейших оценках нужно сделать замену $L \rightarrow v_F L$. Таким образом, оценка для поля будет $B \sim 10^3$ Гс = 0.1 Т.

- Результаты показывает, что при $\nu = 0$ симметрия может восстанавливаться только при $L\sigma_0 < 1$.

$\frac{L}{\lambda_c} \left(\frac{\sigma_0}{m} \right) < 1$, где m -масса электрона.

Далее считаем $L \sim 10^{-7}$ см. Так как в наших формулах нужно заменить $L \rightarrow v_F L$,

$$\left(\frac{v_F}{c} \right) \left(\frac{L}{\lambda_c} \right) \left(\frac{\sigma_0}{m} \right) < 1$$

.

В итоге получим оценку для σ_0 : $\frac{\sigma_0}{m} < 10^{-2}$.

Глава 6. Заключение

- Во **второй главе** рассмотрена модель типа Гросса-Неве с двумя каналами взаимодействия, киральным и сверхпроводящим, в случае $(2+1)$ -мерного пространства-времени с учетом ненулевого химического потенциала и конечной температуры. Впервые получено выражение для термодинамического потенциала и полностью рассмотрен фазовый портрет этой модели.
- Рассмотрение показало что, смешанная фаза (фаза, в которой оба конденсата, киральный и сверхпроводящий, отличны от нуля) не появляется.
- Показано, что в случае $T = 0$, $\mu \neq 0$ увеличение химического потенциала всегда приводит к сверхпроводящей фазе, вне зависимости от того, в какой фазе система находилась при $\mu = 0$: если система находилась в сверхпроводящей фазе, то с увеличением химического потенциала увеличивается сверхпроводящий конденсат; если система находилась в симметричной фазе, то ненулевой бесконечно малый химический потенциал генерирует сверхпроводящий конденсат; если система находилась в фазе с нарушенной киральной симметрией, то существует критическое значение химического потенциала, при котором происходит фазовый переход первого рода в сверхпроводящую фазу.
- Вычислены плотности числа частиц в различных фазах в случае $T = 0$. Плотность числа частиц возникает при переходе в сверхпроводящую фазу, а в фазе с нарушенной киральной симметрией плотность числа частиц равна нулю.
- Был исследован фазовый портрет модели в случае $T > 0$, $\mu \neq 0$. При фиксированном μ с увеличением температуры восстанавливается симметричная фаза. При произвольном фиксированном T , увеличение химического потенциала приводит к появлению сверхпроводящего конденсата в системе, в отличие от случая $(1+1)$ -мерного пространства-времени.
- В **третьей главе** рассмотрено влияние параллельного магнитного поля на $(2+1)$ -мерную модель типа Гросса-Неве с двумя каналами взаимодействия с учетом взаимодействия спина электронов с магнитным полем.
- Показано, что параллельное системе магнитное поле (аналогично химическому потенциалу) приводит к появлению в системе сверхпроводящего конденсата.
- В случае отличных от нуля химического потенциала и параллельного магнитного поля появляются две фазы с нарушенной киральной симметрией с нулевой и ненулевой плотностью частиц и намагниченностью.
- Сверхпроводящая фаза в модели сопровождается появлением намагниченности. Индуцированный магнитный момент системы и внешнее магнитное поле имеют одно и то же направление, то есть сверхпроводящая фаза является парамагнитной, а не диамагнитной, как в обычных сверхпроводниках.
- В **четвертой главе** впервые рассмотрено влияние произвольно направленного магнитного поля на спонтанное нарушение киральной симметрии в $(2+1)$ -мерной модели типа Гросса-Неве с учетом взаимодействия спина электронов с магнитным полем.
- При $g > 0$ существует критическая константа связи g_c такая, что при $g > g_c$ произвольное достаточно слабое внешнее магнитное поле \vec{B} индуцирует спонтанное нарушение

киральной симметрии при условии, что отклонение от вертикали \vec{B} и его модуль не слишком велики. При увеличении магнитного поля или его наклоне киральная симметрия восстанавливается. При $0 < g < g_c$ киральная симметрия не может быть нарушена внешним магнитным полем. Таким образом, эффект магнитного катализа может иметь место только при малых значениях магнитного поля.

- Показано, что имеет место эффект осцилляции намагниченности при малых значениях B_{\perp} в случае $g > 0$ и $|\vec{B}| \neq 0$.
- В случае $g < 0$ существует две фазы с нарушенной киральной симметрией, диамагнитная и парамагнитная.
- В пятой главе впервые было получено выражение для термодинамического потенциала $(2+1)$ -мерной модели Гросса-Неве с одним компактифицированным измерением под влиянием внешнего магнитного поля, направленного вдоль некомпактифицированного измерения, при конечной температуре и ненулевом химическом потенциале с учетом взаимодействия спина электронов с магнитным полем.
- В случае периодических граничных условий ($\alpha = 0$) ненулевой магнитный поток может восстановить киральную симметрию при малой температуре.

В случае антипериодических граничных условий ($\alpha = \frac{1}{2}$) фазовый портрет системы является симметричным в плоскости (L, β) , то есть уменьшение радиуса компактификации L , как и увеличение температуры, восстанавливает киральную симметрию системы. В этом случае при определенных условиях магнитный поток может нарушить киральную симметрию.

При любых граничных условиях при больших магнитных полях есть область радиусов компактифицированного измерения, где симметрия может восстанавливаться или нарушаться несколько раз при незначительных изменениях радиуса.

- Численные оценки показывают, что рассмотренные эффекты могут наблюдаться в реальных системах конденсированного состояния вещества при лабораторных значениях внешнего магнитного поля.

Благодарности

Выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, Константину Григорьевичу Клименко за предложенную интересную тематику для исследований, постоянную помощь и поддержку, тактичное руководство, умение направить на разрешение научных проблем и за огромную помощь в работе.

Также хочу поблагодарить всех коллег из отдела теоретической физики, в особенности В. А. Петрова, В.Е. Рочева, В.О. Соловьева, за ценные обсуждения и замечания.

Выражаю глубокую признательность коллегам с кафедры теоретической физики МГУ, в особенности В. Ч. Жуковскому, А.В. Борисову, П.Б. Колмакову, за плодотворные дискуссии в рамках моей научной работы.

Отдельно хочу поблагодарить начальника отдела теоретической физики В. А. Петрова за создание отличных условий для научной работы.

Список литературы

1. Y. Nambu and J. Jona-Lasinio, Phys.Rev. 122, 345 (1961)
2. D.J. Gross and A. Neveu, Phys. Rev. D **10**, 3235 (1974).
3. A. Chodos, H. Minakata, F. Cooper, A. Singh, and W. Mao, Phys. Rev. D **61**, 045011 (2000); hep-ph/0009019, hep-ph/9909296v1.
4. A.S. Vshivtsev, B.V. Magnitsky, V.C. Zhukovsky and K.G. Klimenko, Phys. Part. Nucl. **29**, 523 (1998) [Fiz. Elem. Chast. Atom. Yadra **29**, 1259 (1998)].
А. С. Вшивцев, Б.В. Магницкий, В.Ч. Жуковский, К.Г. Клименко, Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1998, том 29, вып. 5
5. D. Y. Song, Phys.Rev D v.48, n 8, 15 Oct 1993
6. A.V. Gamayun and E.V. Gorbar, arXiv:hep-ph 0411157v2, 2004
7. I. V. Krive and S. A. Naftulin, Nuclear Physics B364 (1991) 541-550, 1991
8. А.С. Вшивцев, А.Г.Кисунько, К.Г.Клименко, Д.В.Перегудов, ИФВЭ 96-58 ОТФ
9. H. Caldas and R.O. Ramos, Phys. Rev. B **80**, 115428 (2009).
10. K.G. Klimenko, Theor. Math. Phys. **89**, 1161 (1992);
V.P. Gusynin, V.A. Miransky and I.A. Shovkovy, Phys. Rev. Lett. **73**, 3499 (1994);
V.P. Gusynin, D.K. Hong and I.A. Shovkovy, Phys. Rev. D **57**, 5230 (1998).
11. K.G. Klimenko, Z. Phys. C **50**, 477 (1991); Mod. Phys. Lett. A **9**, 1767 (1994).
12. V. Schon and M. Thies, arXiv:hep-th/0008175v1 22 Aug 2000
13. Heron Caldas, Nuclear Physics B 807 [FS] (2009) 651–658
14. P. R. Wallace Phys. Rev. 71, 622 1947
15. K.G. Klimenko, Z. Phys. C **37**, 457 (1988);
16. N.D. Mermin and H. Wagner, Phys. Rev. Lett. **17**, 1133 (1966);
S. Coleman, Commun. Math. Phys. **31**, 259 (1973).
17. L. Jacobs, Phys. Rev. D **10**, 3956 (1974);
W. Dittrich and B.-G. Englert, Nucl. Phys. B **179**, 85 (1981);
K.G. Klimenko, Theor. Math. Phys. **70**, 87 (1987).
18. T. Appelquist, M.J. Bowick, D. Karabali, and L.C.R. Wijewardhana, Phys. Rev. D **33**, 3774 (1986);
K.G. Klimenko, Teor. Mat. Fiz. **95**, 42 (1993);
K.G. Klimenko, Z. Phys. C **57**, 175 (1993).
19. Leon N. Cooper Phys. Rev. 104, 1189 1956
20. J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer Phys. Rev. 106, 162 1957
21. J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer Phys. Rev. 108, 1175 1957

22. G.W. Semenoff and L.C.R. Wijewardhana, Phys. Rev. Lett. **63**, 2633 (1989).
23. G.W. Semenoff and L.C.R. Wijewardhana, Phys. Rev. D **45**, 1342 (1992).
24. B. Rosenstein, B.J. Warr and S.H. Park, Phys. Rep. **205**, 59 (1991).
25. T. Inagaki, T. Kouno and T. Muta, Int. J. Mod. Phys. A **10**, 2241 (1995).
26. S. Kanemura and H. -T. Sato, Mod. Phys. Lett. A **11**, 785 (1996).
27. T. Appelquist and M. Schwetz, Phys. Lett. B **491**, 367 (2000).
28. S.J. Hands, J.B. Kogut and C.G. Strouthos, Phys. Lett. B **515**, 407 (2001).
29. S.J. Hands, J.B. Kogut and C.G. Strouthos, Phys. Rev. D **65**, 114507 (2002).
30. M.d.J. Anguiano-Galicia, A. Bashir and A. Raya, Phys. Rev. D **76**, 127702 (2007).
31. A. Ayala, A. Bashir, E. Gutierrez, A. Raya and A. Sanchez, Phys. Rev. D **82**, 056011 (2010).
32. F.C. Khanna, A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson and A.E. Santana, Europhys. Lett. **92**, 11001 (2010).
33. D. Ebert, K. G. Klimenko and H. Toki, Phys. Rev. D **64**, 014038 (2001).
34. H. Kohyama, Phys. Rev. D **77**, 045016 (2008).
35. H. Kohyama, Phys. Rev. D **78**, 014021 (2008).
36. J.-L. Kneur, M.B. Pinto, R.O. Ramos and E. Staudt, Phys. Rev. D **76**, 045020 (2007).
J.-L. Kneur, M.B. Pinto, R.O. Ramos and E. Staudt, Phys. Lett. B **657**, 136 (2007).
37. K.G. Klimenko, Z. Phys. C **54**, 323 (1992).
38. K.G. Klimenko, Teor. Mat. Fiz. **89**, 211 (1991) [Theor. Math. Phys. **89**, 1161 (1991)].
39. K.G. Klimenko, Teor. Mat. Fiz. **90**, 3 (1992) [Theor. Math. Phys. **90**, 1 (1992)];
40. V.P. Gusynin, V.A. Miransky and I.A. Shovkovy, Phys. Rev. Lett. **73**, 3499 (1994).
41. A.S. Vshivtsev, B.V. Magnitsky and K.G. Klimenko, Theor. Math. Phys. **106**, 319 (1996).
42. A.S. Davydov, Phys. Rep. **190**, 191 (1990).
43. M. Rotter, M. Tegel and D. Johrendt, Phys. Rev. Lett. **101**, 107006 (2008).
44. A.J. Niemi and G.W. Semenoff, Phys. Rev. Lett. **54**, 873 (1985).
45. A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres, K.S. Novoselov and A.K. Geim, Rev. Mod. Phys. **81**, 109 (2009).
46. K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov, D. Jiang, M.I. Katsnelson, I.V. Grigorieva, S.V. Dubonos, A.A. Firsov, Nature 438, 197-200 (10 November 2005)
47. K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morosov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, and A. A. Firsov, Science 306, 666 (2004).
48. G.W. Semenoff, I.A. Shovkovy and L.C.R. Wijewardhana, Mod. Phys. Lett. A **13**, 1143 (1998).

49. E. Babaev, Phys. Lett. B **497**, 323 (2001).
50. E. Babaev, Int. J. Mod. Phys. A **16**, 1175 (2001).
51. I.V. Fialkovsky and D.V. Vassilevich, arXiv:1111.3017 [hep-th].
52. V.C. Zhukovsky, K.G. Klimenko, V.V. Khudyakov and D. Ebert, JETP Lett. **73**, 121 (2001);
53. V.C. Zhukovsky and K.G. Klimenko, Theor. Math. Phys. **134**, 254 (2003).
54. E.J. Ferrer, V.P. Gusynin and V. de la Incera, Mod. Phys. Lett. B **16**, 107 (2002).
55. E.J. Ferrer, V.P. Gusynin and V. de la Incera, Eur. Phys. J. B **33**, 397 (2003).
56. T. Ohsaku, arXiv:0806.4298 [cond-mat.supr-con].
57. E.C. Marino and L.H.C.M. Nunes, Nucl. Phys. B **741**, 404 (2006).
58. L.H.C.M. Nunes, R.L.S. Farias and E.C. Marino, Phys. Lett. A **376**, 779 (2012).
59. E.C. Marino and L.H.C.M. Nunes, Nucl. Phys. B **769**, 275 (2007).
60. K.G. Klimenko, R.N. Zhokhov and V.C. Zhukovsky, Phys. Rev. D **86**, 105010 (2012).
61. D. Ebert, N. V. Gubina, K. G. Klimenko, S. G. Kurbanov, and V. Ch. Zhukovsky
Phys. Rev. D **84**, 025004 2011
62. V. Ch. Zhukovsky, K. G. Klimenko, T. G. Khunjua, Moscow University Physics Bulletin
Volume 68, Issue 2, pp 105-109 2013
63. K.A. Olive et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C, **38**, 090001 (2014).
64. V Schoen, M Thies 2000 Contribution to the Festschrift in honor of Boris Ioffe, edited by M.
Shifman Report number: FAU-TP3-00/9 arXiv:hep-th/0008175v1
65. Ivanenko, D. D., and D. F. Kurdgelaidze, 1965, Astrophysics 1(4), 479.
Ivanenko, D. D., and D. F. Kurdgelaidze, 1969, Lett. Nuovo Cim. IIS1, 13.
Ivanenko, D. D., and D. F. Kurdgelaidze, 1970, Sov. Phys. J. 13, 1015.
66. Gross, D. J., and F. Wilczek, 1973, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343.
67. Politzer, H. D., 1973, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346.
68. Baym, G., and S. A. Chin, 1976, Phys. Lett. **B62**, 241.
69. Chapline, G., and M. Nauenberg, 1976, Nature **264**, 235.
Chapline, G., and M. Nauenberg, 1977, Phys. Rev. **D16**, 450.
70. Collins, J. C., and M. J. Perry, 1975, Phys. Rev. Lett. **34**, 1353.
71. Freedman, B., and L. D. McLerran, 1978, Phys. Rev. **D17**, 1109.
Freedman, B. A., and L. D. McLerran, 1977, Phys. Rev. **D16**, 1169.
72. Kislinger, M. B., and P. D. Morley, 1976, Phys. Rev. **D 13**(10), 2765.
73. Barrois, B. C., 1977, Nucl. Phys. **B129**, 390.
Barrois, B. C., 1979, Non-perturbative effects in dense quark matter, Ph.D. thesis, California
Institute of Technology, Pasadena, California, UMI 79-04847

74. Frautschi, S. C., 1978, presented at Workshop on Hadronic Matter at Extreme Energy Density, Erice, Italy, Oct 13-21,1978.
75. Bailin, D., and A. Love, 1979, J. Phys. A12, L283.
76. Bailin, D., and A. Love, 1984, Phys. Rept. 107, 325.
77. Iwasaki, M., 1995, Prog. Theor. Phys. Suppl. 120, 187.
78. Iwasaki, M., and T. Iwado, 1995, Phys. Lett. B350, 163.
79. Alford, M. G., K. Rajagopal, and F. Wilczek, 1998, Phys. Lett. B422, 247.
80. Rapp, R., T. Schafer, E. V. Shuryak, and M. Velkovsky, 1998, Phys. Rev. Lett. 81, 53.
81. Alford, M. G., K. Rajagopal, and F. Wilczek, 1999b, Nucl. Phys. B537, 443.
82. Alford, M. G., J. A. Bowers, and K. Rajagopal, 2001a, Phys. Rev. D63, 074016
83. Alford, M. G., and K. Rajagopal, 2006, in Pairing in Fermionic Systems: Basic Concepts and Modern Applications (World Scientific), pp. 1–36, eprint hep-ph/0606157.
Alford, M. G., K. Rajagopal, S. Reddy, and A. W. Steiner, 2006, Phys. Rev. D73, 114016
84. Buballa, M., 2005a, Phys. Rept. 407, 205
85. Hong, D. K., 2001, Acta Phys. Polon. B32, 1253
86. Hsu, S. D. H., 2000, eprint hep-ph/0003140.
87. Huang, M., 2005, Int. J. Mod. Phys. E14, 675.
88. Nardulli, G., 2002, Riv. Nuovo Cim. 25N3, 1.
89. Rajagopal, K., and F. Wilczek, 2000, eprint hep-ph/0011333.
90. Reddy, S., 2002, Acta Phys. Polon. B33, 4101.
91. Ren, H.-c., 2004, eprint hep-ph/0404074.
92. Rischke, D. H., 2004, Prog. Part. Nucl. Phys. 52, 197.
93. Schafer, T., 2003b, eprint hep-ph/0304281.
94. Shovkovy, I. A., 2005, Found. Phys. 35, 1309.
95. M. G. Alford, A. Schmitt, K. Rajagopal, T. Schafer Rev.Mod.Phys.80:1455-1515,2008
arXiv:0709.4635v2
96. L.M. Abreu, A.P.C. Malbouisson and J.M.C. Malbouisson, Europhys. Lett. **90**, 11001 (2010);
Phys. Rev. D **83** (2011) 025001.
97. V.C. Zhukovsky, K.G. Klimenko and V.V. Khudiyakov, Theor. Math. Phys. **124**, 1132 (2000)
[Teor. Mat. Fiz. **124**, 323 (2000)].
98. T. Kojo, Y. Hidaka, L. McLerran, and R.D. Pisarski, arXiv:0912.3800.
99. A. Barducci, R. Casalbuoni, R. Gatto, M. Modugno, and G. Pettini, Phys. Rev. D **51**, 3042 (1995).

100. H. Umezawa, H. Matsumoto, and M. Tachiki, "Thermo field dynamics and condensed states", North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982.
101. M.N. Chernodub, arXiv:1208.5025 [hep-ph].
102. T. Tatsumi, T. Maruyama and E. Nakano, Prog. Theor. Phys. Suppl. **153**, 190 (2004).
103. A.S. Vshivtsev, B.V. Magnitsky and K.G. Klimenko, Phys. Atom. Nucl. **57**, 2171 (1994);
104. E.V. Gorbar, V.P. Gusynin, V.A. Miransky and I.A. Shovkovy, Phys. Rev. B **66**, 045108 (2002).
105. S. Slizovskiy and J. Betouras, Phys. Rev. B **86**, 125440 (2012) [arXiv:1203.5044].
106. A. M. J. Schakel and G. W. Semenoff, Phys. Rev. Lett. **66**, 2653 (1991).
107. E. J. Ferrer and V. de la Incera, Phys. Rev. Lett. **102**, 050402 (2009); Nucl. Phys. B **824**, 217 (2010).
108. W. J. de Haas and P. M. van Alphen, Proc. Amsterdam Acad. **33**, 1106 (1936); D. Shoenberg, *Magnetic oscillations in metals*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.
109. I. M. Lifshitz, *Selected Works. Electronic Theory of Metals, Physics of Polymers and Bipolymers* [in Russian], Nauka, Moscow, 1994; E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevski, *Statistical Physics*, Pergamon, Oxford, 1980.
110. P. Elmfors, D. Persson and B.-S. Skagerstam, Astropart. Phys. **2**, 299 (1994); J. O. Andersen and T. Haugset, Phys. Rev. D **51**, 3073 (1995).
111. A. S. Vshivtsev and K. G. Klimenko, J. Exp. Theor. Phys. **82**, 514 (1996) [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **109**, 954 (1996)];
D. Ebert, K. G. Klimenko, M. A. Vdovichenko and A. S. Vshivtsev, Phys. Rev. D **61**, 025005 (2000).
112. K. Fukushima and H. J. Warringa, Phys. Rev. Lett. **100**, 032007 (2008);
J. L. Noronha and I. A. Shovkovy, Phys. Rev. D **76**, 105030 (2007);
S. Fayazbakhsh and N. Sadooghi, Phys. Rev. D **83**, 025026 (2011).
113. R. O. Ramos, P. H. A. Manso, Phys. Rev. D **87**, 125014 (2013) [arXiv:1303.5463 [hep-ph]].
114. А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев, Издательство "Наука 1981
115. A.N. Vasiliev, "Functional methods in quantum field theory and statistical physics", Leningrad Univ. Press, Leningrad, 1976.
116. D. Ebert, K.G. Klimenko, Phys. Rev. **D80**, 125013 (2009).
117. A. Cortijo, F. Guinea and M.A.H. Vozmediano, arXiv:1112.2054 [cond-mat.mes-hall].
118. E. Elizalde, S. D. Odintsov, A. Romeo, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
119. W.Bietenholz, A.Gfeller, U.-J.Wiese., arXiv:hep-th/0309162v1, 16 Sep 2003
120. Efrain J. Ferrer and Vivian de la Incera, arXiv:hep-ph/0408229v1 20 Aug 2004
121. Atsushi Higuchi and Leonard Parker, Phys.Rev. D vol. 37, num. 10, 15 MAY 1988

122. D. Ebert and K. G. Klimenko, Phys.Rev. D **82**, 025018 2010
123. A. S. Vshivtsev M. A. Vdovichenko K. G. Klimenko, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **114**, 418–436 August 1998
124. D. Ebert, V.Ch. Zhukovsky, International Journal of Modern Physics A, Volume 13, Issue 11, pp. 1723-1741 (1998). DESY 96-102, June 1996
125. D. Ebert, K.G. Klimenko, A.V. Tyukov, and V.Ch. Zhukovsky, Phys. Rev. D **78**, 045008 (2008), arXiv:0804.4826v2 [hep-ph] 13 Aug 2008
126. T.G. Khunjua, K.G. Klimenko, V.Ch. Zhukovsky, arXiv:1106.2928
127. K.G. Klimenko, IHEP 95-56
128. N.V. Gubina, K.G. Klimenko, S.G. Kurbanov and V.C. Zhukovsky, Phys. Rev. D **86**, 085011 (2012).
129. D. D. Scherer and H. Gies, Phys. Rev. B **85**, 195417 (2012).
130. B. Roy and I. F. Herbut, Phys. Rev. B **83**, 195422 (2011).
131. V. P. Gusynin, V. A. Miransky, S. G. Sharapov, and I. A. Shovkovy, Phys. Rev. B **74**, 195429 (2006);
E. V. Gorbar, V. P. Gusynin, V. A. Miransky, and I. A. Shovkovy, Phys. Scr. T **146**, 014018 (2012) [arXiv:1105.1360].
132. H. Gies and S. Lippoldt, Phys. Rev. D **87**, 104026 (2013).
133. V. de la Incera, AIP Conf. Proc. **1361**, 74 (2011) [arXiv:1004.4931].
134. Jean-Noel Fuchs, Mark Oliver Goerbig, Introduction to the Physical Properties of Graphene, Lecture Notes 2008
135. Y. Zhang, Y.-W. Tan, H. L. Stormer, and P. Kim, Nature **438**, 201 (2005)
136. M. I. Katsnelson, Graphene Carbon in Two Dimensions, Cambridge University Press 2012
137. R. Saito, G. Dresselhaus, and M. S. Dresselhaus, Physical Properties of Carbon Nanotubes, Imperial College Press (1998).
138. Ю.Е. Лозовик, С.П.Меркулова, А.А.Соколик, УФН, том 178, N 7
139. K.G. Klimenko, R.N. Zhokhov, V.Ch. Zhukovsky, Mod.Phys.Lett.A28:1350096(2013), arXiv:1211.0148v2 [hep-th]
140. K.G. Klimenko, R.N. Zhokhov, Phys. Rev. D **88** (2013) 105015, arXiv:1307.7265v3 [hep-ph]
141. R. N. Zhokhov, V. Ch. Zhukovsky, P. B. Kolmakov, Moscow University Physics Bulletin **70**, 4, pp 226-231 2015, Р.Н. Жохов, В.Ч. Жуковский, П.Б. Колмаков, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2015. № 4. С. 12
142. V. Ch. Zhukovsky, P. B. Kolmakov, University Physics Bulletin **68**(4):272-278 2013;
143. K.G. Klimenko, R.N. Zhokhov, 2014, EPJ Web Conf. **95** (2015) 04080

Глава 7. Приложения

7.1 Формула для вычисления эффективного потенциала в случае пространств с компактифицированным измерением

Получим формулу для вычисления эффективного потенциала в случае пространств с компактифицированным измерением.

Начнем с вычисления суммы вида $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2+x^2}$.

Заменим сумму по n на контурный интеграл

$$\Sigma = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2+x^2} = \pi \frac{1}{2\pi i} \int d\omega \frac{1}{(\omega+\alpha)^2+x^2} \text{ctg}(\pi\omega). \quad (7.1)$$

Замкнем контур на бесконечности и поменяем направление обхода контура. Видим, что функция, стоящая под контурным интегралом, имеет два полюса

$$\Sigma = -\pi \frac{1}{2\pi i} \int d\omega \frac{1}{(\omega-\alpha+i\sqrt{x^2})(\omega-\alpha-i\sqrt{x^2})} \text{ctg}(\pi\omega).$$

Вычислим контурный интеграл

$$\begin{aligned} \Sigma &= -\pi \frac{1}{2\pi i} (\text{ctg}(\pi i(\sqrt{x^2}-i\alpha)) + \text{ctg}(\pi i(\sqrt{x^2}+i\alpha))) = \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{x^2}} (\text{cth}(\pi(\sqrt{x^2}-i\alpha)) + \text{cth}(\pi(\sqrt{x^2}+i\alpha))). \end{aligned}$$

В итоге получим

$$\Sigma = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2+x^2} = \frac{\pi}{2x} (\text{cth}(\pi(x-i\alpha)) + \text{cth}(\pi(x+i\alpha))). \quad (7.2)$$

Умножим это выражение на $2x$ и проинтегрировав его от $\sqrt{a^2}$ до $\sqrt{a^2+b^2}$, получим

$$\begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\ln((n+\alpha)^2+a^2+b^2) - \ln((n+\alpha)^2+a^2)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{b^2}{(n+\alpha)^2+a^2}\right) = \\ &= \ln \text{sh}\pi(\sqrt{a^2+b^2}+i\alpha) + \ln \text{sh}\pi(\sqrt{a^2+b^2}-i\alpha) - \ln \text{sh}\pi(\sqrt{a^2}+i\alpha) - \ln \text{sh}\pi(\sqrt{a^2}-i\alpha) = \\ &= \pi\sqrt{a^2+b^2} + i\alpha + \pi\sqrt{a^2+b^2} - i\alpha + \ln(1 - e^{-2\pi(\sqrt{a^2+b^2}+i\alpha)}) + \ln(1 - e^{-2\pi(\sqrt{a^2+b^2}-i\alpha)}) - \\ &\quad - \pi\sqrt{a^2} - i\alpha - \pi\sqrt{a^2} + i\alpha - \ln(1 - e^{-2\pi(\sqrt{a^2}+i\alpha)}) - \ln(1 - e^{-2\pi(\sqrt{a^2}-i\alpha)}) = \\ &= 2\pi(\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2}) + \ln \frac{1 - 2\cos(2\pi\alpha)e^{-2\pi\sqrt{a^2+b^2}} + e^{-4\pi\sqrt{a^2+b^2}}}{1 - 2\cos(2\pi\alpha)e^{-2\pi\sqrt{a^2}} + e^{-4\pi\sqrt{a^2}}} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \ln\left(1 + \frac{b^2}{\tau^2+a^2}\right) + \ln \frac{1 - 2\cos(2\pi\alpha)e^{-2\pi\sqrt{a^2+b^2}} + e^{-4\pi\sqrt{a^2+b^2}}}{1 - 2\cos(2\pi\alpha)e^{-2\pi\sqrt{a^2}} + e^{-4\pi\sqrt{a^2}}}, \end{aligned}$$

где воспользовались формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{x^2 + a^2}{x^2 + b^2} dx = 2\pi(\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}).$$

Данную формулу несложно доказать. Для этого рассмотрим выражение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln(x^2 + a^2) dx = 2\pi\sqrt{a^2}. \quad (7.3)$$

Продифференцируем интеграл в левой части выражения (7.3) по a

$$2a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = 2a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x + i\sqrt{a^2})(x - i\sqrt{a^2})} = 2\pi \frac{a}{\sqrt{a^2}}.$$

Видно, что дифференцирование правой части дает тот же результат.

В итоге получим формулу

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{b^2}{(n + \alpha)^2 + a^2} \right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\ln((n + \alpha)^2 + a^2 + b^2) - \ln((n + \alpha)^2 + a^2)) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \ln \left(1 + \frac{b^2}{\tau^2 + a^2} \right) + \ln \frac{1 - 2 \cos(2\pi\alpha) e^{-2\pi\sqrt{a^2+b^2}} + e^{-4\pi\sqrt{a^2+b^2}}}{1 - 2 \cos(2\pi\alpha) e^{-2\pi\sqrt{a^2}} + e^{-4\pi\sqrt{a^2}}}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

7.2 Алгебра γ -матриц в случае группы $\text{SO}(2,1)$

Неприводимое представление трехмерной группы Лоренца $\text{SO}(2,1)$ задается $\tilde{\gamma}$ -матрицами

$$\tilde{\gamma}^0 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^1 = i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}^2 = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.5)$$

действующими на двухкомпонентные дираковские спиноры.

Они обладают свойствами:

$$\text{Tr}(\tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu) = 2g^{\mu\nu}; \quad [\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu] = -2i\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \tilde{\gamma}_\alpha; \quad \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu = -i\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \tilde{\gamma}_\alpha + g^{\mu\nu}, \quad (7.6)$$

где $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$, $\tilde{\gamma}_\alpha = g_{\alpha\beta} \tilde{\gamma}^\beta$, $\varepsilon^{012} = 1$. Также имеет место следующее соотношение:

$$\text{Tr}(\tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu \tilde{\gamma}^\alpha) = -2i\varepsilon^{\mu\nu\alpha}. \quad (7.7)$$

Заметим, что определение киральной симметрии слегка необычно в трех измерениях пространства-времени (спин является псевдоскаляром, нежели аксиальным вектором). Формальная причина заключается в том, что не существует 2×2 матриц, антикоммутирующих с дираковскими матрицами $\tilde{\gamma}^\nu$, которые могут позволить определить γ^5 -матрицу в неприводимом представлении. Важные понятия, такие как киральная симметрия и ее нарушение массовым членом, могут, тем не менее, быть реализованы в рамках $(2+1)$ -мерных моделей квантовой теории поля, если рассматривать приводимое четырехкомпонентное представление дираковских полей. В этом случае дираковские спиноры ψ имеют следующий вид

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1(x) \\ \tilde{\psi}_2(x) \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

с двумя двухкомпонентными спинорами $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$. Приводимое четырехкомпонентное представление задается (4×4) γ -матрицами: $\gamma^\mu = \text{diag}(\tilde{\gamma}^\mu, -\tilde{\gamma}^\mu)$, где $\tilde{\gamma}^\mu$ определены формулами (7.5). Несложно показать, что $(\mu, \nu = 0, 1, 2)$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu}; \quad \gamma^\mu \gamma^\nu = \sigma^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}, \\ \sigma^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \text{diag}(-i\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \tilde{\gamma}_\alpha, -i\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \tilde{\gamma}_\alpha). \end{aligned} \quad (7.9)$$

В дополнение к дираковским матрицам γ^μ ($\mu = 0, 1, 2$) существуют две другие матрицы γ^3, γ^5 , которые антикоммутируют со всеми γ^μ ($\mu = 0, 1, 2$) и между собой,

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = i \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.10)$$

где I единичная 2×2 матрица.

Пространственное отражение P в пространстве четырехкомпонентных спиноров определяется следующим образом

$$P : \quad \psi_k(t, x, y) \rightarrow \gamma^5 \gamma^1 \psi_k(t, -x, y), \quad k = 1, \dots, N. \quad (7.11)$$

В терминах двухкомпонентных спиноров $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$ пространственное отражение P выглядит как

$$P : \quad \tilde{\psi}_1(t, x, y) \rightarrow i\tilde{\gamma}^1 \tilde{\psi}_2(t, -x, y); \quad \tilde{\psi}_2(t, x, y) \rightarrow i\tilde{\gamma}^1 \tilde{\psi}_1(t, -x, y). \quad (7.12)$$

Такое определение пространственного отражения часто используется в $(2+1)$ -мерных теориях с четырехкомпонентным представлением дираковских спиноров (см., например, [18]).

7.3 Вычисление континуального интеграла по антикоммутирующим полям

Вычислим следующий функциональный интеграл по антикоммутирующим четырехкомпонентным дираковским спинорам $q(x), \bar{q}(x)$:

$$I = \int [d\bar{q}][dq] \exp \left(i \int d^3x \left[\bar{q} D q - \frac{\Delta}{2} (q^T C q) - \frac{\Delta}{2} (\bar{q} C \bar{q}^T) \right] \right), \quad (7.13)$$

где используются обозначения параграфа 2.2 и, в частности, оператор D задается выражением (2.11). Заметим также, что интеграл I равен аргументу \ln -функции в формуле (2.11) в частном случае $N = 1$. Вспомним следующие общие формулы для гауссовых интегралов [115]:

$$\int [dq] e^{i \int d^3x \left[-\frac{1}{2} q^T A q + \eta^T q \right]} = (\det(A))^{1/2} e^{-\frac{i}{2} \int d^3x \left[\eta^T A^{-1} \eta \right]}, \quad (7.14)$$

$$\int [d\bar{q}] e^{i \int d^3x \left[-\frac{1}{2} \bar{q} A \bar{q}^T + \bar{\eta} \bar{q}^T \right]} = (\det(A))^{1/2} e^{-\frac{i}{2} \int d^3x \left[\bar{\eta} A^{-1} \bar{\eta}^T \right]}, \quad (7.15)$$

где A антисимметричный оператор в координатном и спинорном пространствах, а $\eta(x), \bar{\eta}(x)$ антикоммутирующие спинорные источники, которые также коммутируют с q и \bar{q} . Вначале проинтегрируем в (7.13) по полю q , воспользовавшись формулой (7.14), полагая, что $A = \Delta C$, $\bar{q} D = \eta^T$, то есть $\eta = D^T \bar{q}^T$. Тогда

$$I = (\det(\Delta C))^{1/2} \int [d\bar{q}] \exp \left(-\frac{i}{2} \int d^3x \bar{q} [\Delta C + D(\Delta C)^{-1} D^T] \bar{q}^T \right). \quad (7.16)$$

Затем интегрирование по полям \bar{q} в (7.16) легко может быть выполнено с помощью формулы (7.15), где надо положить $A = \Delta C + D(\Delta C)^{-1}D^T$ и $\bar{\eta} = 0$. В результате получим

$$I = (\det(\Delta C))^{1/2} (\det[\Delta C + D(\Delta C)^{-1}D^T])^{1/2} = (\det[\Delta^2 C^2 + DC^{-1}D^T C])^{1/2}. \quad (7.17)$$

Учитывая очевидные соотношения $(\partial_\nu)^T = -\partial_\nu$ и $C^{-1}(\gamma^\nu)^T C = -\gamma^\nu$ ($\nu = 0, 1, 2$), мы получим из (7.17)

$$I = (\det[-\Delta^2 + D_+ D_-])^{1/2} \equiv (\det B)^{1/2}, \quad (7.18)$$

где $D_\pm = \gamma^\nu i \partial_\nu - M \pm \mu \gamma^0$. Используя общую формулу $\det B = \exp(\text{Tr} \ln B)$, мы получим из (7.18):

$$\ln I = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln (B) = \sum_{i=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln(\lambda_i(p)) \int d^3 x. \quad (7.19)$$

(Более детально рассмотрение операторных следов представлено в Приложении А работы [116].) В этой формуле символ Tr обозначает след оператора в координатном и внутреннем пространствах. Более того, $\lambda_i(p)$ ($i = 1, 2$) в (7.19) являются двумя дважды вырожденными собственными значениями 4×4 матрицы $\bar{B}(p)$, которая является образом преобразования Фурье от оператора B . Собственные значения $\lambda_i(p)$ ($i = 1, 2$) задаются следующим выражением

$$\lambda_{1,2}(p) = M^2 - p_1^2 - p_2^2 - \mu^2 + p_0^2 - \Delta^2 \pm 2\sqrt{-M^2 p_2^2 - M^2 p_1^2 + M^2 p_0^2 + \mu^2 p_2^2 + \mu^2 p_1^2}.$$

7.4 Уравнения щели

Уравнение для щели M_0 , то есть первое из уравнений (2.35), получено в статье [4; 15], где фазовая структура изначальной модели (2.1) была рассмотрена в частном случае $G_2 = 0$.

Для того чтобы получить уравнение для сверхпроводящей щели Δ_0 , $\partial F_2(\Delta)/\partial \Delta = 0$, вначале преобразуем выражение (2.34) для термодинамического потенциала $F_2(\Delta)$, используя полярные координаты в интеграле (2.34). Интегрируя полученное выражение по полярному углу, получим

$$F_2(\Delta) = \omega_2(\Delta) - \frac{T}{\pi} \int_0^\infty p dp \left[\ln \left(1 + e^{-\beta \sqrt{(p+\mu)^2 + \Delta^2}} \right) + \ln \left(1 + e^{-\beta \sqrt{(p-\mu)^2 + \Delta^2}} \right) \right]. \quad (7.20)$$

Удобно изменить переменные интегрирования в (7.20) (мы используем $q = p + \mu$ в первом интеграле и $q = p - \mu$ во втором интеграле), и после некоторых преобразований получим эквивалентное выражение

$$F_2(\Delta) = \omega_2(\Delta) - \frac{2T}{\pi} \int_\mu^\infty q dq \ln \left(1 + e^{-\beta \sqrt{q^2 + \Delta^2}} \right) - \frac{2T\mu}{\pi} \int_0^\mu dq \ln \left(1 + e^{-\beta \sqrt{q^2 + \Delta^2}} \right). \quad (7.21)$$

Начиная с этого выражения и учитывая выражение (2.26) для $\omega_2(\Delta)$, мы получим следующее уравнение щели:

$$\frac{\partial F_2(\Delta)}{\partial \Delta} = \frac{\Delta}{\pi g_2} + \frac{\Delta}{\pi} \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} - \frac{\mu \Delta}{\pi} \ln \left(\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + \Delta^2}}{\Delta} \right) + \quad (7.22)$$

$$+\frac{\Delta}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} \frac{2q dq}{\sqrt{q^2 + \Delta^2} (1 + e^{\beta\sqrt{q^2 + \Delta^2}})} + \frac{2\Delta\mu}{\pi} \int_0^{\mu} \frac{dq}{\sqrt{q^2 + \Delta^2} (1 + e^{\beta\sqrt{q^2 + \Delta^2}})} = 0.$$

Первый интеграл в (7.22) достаточно простой, то есть

$$\int_{\mu}^{\infty} \frac{2q dq}{\sqrt{q^2 + \Delta^2} (1 + e^{\beta\sqrt{q^2 + \Delta^2}})} = \frac{2}{\beta} \ln (1 + e^{-\beta\sqrt{\mu^2 + \Delta^2}}). \quad (7.23)$$

Наоборот, представим третий член в (7.22) в интегральной форме

$$-\frac{\mu\Delta}{\pi} \ln \left(\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + \Delta^2}}{\Delta} \right) = -\frac{\mu\Delta}{\pi} \int_0^{\mu} \frac{dq}{\sqrt{q^2 + \Delta^2}}, \quad (7.24)$$

который затем может быть объединен с последним интегралом в (7.22). В результате получим для сверхпроводящей щели Δ_0 второе из выражений (2.35).

7.5 Строгое получение эффективного действия в первом порядке $\frac{1}{N}$

Получим эффективное действие в первом порядке $\frac{1}{N}$ разложения для модели Гросса-Неве с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_a \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi_a + \frac{G}{N} (\bar{\psi}_a \psi_a)^2. \quad (7.25)$$

Для этого запишем выражение для производящего функционала

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \int D[\psi(x)] D[\bar{\psi}(x)] e^{(i \int dx \mathcal{L} + \int dx \bar{\eta} \psi + \int dx \bar{\psi} \eta)}, \quad (7.26)$$

где мы пишем dx , не уточняя размерность пространства-времени, чтобы подчеркнуть, что все формулы справедливы для произвольной размерности.

Удобнее работать с эквивалентным лагранжианом

$$\mathcal{L}(\bar{\psi}, \psi, \sigma) = i\bar{\psi} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi - \sigma \bar{\psi} \psi - \frac{N}{2G} \sigma^2. \quad (7.27)$$

В терминах эквивалентного лагранжиана производящий функционал будет иметь вид

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \int D[\psi(x)] D[\bar{\psi}(x)] D[\sigma(x)] e^{(i \int dx \mathcal{L}(\bar{\psi}, \psi, \sigma) + \int dx \bar{\eta} \psi + \int dx \bar{\psi} \eta)}. \quad (7.28)$$

Нам понадобится стандартная формула для гауссова интеграла по фермионным полям

$$\int D[\psi(x)] D[\bar{\psi}(x)] e^{(- \int dx \bar{\psi} A \psi + \int dx \bar{\eta} \psi + \int dx \bar{\psi} \eta)} = \text{Det} A e^{-i \int dx \bar{\eta} A^{-1} \eta}. \quad (7.29)$$

С помощью (7.29) в выражении (7.28) проинтегрируем по спинорным полям и получим

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \int D[\sigma(x)] e^{iN \int dx (-\frac{1}{2G} \sigma^2 - i \text{tr} \ln D - \frac{1}{N} \bar{\eta} D^{-1} \eta)}, \quad (7.30)$$

где $D = i\gamma\partial - \sigma$.

При больших значениях N экспонента является сильно осциллирующей функцией, и интеграл можно вычислить методом стационарной фазы. Для этого нужно минимизировать

выражение под экспонентой. В итоге получим

$$\langle \sigma \rangle = -iGtr \frac{1}{i\gamma\partial - \langle \sigma \rangle} + \frac{1}{N} \bar{\eta}\eta. \quad (7.31)$$

Подставив (7.31) в выражение (7.30) и убрав интегрирование, получим

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \exp \left(iN \int dx \left(-\frac{1}{2G} \langle \sigma \rangle^2 - itr \ln D - \frac{1}{N} \bar{\eta} D^{-1} \eta \right) \right), \quad (7.32)$$

где в D нужно считать $\sigma = \langle \sigma \rangle$ и $\langle \sigma \rangle$ в первом порядке $\frac{1}{N}$ разложения равна

$$\langle \sigma \rangle = -iGtr \frac{1}{i\gamma\partial - \langle \sigma \rangle}. \quad (7.33)$$

Мы получили производящий функционал, из которого мы можем вычислить все функции Грина для фермионов. Будем рассматривать теперь σ как полноценное скалярное поле и введем для него источник J .

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J] = \int D[\psi(x)] D[\bar{\psi}(x)] D[\sigma(x)] e^{(i \int dx \mathcal{L}(\bar{\psi}, \psi, \sigma) + \int dx \bar{\eta} \psi + \int dx \bar{\psi} \eta + \int dx \sigma J)}, \quad (7.34)$$

где будем считать, что ток пропорционален N : $J = O(N)$.

Проинтегрировав по фермионным полям, получим

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J] = \int D[\sigma(x)] e^{(iN \int dx \left(-\frac{1}{2G} \sigma^2 - itr \ln D - \frac{1}{N} \bar{\eta} D^{-1} \eta \right) + \int dx \sigma J)}. \quad (7.35)$$

Вычислим теперь производящий функционал для связанных функций Грина $W[\eta, \bar{\eta}, J]$, который определяется как

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J] = e^{iW[\eta, \bar{\eta}, J]}. \quad (7.36)$$

Проинтегрировав по σ , получим для него следующее выражение

$$W[\eta, \bar{\eta}, J] = N \int dx \left(-\frac{1}{2G} \langle \sigma \rangle^2 - itr \ln(i\gamma\partial - \langle \sigma \rangle) - \frac{1}{N} \bar{\eta} \frac{1}{i\gamma\partial - \langle \sigma \rangle} \eta + \langle \sigma \rangle J + W_{\text{вн}}[\eta, \bar{\eta}, J] o \left(\frac{1}{N} \right) \right), \quad (7.37)$$

где последний член обозначает вклады следующих порядков, а $\langle \sigma \rangle$ задается выражением

$$\langle \sigma \rangle = -iGtr \frac{1}{i\gamma\partial - \sigma} + J + \frac{1}{N} \bar{\eta}\eta, \quad (7.38)$$

которое совпадает с выражением (7.31) при нулевом источнике J и в пределе $N \rightarrow \infty$ совпадает с выражением (7.33).

Теперь определим классические поля, от которых будет зависеть термодинамический потенциал и которые в итоге могут дать конденсаты (вакуумные средние).

$$\sigma(x) = \frac{\delta W}{\delta J(x)} = \langle \sigma \rangle + o \left(\frac{1}{N} \right), \quad (7.39)$$

$$\psi(x) = \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x)} = D^{-1}\eta, \quad (7.40)$$

$$\bar{\psi}(x) = \frac{\delta W}{\delta \eta(x)} = -\bar{\eta}D^{-1}. \quad (7.41)$$

Выпишем теперь источники через поля

$$\eta = D\psi, \quad (7.42)$$

$$\bar{\eta} = -\bar{\psi}D, \quad (7.43)$$

которые понадобятся, так как, чтобы получить эффективный потенциал, надо будет подставить выражение источников через поля.

Перейдем к эффективному действию $\Gamma[\psi, \bar{\psi}, \sigma]$, сделав преобразование Лежандра,

$$\begin{aligned} \Gamma[\psi, \bar{\psi}, \sigma] &= W[\eta, \bar{\eta}, J] - \int \bar{\psi}\eta - \int \bar{\eta}\psi - \int \sigma J = \\ &= \int dx \left(-\frac{N}{2G}\langle\sigma\rangle^2 - iNtr \ln(i\gamma\partial - \langle\sigma\rangle) - \bar{\eta}D^{-1}\eta + J\langle\sigma\rangle - \bar{\psi}\eta - \bar{\eta}\psi - \sigma J \right) = \\ &= \int dx \left(-\frac{N}{2G}\sigma^2 - iNtr \ln(i\gamma\partial - \sigma) + \bar{\psi}D\psi \right), \end{aligned} \quad (7.44)$$

где в последнем равенстве мы подставили выражения для источников через поля (7.42), (7.43) и воспользовались формулой (7.39).

В первом порядке $\frac{1}{N}$ разложения для эффективного действия получили

$$\Gamma[\psi, \bar{\psi}, \sigma] = \int dx \left(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \sigma\bar{\psi}\psi - \frac{N}{2G}\sigma^2 - iNtr \ln(i\gamma\partial - \sigma) \right), \quad (7.45)$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi} = \bar{\eta}, \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}} = -\eta, \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\sigma} = -J. \quad (7.46)$$

Положив источники равными нулю, получим, что вакуумные средние полей $\psi, \bar{\psi}, \sigma$ определяются из условия экстремума эффективного действия (минимум эффективного потенциала)

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi} = 0, \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}} = 0, \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\sigma} = 0. \quad (7.47)$$

Для фермионов получается уравнение Дирака

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \sigma\psi = 0. \quad (7.48)$$

Будем считать, что вакуумные средние фермионных полей равны нулю $\psi = 0$, $\bar{\psi} = 0$.

Для эффективного действия скалярного поля получили

$$\Gamma[\sigma] = \int dx \left(-\frac{N}{2G}\sigma^2 - iNtr \ln(i\gamma\partial - \sigma) \right). \quad (7.49)$$

7.6 Вычисление эффективного потенциала в (2+1)-мерной модели Гросса-Неве в присутствии внешнего перпендикулярного магнитного поля

В этом разделе вычислим эффективный потенциал для модели Гросса-Неве в (2+1)-мерном пространстве-времени в присутствии внешнего магнитного поля, перпендикулярного плоскости системы. Эффективный потенциал модели в этом случае имеет вид

$$V_{\text{eff}} = \frac{N}{2G}\sigma^2 + iN \text{tr} \ln(i\gamma D - \sigma). \quad (7.50)$$

Удобно воспользоваться формулой

$$\text{tr} \ln A = \ln \text{Det} A \quad (7.51)$$

и провести трюк с коммутированием γ^5 -матрицы, для того чтобы квадрировать оператор. В результате получим

$$\ln \text{Det}(\gamma^\mu P_\mu - \sigma) = \frac{1}{2} \ln(\text{Det}(\sigma^2 - (\gamma^\mu P_\mu)^2)). \quad (7.52)$$

Последний член не зависит от поля σ , и его можно опустить.

Вычислим квадрат $\gamma^\mu D_\mu$, $\gamma^\mu P_\mu = i\gamma^\mu D_\mu$

$$(\gamma^\mu D_\mu)^2 = \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) D_\mu D_\nu + \frac{1}{2} \gamma^\nu \gamma^\mu [D_\nu, D_\mu]. \quad (7.53)$$

Учтем, что отличен от нуля только коммутатор с пространственными индексами 1 и 2 и, учитывая основное свойство гамма-матриц, получим

$$(\gamma^\mu P_\mu)^2 = P_\mu^2 + \gamma^1 \gamma^2 [P_1, P_2], \quad (7.54)$$

где также учтено, что отличны от нуля два коммутатора с $\mu = 1, \nu = 2$ и с $\mu = 2, \nu = 1$, которые дают одинаковый вклад.

Коммутатор легко вычисляется и имеет вид

$$[P_1, P_2] = -ieB_\perp. \quad (7.55)$$

Окончательно получим

$$(\gamma^\mu P_\mu)^2 = P_\mu^2 - ieB_\perp \gamma^1 \gamma^2. \quad (7.56)$$

Вычислим теперь второй член в выражении (7.50)

$$I = i \frac{N}{2V} \text{Tr} \ln(-p_0^2 + p_1^2 + (p_2 - eB_\perp x_1)^2 + \sigma^2 - i\gamma^1 \gamma^2 eB_\perp). \quad (7.57)$$

$i\gamma^1 \gamma^2$ является эрмитовым оператором и $(i\gamma^1 \gamma^2)^2 = 1$. Удобнее вычислить явно этот оператор

$$-i\gamma^1 \gamma^2 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \sigma_3 1_{2 \times 2}. \quad (7.58)$$

Учитывая явный вид σ_3 , ясно, что она имеет два собственных значения $+1$ и -1 , которые стоят на диагонали.

$$\begin{aligned} I &= i \frac{N}{2V} \text{Tr} \ln(-p_0^2 + p_1^2 + (p_2 - eB_\perp x_1)^2 + \sigma^2 + eB_\perp \sigma_3 1_{2 \times 2}) = \\ &= i \frac{N}{2V} \int dx \langle x | \text{tr} \ln(-p_0^2 + p_1^2 + (p_2 - eB_\perp x_1)^2 + \sigma^2 + eB_\perp \sigma_3 1_{2 \times 2}) | x \rangle, \end{aligned} \quad (7.59)$$

где tr является следом по спинорным индексам. Оператор, стоящий под знаком tr , уже является диагональным, и взятие tr является тривиальным.

$$\begin{aligned} I &= i \frac{N}{2V} \sum_{p_0} \sum_{p_1} \sum_{\psi} \langle \psi | \text{tr} \ln(-p_0^2 + p_1^2 + (p_2 - eB_\perp x_1)^2 + \sigma^2 + eB_\perp \sigma_3 1_{2 \times 2}) | \psi \rangle = \\ &= i \frac{N}{V} \sum_{p_0} \sum_{p_1} \sum_{\psi} \sum_{l=0}^1 \langle \psi | \ln(-p_0^2 + p_1^2 + (p_2 - eB_\perp x_1)^2 + \sigma^2 + eB_\perp (-1)^l) | \psi \rangle. \end{aligned}$$

Удваивание возникает из-за того, что (7.58) имеет дважды вырожденные собственные значения ± 1 .

Перепишем выражение под \ln в более удобном виде

$$\ln \left(-p_0^2 + p_1^2 + e^2 B_\perp^2 \left(x_1 - \frac{p_2}{eB_\perp} \right)^2 + \sigma^2 + (-1)^l eB_\perp \right). \quad (7.60)$$

Видно, что возникает гамильтониан для гармонического осциллятора. Для того чтобы он совсем выглядел как гамильтониан для гармонического осциллятора, перейдем к новым переменным $x'_1 = x_1 - \frac{p_2}{eB_\perp}$, $p'_2 = p_2$. Ясно, что канонический коммутатор не изменится $[p_1, x'_1] = [p_1, x_1]$. В новых переменных выражение будет иметь вид

$$\ln \left(-p_0^2 + p_1^2 + e^2 B_\perp^2 x_1'^2 + \sigma^2 + (-1)^l eB_\perp \right). \quad (7.61)$$

После суммирования по собственным значениям гармонического осциллятора, получим

$$i \frac{N}{V} \sum_{p_0} \sum_{p_2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^1 \ln(-p_0^2 + 2eB_\perp(n + \frac{1}{2}) + (-1)^l eB_\perp + \sigma^2) = \quad (7.62)$$

$$= i \frac{N}{V} \sum_{p_0} \sum_{p_2} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \ln(-p_0^2 + 2eB_\perp n + \sigma^2), \quad (7.63)$$

где $s_n = 2 - \delta_{n,0}$, которая возникает из-за того, что собственные значения гармонического осциллятора, складываясь и вычитаясь с $\pm eB_\perp$, дают два значения $2eB_\perp n$ для каждого $n \neq 0$ и одно при $n = 0$.

Учитывая, что $\sum_{p_2} = \frac{eB_\perp}{2\pi} L^2$, для эффективного потенциала получим следующее выражение

$$V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{N}{2G} \sigma^2 + i \frac{NT}{V} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{eB_\perp}{2\pi} L^2 \sum_{n=0}^{\infty} s_n \ln(-p_0^2 + 2eB_\perp n + \sigma^2). \quad (7.64)$$

По определению $V = TL^2$.

Сделаем виков поворот $p_0 \rightarrow -ip_0$

$$V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{N}{2G}\sigma^2 - N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{eB_{\perp}}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \ln(p_0^2 + 2eB_{\perp}n + \sigma^2). \quad (7.65)$$

Представим \ln в интегральном виде, используя формулу Швингера,

$$\ln A = - \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-As}. \quad (7.66)$$

Для эффективного потенциала получим выражение

$$V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{N}{2G}\sigma^2 + N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{eB_{\perp}}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-(p_0^2 + 2eB_{\perp}n + \sigma^2)s}. \quad (7.67)$$

Сумма по n вычисляется как геометрическая прогрессия, за исключением того, что надо вынести первый член, чтобы избавиться от s_n , так как все значения s_n , соответствующие $n \neq 0$, равняются 2. После элементарных тригонометрических преобразований получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n e^{-2eB_{\perp}sn} = \text{cth}(eB_{\perp}s). \quad (7.68)$$

Интеграл по p_0 является гауссовым и легко вычисляется

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_0 e^{-p_0^2 s} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}. \quad (7.69)$$

В итоге остается одно интегрирование по s , и для эффективного потенциала получаем

$$V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{N}{2G}\sigma^2 + N \frac{eB_{\perp}}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{\frac{3}{2}}} \text{cth}(eB_{\perp}s). \quad (7.70)$$

Вычтем и прибавим расходящийся член разложения cth

$$\frac{NeB_{\perp}}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{\frac{3}{2}}} \text{cth}(eB_{\perp}s) = \frac{NeB_{\perp}}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{\frac{3}{2}}} e^{-\sigma^2 s} (\text{cth}(eB_{\perp}s) - \frac{1}{eB_{\perp}s}) + \frac{N}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{\frac{5}{2}}} e^{-\sigma^2 s}. \quad (7.71)$$

Также вычтем и прибавим расходящееся слагаемое во втором члене выражения (7.71)

$$\begin{aligned} N \frac{eB_{\perp}}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{\frac{3}{2}}} e^{-\sigma^2 s} (\text{cth}(eB_{\perp}s) - \frac{1}{eB_{\perp}s}) + N \frac{1}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{\frac{5}{2}}} (e^{-\sigma^2 s} - 1 + \sigma^2 s) + \\ + N \frac{1}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{\frac{5}{2}}} - N \frac{1}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \sigma^2 \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (7.72)$$

Используем формулу, которую можно найти, например, в [114],

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-px} \text{cth} cx dx = \Gamma(\alpha) [2^{1-\alpha} c^{-\alpha} \zeta(\alpha, \frac{p}{2c}) - p^{-\alpha}], \quad (7.73)$$

где $c, \text{Re} p > 0, \text{Re} \alpha > 1$.

Первые два члена в выражении (7.72) являются конечными и, если поменять степень s с $3/2$ и $5/2$ на такую, что каждое слагаемое в них сходилось бы (например, на $\alpha < -1$), то

можно применить формулу (7.73). Можно увидеть, что получается аналитическая функция при любых значениях степени α . Затем можно устремить степень к нужной и, рассматривая все функции как их аналитические продолжения на нужную область, увидим, что вычтенные слагаемые в этих выражениях дадут нулевой вклад. Таким образом, для изначального выражения без вычитания можно формально воспользоваться формулой (7.73), хотя мы находимся вне рамок ее применимости, а все расходящиеся слагаемые находятся в двух последних членах выражения (7.72), которые по сути являются теми слагаемыми, которые мы вычли.

Третье слагаемое в (7.72) можно отбросить, так как оно не зависит от σ .

Первый член в (7.72) равен

$$\frac{NeB_{\perp}}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{\frac{3}{2}}} e^{-\sigma^2 s} \left(\text{cth}(eB_{\perp}s) - \frac{1}{eB_{\perp}s} \right) = -\frac{N(2eB_{\perp})^{\frac{3}{2}}}{2\pi} \zeta \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sigma^2}{2eB_{\perp}} \right) + \frac{NeB_{\perp}\sigma}{2\pi}. \quad (7.74)$$

Значения гамма-функции $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$, $\Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$. Второй член в (7.72) равен

$$\frac{N}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{\frac{5}{2}}} (e^{-\sigma^2 s} - 1 + \sigma^2 s) = N \frac{1}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \Gamma \left(-\frac{3}{2} \right) \sigma^3 = \frac{N}{3\pi} \sigma^3. \quad (7.75)$$

Для последнего слагаемого в (7.72) сделаем регуляризацию и получим

$$-\frac{N}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \sigma^2 \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^{\frac{3}{2}}} \rightarrow -\frac{N}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \sigma^2 \int_{\frac{1}{4\pi\Lambda^2}}^{\infty} \frac{ds}{s^{\frac{3}{2}}} = -\frac{N}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \sigma^2 \frac{2\Lambda}{\sqrt{\pi}} = -N \frac{\Lambda}{2\pi^2} \sigma^2, \quad (7.76)$$

где мы сделали обрезание на нижнем пределе интегрирования такое, что ответ совпал с уже полученной формулой для эффективного потенциала для случая $B_{\perp} = 0$ (1.35), которая была получена, используя обрезание по импульсу.

Для регуляризованного эффективного потенциала получим выражение

$$V_{\text{eff}} = \frac{N}{2G} \sigma^2 - N \frac{\Lambda}{2\pi^2} \sigma^2 + \frac{N}{3\pi} \sigma^3 - \frac{N(2eB_{\perp})^{\frac{3}{2}}}{2\pi} \zeta \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sigma^2}{2eB_{\perp}} \right) + \frac{NeB_{\perp}\sigma}{2\pi}. \quad (7.77)$$

После перенормировки (1.36) получим для перенормированного эффективного потенциала

$$V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{N}{2g} \sigma^2 + \frac{N}{3\pi} \sigma^3 - \frac{N(2eB_{\perp})^{\frac{3}{2}}}{2\pi} \zeta \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sigma^2}{2eB_{\perp}} \right) + \frac{NeB_{\perp}\sigma}{2\pi}. \quad (7.78)$$

7.7 Введение химического потенциала и рассмотрение теории при ненулевой плотности

При введении химического потенциала мы должны рассматривать гамильтониан $H' = H - \mu N$, где μ химический потенциал, а число частиц $N = \int dx \psi^{\dagger} \psi = \int dx \bar{\psi} \gamma^0 \psi$. В отсутствие взаимодействия (на взаимодействие это не окажет никакого влияния) гамильтониан имеет вид $H = i \int dx \bar{\psi} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi = \int dx \bar{\psi} \gamma^{\mu} p_{\mu} \psi$. Таким образом, $H' = \int dx \bar{\psi} (\gamma^0 (p_0 - \mu) + \gamma^i p_i) \psi$.

В итоге введение химического потенциала соответствует замене

$$p_0 \rightarrow p_0 - \mu. \quad (7.79)$$

Если присутствует взаимодействие, то оно никак не изменится при этой замене, таким образом, это правило справедливо в случае взаимодействия произвольного вида только при условии, что взаимодействие зависит от спинорных полей, но не от их производных, то есть

исследуемое четырехфермионное взаимодействие, естественно, удовлетворяет этому условию.

Термодинамический потенциал n -мерной модели Гроссе-Неве при ненулевом химическом потенциале имеет вид

$$\Omega(\sigma) = \frac{1}{2G}\sigma^2 + i \int \frac{d^{n-1}p}{(2\pi)^n} \int dp_0 \ln(p^2 + \sigma^2 - (p_0 - \mu)^2). \quad (7.80)$$

Это выражение удобно представить в виде

$$\Omega(\sigma) = \frac{1}{2G}\sigma^2 + \int \frac{d^{n-1}p}{(2\pi)^n} \int d\sigma'^2 \left(i \int dp_0 \frac{1}{p^2 + \sigma'^2 - (p_0 - \mu)^2} \right). \quad (7.81)$$

Рассмотрим интеграл по p_0 в скобках

$$\begin{aligned} I &= \left(i \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{1}{p^2 + \sigma'^2 - (p_0 - \mu)^2} \right) = \\ &= i \int_0^{\infty} dp_0 \frac{1}{p^2 + \sigma'^2 - (p_0 - \mu)^2} + i \int_0^{\infty} dp_0 \frac{1}{p^2 + \sigma'^2 - (p_0 + \mu)^2}. \end{aligned} \quad (7.82)$$

Ясно что выражение симметрично при $\mu \rightarrow -\mu$. Для того чтобы правильно учесть химический потенциал, необходимо правильно обходить полюсы. Полюсы должны обходиться по следующему правилу: $p_0 \rightarrow p_0 + i\epsilon \text{sign}(p_0)$, где $\epsilon > 0, \epsilon \rightarrow 0$. Полюсы и их обход показаны на Рис. 7.1 в случае, когда два полюса являются положительными и два полюса являются отрицательными, что выполняется при условии $\mu > \sqrt{p^2 + \sigma'^2}$. В противоположном случае, когда один из отрицательных полюсов может перебраться в положительную область, и наоборот, обход этих полюсов изменяется на противоположный за счет $\text{sign}(p_0)$ в правиле обхода полюсов.

В обоих членах этого выражения сделаем виков поворот (Рис. 7.1). Учитывая, что интеграл по четверти окружности бесконечного радиуса, необходимой для замыкания контура интегрирования, равняется нулю $\int \frac{p_0 e^{i\phi} d\phi}{p_0^2 e^{2i\phi}} \approx \frac{1}{p_0} = \frac{1}{R} \rightarrow 0$.

$$I = i \int_0^{i\infty} d(ip_0) \frac{1}{p^2 + \sigma'^2 + (p_0 + i\mu)^2} + i \int_0^{i\infty} d(ip_0) \frac{1}{p^2 + \sigma'^2 + (p_0 - i\mu)^2}. \quad (7.83)$$

Ясно, что это выражение симметрично относительно замены $\mu \rightarrow -\mu$.

Удобнее перейти к интегрированию по действительной переменной.

$$I = - \int_0^{\infty} dp_0 \frac{1}{p^2 + \sigma'^2 + (p_0 + i\mu)^2} - \int_0^{\infty} dp_0 \frac{1}{p^2 + \sigma'^2 + (p_0 - i\mu)^2}. \quad (7.84)$$

Сделаем во втором члене замену переменной интегрирования $p_0 \rightarrow -p_0$

$$I = - \int_0^{\infty} dp_0 \frac{1}{p^2 + \sigma'^2 + (p_0 + i\mu)^2} - \int_{-\infty}^0 dp_0 \frac{1}{p^2 + \sigma'^2 + (p_0 + i\mu)^2} = \quad (7.85)$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{1}{p^2 + \sigma'^2 + (p_0 - i\mu)^2}, \quad (7.86)$$

где мы заменили $\mu \rightarrow -\mu$.

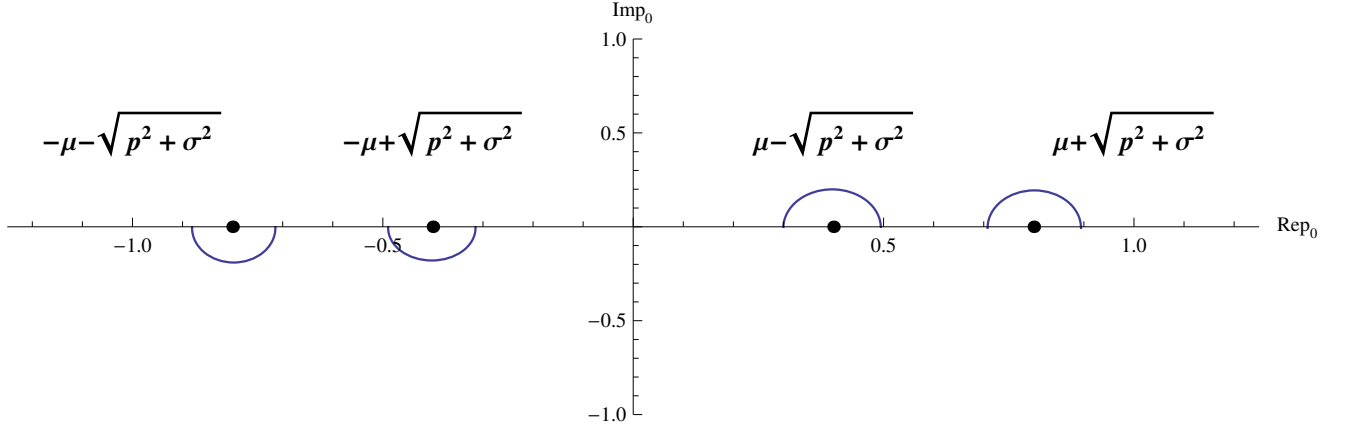


Рисунок 7.1 — Положение полюсов при интегрировании по p_0

Подставляя (7.86) в (7.81) и проинтегрировав по σ'^2 , получим выражение для термодинамического потенциала

$$\Omega(\sigma) = \frac{1}{2G}\sigma^2 - \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \ln(p^2 + \sigma^2 + (p_0 - i\mu)^2). \quad (7.87)$$

Для того чтобы перейти к конечной температуре, необходимо сделать замену $p_0 \rightarrow \frac{2\pi}{\beta}(n + \frac{1}{2})$, $\frac{1}{2\pi} \int dp_0 \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n$.

Таким образом, для того чтобы перейти от термодинамического потенциала при нулевой температуре и нулевом химическом потенциале к термодинамическому потенциалу при конечной температуре и ненулевом химическом потенциале, необходимо сначала выполнить виков поворот, а потом произвести замену

$$p_0 \rightarrow \frac{2\pi}{\beta}(n + \frac{1}{2}) - i\mu, \quad \frac{1}{2\pi} \int dp_0 \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n. \quad (7.88)$$

7.8 Вычисление термодинамического потенциала для (2+1)-мерной модели Гросса-Неве в присутствии магнитного поля при конечной температуре и ненулевом химическом потенциале

Для того чтобы вычислить термодинамический потенциал при ненулевой температуре и ненулевом химическом потенциале, необходимо в термодинамическом потенциале заменить интегрирование по импульсу p_0 на сумму по мацубаровским частотам (7.88)

$$\Omega(\sigma) = \frac{N}{2G}\sigma^2 - \frac{eB_{\perp}N}{2\pi} \frac{1}{\beta} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \ln \left(\left(\frac{2\pi}{\beta}(l + \frac{1}{2}) - i\mu \right)^2 + 2eB_{\perp}n + \sigma^2 \right). \quad (7.89)$$

Теперь, воспользовавшись формулой (7.4), вычислим сумму по l и получим

$$\Omega(\sigma) = \frac{N}{2G}\sigma^2 - iNtr \ln(i\gamma D - \sigma) + \Omega_{\mu\beta}(\sigma), \quad (7.90)$$

где

$$\Omega_{\mu\beta}(\sigma) = -\frac{eB_{\perp}}{2\pi\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \ln(1 + 2 \operatorname{ch}(\mu\beta) e^{-\beta\sqrt{\sigma^2 + 2eB_{\perp}n}} + e^{-2\beta\sqrt{\sigma^2 + 2eB_{\perp}n}}).$$

$$\Omega(\sigma) = \frac{N}{2G}\sigma^2 - N \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{eB_{\perp}}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \ln(p_0^2 + 2eB_{\perp}n + \sigma^2) + \Omega_{\mu\beta}(\sigma). \quad (7.91)$$

Первая часть этого выражения совпадает с термодинамическим потенциалом с нулевыми температурой и химическим потенциалом (7.65), который был вычислен в 7.6,

$$\Omega(\sigma) = \frac{N}{2g}\sigma^2 + \frac{N}{3\pi}\sigma^3 - \frac{N(2eB_{\perp})^{\frac{3}{2}}}{2\pi} \zeta\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sigma^2}{2eB_{\perp}}\right) + \frac{NeB_{\perp}\sigma}{2\pi} + \Omega_{\mu\beta}(\sigma). \quad (7.92)$$

То есть мы получили выражение для термодинамического потенциала при ненулевых химическом потенциале и температуре во внешнем магнитном поле.

$\Omega_{\mu\beta}(\sigma)$ можно привести к виду

$$\Omega_{\mu\beta}(\sigma) = -\frac{eB_{\perp}}{2\pi\beta} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \left(\ln(1 + e^{-\beta\sqrt{\sigma^2 + 2eB_{\perp}n} - \beta\mu}) + \ln(1 + e^{-\beta\sqrt{\sigma^2 + 2eB_{\perp}n} + \beta\mu}) \right). \quad (7.93)$$

Теперь перейдем к пределу нулевой температуры $T \rightarrow 0$. Ясно, что первый член выражения (7.93) стремится к нулю, а второй член этого выражения отличен от нуля, только если выражение, стоящее под экспонентой, положительно, что дает θ -функцию. β стремится к бесконечности, экспонента становится большой по сравнению с единицей, в итоге после взятия логарифма остается выражение, стоящее под экспонентой.

Для члена $\Omega_{\mu\beta}(\sigma)$ в выражении (7.92) в пределе нулевой температуры получаем

$$\Omega_{\mu\beta}(\sigma) = -\frac{eB_{\perp}}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} s_n (\mu - \sqrt{\sigma^2 + 2eB_{\perp}n}) \theta(\mu - \sqrt{\sigma^2 + 2eB_{\perp}n}). \quad (7.94)$$

В итоге для термодинамического потенциала при ненулевом химическом потенциале и нулевой температуре получаем

$$\begin{aligned} \Omega(\sigma) &= \frac{N}{2g}\sigma^2 + \frac{N}{3\pi}\sigma^3 - \frac{N(2eB_{\perp})^{\frac{3}{2}}}{2\pi} \zeta\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sigma^2}{2eB_{\perp}}\right) + \\ &+ \frac{NeB_{\perp}\sigma}{2\pi} - \frac{eB_{\perp}}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} s_n (\mu - \sqrt{\sigma^2 + 2eB_{\perp}n}) \theta(\mu - \sqrt{\sigma^2 + 2eB_{\perp}n}). \end{aligned} \quad (7.95)$$

7.9 Функциональный след

Оператор A действует в пространстве векторов состояния $\hat{A}|f\rangle$.

Воспользуемся соотношением $\int dy |y\rangle\langle y| = 1$

$$\hat{A}|f\rangle = \int d^n y \hat{A}|y\rangle\langle y|f\rangle. \quad (7.96)$$

Умножив это выражение на вектор $\langle x|$ перейдем к x представлению

$$\langle x|\hat{A}|f\rangle = \int d^n y \langle x|\hat{A}|y\rangle\langle y|f\rangle. \quad (7.97)$$

Это выражение можно переписать в виде

$$(\hat{A}f)(x) = \int d^n y A(x,y) f(y). \quad (7.98)$$

Теперь оператор \hat{A} действует в пространстве функций и задается своим ядром $A(x,y)$, которое должно сворачиваться с функцией, на которую он действует. Если он является оператором умножения на функцию $K(x)$, нужно положить $A(x,y) = K(x)\delta(x-y)$.

Tr от оператора определяется как

$$\text{Tr} \hat{A} = \int d^n x \langle x | \hat{A} | x \rangle = \int d^n x A(x,x). \quad (7.99)$$

Для произведения операторов AB получим

$$\begin{aligned} (\hat{A}\hat{B}f)(x) &= \int d^n y d^n z A(x,y) B(y,z) f(z), \\ \text{Tr} \hat{A}\hat{B} &= \int d^n x d^n y \langle x | \hat{A} | y \rangle \langle y | \hat{B} | x \rangle = \int d^n x d^n y A(x,y) B(y,x) \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда оператор является трансляционно инвариантным, $A(x,y) = A(x-y)$. В этом случае

$$\text{Tr} \hat{A} = A(0) \int d^n x. \quad (7.100)$$

Преобразование Фурье от $A(x,y)$ имеет вид

$$A(x-y) = \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} A(p) e^{-ip(x-y)}, \quad A(p) = \int dz A(x-y) e^{ipz}. \quad (7.101)$$

В итоге получим выражение для следа оператора

$$\text{Tr} \hat{A} = \frac{V}{(2\pi)^n} \int dp A(p), \quad (7.102)$$

где $V = \int d^n x$.

7.10 Получение асимптотики намагниченности при малом перпендикулярном магнитном поле

Возьмем последний член в формуле (4.55) и будем считать массовую щель равной нулю $M_0(B_\perp, \nu) = 0$

$$I = \frac{eB_\perp}{\pi |\vec{B}|} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \theta(\nu - \sqrt{2enB_\perp}) \left(2\nu - \frac{3}{2} \sqrt{2enB_\perp} \right). \quad (7.103)$$

Для того чтобы изучить асимптотическое поведение намагниченности при $B_\perp \rightarrow 0$, мы используем в (7.103) хорошо известную формулу Пуассона [109]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \Phi(n) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \int_0^{\infty} \Phi(x) \cos(2\pi kx) dx, \quad (7.104)$$

где $\alpha_k = 2 - \delta_{0k}$.

$$\begin{aligned} I &= \frac{2eB_{\perp}}{\pi|\vec{B}|} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \int_0^{\infty} \theta(\nu - \sqrt{2exB_{\perp}}) \left(2\nu - \frac{3}{2}\sqrt{2exB_{\perp}} \right) \cos(2\pi nx) dx = \\ &= \frac{2eB_{\perp}}{\pi|\vec{B}|} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \left(2\nu \frac{1}{2\pi l} \sin\left(\frac{\pi l \nu^2}{eB}\right) - \frac{3}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\nu^2}{2eB_{\perp}}} \sqrt{exB_{\perp}} \cos(2\pi nx) dx \right). \end{aligned} \quad (7.105)$$

Во втором члене этого выражения воспользуемся формулой, которую нетрудно получить с помощью интегрирования по частям,

$$\int \sqrt{x} \cos(ax) dx = -\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{a} \sqrt{x}\right) + \frac{1}{a} \sqrt{x} \sin(ax), \quad (7.106)$$

где $S(y)$ интеграл Френеля, $S(y) = \int_0^y \sin \frac{\pi x^2}{2} dx$.

Для второго члена в выражении (7.105) в результате получим

$$\frac{3eB_{\perp}^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{S(\sqrt{\frac{2n}{eB_{\perp}}}\nu)}{n^{\frac{3}{2}}} - \frac{3eB_{\perp}\nu}{2\pi^2|\vec{B}|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{\pi l \nu^2}{eB_{\perp}}\right). \quad (7.107)$$

Асимптотика на бесконечности $S(x)$ имеет вид

$$S\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \left(-\frac{2x}{\pi} + O(x^4) \right) \cos\left(\frac{\pi}{2x^2}\right) + \left(-\frac{2x^3}{\pi^2} + O(x^4) \right) \sin\left(\frac{\pi}{2x^2}\right) \right). \quad (7.108)$$

Учитывая асимптотику (7.108), ясно, что первый член в выражении (7.107) дает вклад $o(eB_{\perp})$.

В итоге для выражения (7.103) получили разложение до первого порядка относительно перпендикулярного магнитного поля

$$I = \frac{eB_{\perp}\nu}{2\pi^2|\vec{B}|} \sum_{k=0}^{\infty} s_k \frac{1}{k} \sin\left(\frac{\pi k}{eB_{\perp}}\nu^2\right). \quad (7.109)$$

Учитывая, что первый член выражения для намагниченности (4.55), соответствующий только перпендикулярному магнитному полю, вносит вклад $O((eB_{\perp})^{\frac{3}{2}})$, то есть его можно отбросить, получим асимптотику для намагниченности при $B_{\perp} \rightarrow 0$

$$m(|\vec{B}|, B_{\perp}) = \frac{\mu_B \nu^2}{2\pi} + \frac{\mu_B e B_{\perp}}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{\pi k}{eB_{\perp}}\nu^2\right) + o(eB_{\perp}). \quad (7.110)$$

7.11 Вычисление интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \ln(p_0 - a)$

Вычислим следующий интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \ln(p_0 - a).$$

Преобразуем его к следующему виду

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \ln(p_0 - a) &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \ln(p_0 - a) + \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \ln(-p_0 - a) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \ln(p_0 - a) + \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \ln(p_0 + a) \right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \ln(p_0 - a)(p_0 + a), \end{aligned}$$

где сделана замена $p_0 \rightarrow -p_0$ и отброшены члены, не зависящие от a .

Вычислим интеграл

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \ln(p_0^2 - a^2).$$

Для этого продифференцируем его по a^2

$$-\frac{dI(a)}{da^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{p_0^2 - a^2} = -\pi i \frac{1}{\sqrt{a^2}}.$$

Проинтегрировав по a , с точностью до членов, не зависящих от a , и учитывая $\frac{1}{2}$ получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \ln(p_0 - a) = \pi i \sqrt{a^2}.$$

7.12 Аналитическое продолжение Z-функции Эпштейна

Введем функции

$$\omega(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}, \quad \theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}.$$

Они связаны соотношением

$$\omega(x) = 1 + 2\theta(x).$$

Используя формулу (5.37), убеждаемся, что ω обладает следующим свойством

$$\omega(1/x) = x^{\frac{1}{2}} \omega(x). \quad (7.111)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s) Z(a, b, s) &= \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \sum_{(n, m) \neq (0, 0)} \frac{1}{(a^2 n^2 + b^2 m^2)^s} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-t} = \\ &= \int_0^{\infty} dt t^{s-1} \sum_{(n, m) \neq (0, 0)} e^{-\pi \left(\frac{a}{b} n^2 + \frac{b}{a} m^2\right) t}. \end{aligned}$$

Если в сумму добавить член с $n = 0, m = 0$, то она распадется на произведение ω -функций

$$\left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s) Z(a, b, s) = \int_0^{\infty} dt t^{s-1} \left(\omega\left(\frac{at}{b}\right) \omega\left(\frac{bt}{a}\right) - 1 \right).$$

Воспользовавшись формулой (5.49), получим следующее соотношение для функции $f(a, b, t) = \omega\left(\frac{at}{b}\right) \omega\left(\frac{bt}{a}\right) - 1$:

$$f(a, b, t) = \frac{1}{t} \left(f\left(a, b, \frac{1}{t}\right) + 1 \right) - 1. \quad (7.112)$$

Разбиваем интеграл по интервалу $[0, \infty)$ на интегралы по отрезку $[0, 1]$ и интервалу $[1, \infty]$ и делаем в первом из них замену $f(a, b, t)$ по приведенной формуле

$$\begin{aligned} \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s) Z(a, b, s) &= \int_0^1 \left(\frac{1}{t} \left(f\left(a, b, \frac{1}{t}\right) + 1\right) - 1\right) t^{s-1} dt + \int_1^\infty f(a, b, t) t^{s-1} dt = \\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_0^1 f\left(a, b, \frac{1}{t}\right) t^{s-2} dt + \int_1^\infty f(a, b, t) t^{s-1} dt. \end{aligned}$$

В первом интеграле делаем замену $t \rightarrow \frac{1}{t}$

$$= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty f(a, b, t) t^{-s} dt + \int_1^\infty f(a, b, t) t^{s-1} dt.$$

Объединяя оба интеграла и выражая результат через θ -функции, получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s) Z(a, b, s) &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(2\theta\left(\frac{at}{b}\right) + 2\theta\left(\frac{bt}{a}\right) + 4\theta\left(\frac{at}{b}\right)\theta\left(\frac{bt}{a}\right)\right) \times \\ &\quad \times (t^s + t^{1-s}) \frac{dt}{t}. \end{aligned} \quad (7.113)$$

Интеграл в правой части сходится при любом s . Таким образом, мы получили аналитическое продолжение Z -функции Эпштейна. Из формулы видно, что Z -функция имеет единственный полюс первого порядка в точке $s = 1$.

Очевидные свойства Z -функции

$$Res_{s=1} Z(a, b, s) = \frac{\pi}{ab}, \quad (7.114)$$

$$Z(a, b, s) = 0 \text{ в точках } s = -k, \quad Z(a, b, 0) = -1. \quad (7.115)$$

7.13 Аналитическое продолжение функции $Z(a, b, \alpha, s)$ и Z -функции Эпштейна

$$\begin{aligned} I_Z &= \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \Gamma(s) Z(a, b, \alpha, s) = \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \sum_{(n,m) \neq (0,0)} \frac{\cos(2\pi\alpha m)}{(a^2 n^2 + b^2 m^2)^s} \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-t} = \\ &= \left(\frac{ab}{\pi}\right)^s \int_0^\infty dt t^{s-1} \sum_{(n,m) \neq (0,0)} e^{-(a^2 n^2 + b^2 m^2)t} \cos(2\pi\alpha m). \end{aligned}$$

Сделав замену переменных, перепишем в виде

$$I_Z = \int_0^\infty dt t^{s-1} \sum_{(n,m) \neq (0,0)} e^{-\pi\left(\frac{a}{b}n^2 + \frac{b}{a}m^2\right)t} \cos(2\pi\alpha m).$$

Выделив в сумме слагаемое с $m = 0$

$$I_Z = \int_0^\infty dt t^{s-1} 2 \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi\frac{a}{b}n^2 t} + \int_0^\infty dt t^{s-1} \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=-\infty}^\infty e^{-\pi\left(\frac{a}{b}n^2 + \frac{b}{a}m^2\right)t} \cos(2\pi\alpha m) =$$

$$= 2\left(\pi\frac{a}{b}\right)^{-s}\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s}} + 2\sqrt{\frac{b}{a}}\int_0^{\infty} dt t^{s-\frac{3}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\frac{b}{a}\left(\frac{n^2}{t}+m^2t\right)}\cos(2\pi\alpha m).$$

В сумме по n выделим слагаемое с $n = 0$

$$I_Z = 2\left(\pi\frac{a}{b}\right)^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s) + 2\sqrt{\frac{b}{a}}\int_0^{\infty} dt t^{s-\frac{3}{2}}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi\frac{b}{a}(m^2t)}\cos(2\pi\alpha m) \quad (7.116)$$

$$+ 4\sqrt{\frac{b}{a}}\int_0^{\infty} dt t^{s-\frac{3}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi\frac{b}{a}\left(\frac{n^2}{t}+m^2t\right)}\cos(2\pi\alpha m).$$

Для третьего слагаемого в (7.116) воспользуемся формулой (5.49) и получим

$$4\sqrt{\frac{b}{a}}\int_0^{\infty} dt t^{s-\frac{3}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi\frac{b}{a}\left(\frac{n^2}{t}+m^2t\right)}\cos(2\pi\alpha m) = \quad (7.117)$$

$$= 8\sqrt{\frac{b}{a}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{m}\right)^{s-\frac{1}{2}}K_{s-\frac{1}{2}}\left(2\pi\frac{b}{a}nm\right)\cos(2\pi\alpha m).$$

Второе слагаемое в (7.116) равно

$$2\sqrt{\frac{b}{a}}\left(\pi\frac{b}{a}\right)^{-s+\frac{1}{2}}\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi\alpha m)}{m^{2s-1}}.$$

В случае $\alpha = 0$ воспользуемся известной формулой для ζ -функции

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) \quad (7.118)$$

и получим

$$2\sqrt{\frac{b}{a}}\left(\pi\frac{b}{a}\right)^{-s+\frac{1}{2}}\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)\zeta(2s-1) = 2\left(\frac{a}{b}\right)^{s-1}\pi^{s-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)\zeta(1-2s). \quad (7.119)$$

В итоге для случая $\alpha = 0$ получаем

$$\left(\frac{ab}{\pi}\right)^s\Gamma(s)Z(a,b,s) = 2\left(\pi\frac{a}{b}\right)^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s) + 2\left(\frac{a}{b}\right)^{s-1}\pi^{s-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)\zeta(1-2s) + \quad (7.120)$$

$$+ 8\sqrt{\frac{b}{a}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{m}\right)^{s-\frac{1}{2}}K_{s-\frac{1}{2}}\left(2\pi\frac{b}{a}nm\right)\cos(2\pi\alpha m).$$

В случае $\alpha \neq 0, \alpha \neq \frac{1}{2}$ воспользуемся формулой

$$d\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi\alpha n)}{n^s} = \frac{(2\pi)^s}{4\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}(\zeta(1-s,\alpha) + \zeta(1-s,1-\alpha)). \quad (7.121)$$

Итого получаем в случае $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$

$$\left(\frac{ab}{\pi}\right)^s\Gamma(s)Z(a,b,\alpha,s) = 2\left(\pi\frac{a}{b}\right)^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s) + \quad (7.122)$$

$$\begin{aligned}
& + 2\pi^{-s+\frac{1}{2}} \left(\frac{a}{b}\right)^{s-1} \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) \frac{(2\pi)^{2s-1}}{4\Gamma(2s-1) \cos\left(\pi\left(s - \frac{1}{2}\right)\right)} (\zeta(2-2s, \alpha) + \\
& + \zeta(2-2s, 1-\alpha)) + 8\sqrt{\frac{b}{a}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m}\right)^{s-\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}\left(2\pi\frac{b}{a}nm\right) \cos(2\pi\alpha m).
\end{aligned}$$

Это выражение дает аналитическое продолжение функции Z на всю комплексную плоскость, за исключением точек $s = \frac{1}{2}, s = 1$, где она имеет полюсы 1-го порядка.

Видно, что, хотя \cos в знаменателе обращается в ноль в точках $s = n + 1, n \in \mathbb{N}$ в ноль, функция, стоящая в правой части выражения (7.122), не имеет полюсов в этих точках, так как сумма ζ -функций, стоящая в скобках, также обращается в ноль в этих точках. Это можно показать, используя формулу для ζ -функции Харвитца

$$\zeta(-m, \alpha) = -\frac{B_{m+1}(\alpha)}{m+1}, \text{ где } B_m(\alpha) \text{ — полиномы Бернулли,}$$

$$\zeta(-2m, \alpha) + \zeta(-2m, 1-\alpha) = -\frac{B_{2m+1}(\alpha) + B_{2m+1}(1-\alpha)}{2m+1} = 0,$$

так как для полиномов Бернулли выполняется следующее свойство

$$B_{2m+1}(\alpha) + B_{2m+1}(1-\alpha) = 0. \quad (7.123)$$

Это свойство нетрудно доказать, пользуясь определением полиномов Бернулли

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

Запишем сумму

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} + \frac{te^{(1-x)t}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (B_n(x) + B_n(1-x)) \frac{t^n}{n!}.$$

Видим, что левая часть этого выражения симметрична относительно замены $t \rightarrow -t$ при любых $x > 0$ и t . Значит, правое выражение также симметрично относительно этой замены, поэтому коэффициенты при нечетных степенях t должны обращаться в ноль, что и доказывает свойство (7.123).