Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра физики высоких энергий

Институт физики высоких энергий

Хабаров М.В.

Дуальное калибровочно-инвариантное описание массивных полей произвольного спина

Бакалаврская работа

Научный руководитель
д.ф.-м.н. Зиновьев Ю.М.,
НИЦ "Курчатовский институт" - ИФВЭ,
МФТИ(ГУ)

Протвино   Июнь 2017

Содержание

1 Введение

Изучение частиц с высшими спинами важно по нескольким причинам. Во-первых, элементарные частицы со спином $s > 1$ до сих пор не были обнаружены, а потому теория, описывающая такие частицы, представляет интерес сама по себе, так как может оказаться весьма полезной в поиске физики за пределами стандартной модели. Во-вторых, такая теория также описывает поведение составных частиц с высшими спинами, например, атомные ядра, при малых переданных импульсах. И наконец, бесконечные цепочки взаимодействующих частиц с неограниченно возрастающими спинами с неизбежностью возникают в теории суперструн.

Основы теории высших спинов были заложены еще Дираком [1]. Долгое время ее основной задачей описание составных частиц. Изучение же элементарных частиц и фундаментальных взаимодействий с высшими спинами началось позднее - в 70-х годах. Тогда были построены лагранжианы для бозонов [2] и фермионов [3] произвольного спина, а также исследованы безмассовые пределы этих полей; для лагранжианов безмассовых также были найдены не меняющие их калибровочные преобразования [4, 5]. Результат для фермионов был обобщен на пространство dS [6].

Однако, введение взаимодействия для безмассовых частиц наталкивается на определенные трудности. Это связано с тем, что стандартный способ описания взаимодействия между полями предполагает инвариантность лагранжиана полей относительно некоторой группы калибровочных преобразований. Для некоторых полей удается указать способ построения вершин взаимодействия [7], однако для произвольного набора полей ввести калибровочно-инвариантное взаимодействие невозможно [8]. Обойти данную проблему можно, рассматривая семейства взаимодействующих частиц с возрастающими спинами[9] в пространстве постоянной кривизны.

Калибровочно-инвариантное описание удается построить не только для безмассовых частиц, обладающих двумя спиральностями, но и для полей, соответствующих двум другим унитарным представлениям группы Пуанкаре (не считая тахионного): массивному представлению и представлению бесконечного спина. Последнее представление является безмассовым, однако, в отличие от представления спиральности, у такой частицы проекция спина на направление импульса может быть любым целым или полуцелым числом [10]. Основная идея калибровочно-инвариантного описания массивных полей - это ввести для частицы со спином s $(s+\frac{1}{2})$ набор из $s-1$ вспомогательных полей со спинами $s-1, s-2, \ldots 0 (s-\frac{1}{2}, s-\frac{3}{2}, \ldots \frac{1}{2})$, и записать итоговый лагранжиан как сумму s безмассовых лагранжианов, а также перекрестных и массовых членов. Данный подход может быть использован и для описания частиц с бесконечным спином [11, 12], с тем лишь отличием, что теперь необходимо использовать бесконечное число полей со спинами $0, 1, 2, \ldots$ $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \ldots)$. В пространстве (A)dS также было построено калибровочно-инвариантное описание массивных частиц с высшими спинами [13, 14].

В работе [15] был предложен другой подход к описанию безмассовых частиц с высшими спинами, аналогичный тетрадному формализму в теории гравитации, а потому названный реперным формализмом. Позднее, он так же был обобщен для пространства (A)dS произвольной размерности [16, 17] и для массивных частиц [18, 19]. Данный подход упрощает выкладки при исследовании взаимодействия частиц [20, 21]. Тем не менее, физические свойства частицы не зависят от используемых обозначений, а потому в ее описании существует дуальность: одно и то же поле может быть описано как в рамках метрического формализма, так и в рамках реперного.

Цель данной работы - разработать калибровочно-инвариантное описание массивных частиц и частиц с бесконечным спином (бозонов и фермионов) в метрическом и реперном лагранжевых формализмах в d-мерном пространстве постоянной кривизны. Описание частицы в метрическом формализме обсуждается в разделе 2, а в реперном - в разделе 3. В приложении 1 будут перечислены используемые в работе обозначения. Свойства пространств постоянной кривизны, в особенности, вопрос об определении массы в них, будут перечислены в приложении 2. Наконец, в приложении 3 будут выписаны некоторые используемые в разделе о реперном формализме калибровочные преобразования.

2 Метрический формализм

2.1 Бозоны

Для безмассового бозонного поля со спином $s > 2$ в плоском пространстве лагранжиан имеет вид [4]:

$$
\begin{aligned}
(-1)^s {\mathcal{L}_0}^{(s)} =& \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi_{\beta(s)} \partial^\mu \Phi^{\beta(s)} - \frac{s}{2}(\partial\Phi)_{\beta(s-1)}(\partial\Phi)^{\beta(s-1)} + \frac{s(s-1)}{2}\partial_\beta \tilde{\Phi}_{\beta(s-2)}(\partial\Phi)^{\beta(s-1)} \\
& - \frac{s(s-1)}{4}\partial_\mu \tilde{\Phi}_{\beta(s-2)}\partial^\mu \tilde{\Phi}^{\beta(s-2)} - \frac{s(s-1)(s-2)}{8}(\partial\tilde{\Phi})^{\beta(s-3)}(\partial\tilde{\Phi})^{\beta(s-3)}
\end{aligned} \tag{1}
$$

Здесь Φ - дважды бесследовый тензор: $\tilde{\tilde{\Phi}} = 0$ (обозначения приведены в разделе 5.1). Формула (1) применима также для частиц со спином $s \leq 2$, если в ней оставить только слагаемые с ненулевыми коэффициентами. Данный лагранжиан является инвариантным относительно калибровочных преобразований вида:

$$
\delta_0 \Phi_{\beta(k)} = \partial_\beta \xi_{\beta(k-1)} \tag{2}
$$

где $\xi_\beta(k-1)$-симметричный бесследовый тензор. Однако данная инвариантность нарушается при введении массовых членов, или при переходе от плоского пространства к (A)dS.

Для того, чтобы построить калибровочно-инвариантную теорию для массивного поля, введем дополнительно поля со спинами $0, 1 \ldots (s-1)$. Выберем результирующий лагранжиан $\mathcal{L}$ в виде суммы лагранжианов для безмассовых полей $\mathcal{L}_0$, к которой прибавлены все возможные перекрестные члены с одной производной $\mathcal{L}_1$ и массовые члены $\mathcal{L}_2$ [13]:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} =& \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2, \\
\mathcal{L}_0 =& \sum_{k=3}^{s}(-1)^k \left[\frac{1}{2}D_\mu \Phi_{\beta(k)} D^\mu \Phi^{\beta(k)} - \frac{k}{2}(D\Phi)_{\beta(k-1)}(D\Phi)^{\beta(k-1)} + \frac{k(k-1)}{2} D_\beta \tilde{\Phi}_{\beta(k-2)}(D\Phi)^{\beta(k-1)} \right. \\
& \left. - \frac{k(k-1)}{4} D_\mu \tilde{\Phi}_{\beta(k-2)} D^\mu \tilde{\Phi}^{\beta(k-2)} - \frac{k(k-1)(k-2)}{8}(D\tilde{\Phi})_{\beta(k-3)}(D\tilde{\Phi})^{\beta(k-3)} \right] \\
& + \left[\frac{1}{2} D_\mu \Phi_{\beta(2)} D^\mu \Phi^{\beta(2)} - (D\Phi)_\beta (D\Phi)^\beta + D_\beta \tilde{\Phi}(D\Phi)^\beta - \frac{1}{2} D_\mu \tilde{\Phi} D^\mu \tilde{\Phi} \right] \\
& - \frac{1}{2}\left[D_\mu \Phi_\beta D^\mu \Phi^\beta - (D\Phi)_\beta (D\Phi)^\beta \right] + \frac{1}{2} D_\mu \Phi D^\mu \Phi \\
\mathcal{L}_1 =& \sum_{k=3}^{s}(-1)^k \left[a_k \Phi^{\beta(k)} D_\beta \Phi_{\beta(k-1)} + b_k \tilde{\Phi}^{\beta(k-2)}(D\Phi)_{\beta(k-2)} + c_k \tilde{\Phi}^{\beta(k-2)} D_\beta \tilde{\Phi}_{\beta(k-3)} \right] \\
& + \left[a_2 \Phi^{\beta(2)} D_\beta \Phi_\beta + b_2 \tilde{\Phi}(D\Phi) \right] - a_1 \Phi^\beta D_\beta \Phi \\
\mathcal{L}_2 =& \sum_{k=2}^{s}(-1)^k \left[d_k \Phi^{\beta(k)} \Phi_{\beta(k)} + e_k \tilde{\Phi}^{\beta(k-2)} \tilde{\Phi}_{\beta(k-2)} + f_k \tilde{\Phi}^{\beta(k-2)} \Phi_{\beta(k-2)} \right] - d_1 \Phi^\beta \Phi_\beta + d_0 \Phi^2
\end{aligned} \tag{3}
$$

При этом данный лагранжиан также может быть использован для описания частиц с бесконечным спином, если положить в нем $s = \infty$. Требование инвариантности лагранжиана относительно калибровочных преобразований вида

$$
\begin{aligned}
\delta\Phi_{\beta(k)} &= D_\beta \xi_{\beta(k-1)} + \alpha_k g_{\beta(2)} \xi_{\beta(k-2)} + \beta_k \xi_{\beta(k)}, && k \geq 2 \\
\delta\Phi_\beta &= D_\beta \xi + \beta_1 \xi_\beta \\
\delta\Phi &= \beta_0 \xi
\end{aligned} \tag{4}
$$

приводит к следующим выражениям всех коэффициентов через a_k и d_k:

$$
\begin{aligned}
b_k &= -(k-1)a_k & \alpha_k &= \frac{a_k}{d+2k-5} & \beta_k &= \frac{a_{k+1}}{k+1} \\
c_k &= \frac{(k-1)(k-2)}{4} a_k & f_k &= -\frac{a_k a_{k-1}}{2} \\
e_k &= \frac{(k-1)a_k^2}{4} - \frac{a_{k+1}^2 k(k-1)(d+2k)}{8(k+1)(d+2k-4)} - \frac{\kappa k(k-1)(k^2+(d-3)k-d)}{4}
\end{aligned} \tag{5}
$$

а также к двум рекуррентным соотношениям на a_k, d_k:

$$
\begin{aligned}
\frac{(d+2k)a_{k+2}^2}{(k+2)(d+2k-2)} - \frac{2(d+2k-3)a_{k+1}^2}{(k+1)(d+2k-4)} + \frac{a_k^2}{k} &= -\,2\kappa(2k-3+d), \qquad k \in \overline{1, s-1} \\
2d_k - \frac{2(d+2k-3)a_{k+1}^2}{(k+1)(d+2k-4)} + \frac{a_k^2}{k} &= \kappa(k^2+(d-6)k-2d+6), \ k \in \overline{1, s}
\end{aligned} \tag{6}
$$

Здесь следует считать $a_{s+1} = 0$. Для бесконечного спина верны те же соотношения, но теперь $k \in \overline{1, \infty}$.

Сначала рассмотрим случай конечного s. Разрешая (6), мы получаем:

$$
a_k^2 = \frac{k(s+1-k)(s+k+d-4)}{(d+2k-4)} \left[m^2 - \kappa(s-k)(s+k+d-5)\right] \tag{7}
$$

$$
d_k = \frac{(s-1-k)(s+k+d-2)}{2(d+2k-2)} \left[m^2 - \kappa(s-k-2)(s+k+d-3)\right] + \frac{\kappa k(d+k-2)}{2} \tag{8}
$$

Здесь m - параметр массы, выбранный так, чтобы m было бы пропорционально b_s и чтобы в плоском пространстве выполнялось соотношение $m^2 = -d_s$ (см. приложение 2 про определение массы в пространстве (A)dS). Для вещественности лагранжиана необходимо, чтобы выполнялись условия:

$$
m^2 \geq \kappa(s-k)(s+k+d-5), \qquad k \in \overline{1, s} \tag{9}
$$

В плоском пространстве и в пространстве AdS это приводит к условию $m^2 \geq 0$, причем случай $m = 0$ соответствует отделению поля со спином s, т.е. безмассовому пределу. В пространстве dS $\kappa > 0$, и тем самым на массу накладывается ограничение

$$
m^2 \geq \kappa(s-1)(s+d-4) \tag{10}
$$

Случай равенства соответствует отделению скалярного поля. Кроме того, существуют также решения вида

$$m^2 = \kappa(s-k)(s+d-5+k), \qquad k \in \overline{2,s} \tag{11}$$

при которых лагранжиан распадается на два слагаемых, из которых первое содержит только поля со спинами $\overline{0,k-1}$, а второе - только со спинами $\overline{k,s}$; при этом мнимые коэффициенты возникнут только в первом слагаемом. Таким образом, если оставить только второе слагаемое, то полученная теория будет унитарной и калибровочно-инвариантной. Ситуация, когда у поля физически реализуются только поляризации $\overline{k,s}$, называется частично безмассовым пределом. В данном случае возможны $s-2$ частично безмассовых предела, соответствующих условию (11) при $k \in \overline{1,s-1}$, и безмассовый предел для случая $m^2 = 0$, т.е. $k = s$ [13].

В случае бесконечного спина выразим a_k и d_k через a_1 и d_0:

$$\begin{aligned} a_k^2 = {} & \frac{k}{(d+2k-4)}\big[-\kappa(k-1)(k-2)(d+k-3)(d+k-4) \\ & + 2d_0(k-1)(d+k-4) - a_1(k-2)(d+k-3)\big] \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} d_k = {} & \frac{1}{2(d+2k-2)^2}\big[-\kappa k(k+d-2)\left[(k+3)(k+d+1)-(d+2k)(d+2k-6)\right] \\ & + 2d_0k(k+d-3) - a_1(k-1)(d+k-2)\big] \end{aligned} \tag{13}$$

Исследуем, при каких параметрах возможен случай бесконечного спина. Для этого перепишем (12) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{16a_k^2(d+2k-4)}{k} = & -\kappa y^2 + \left[8d_0 - 4a_1^2 + 2\kappa(d-2)^2\right] y \\ & - (d-2)[8(d-4)d_0 - 4da_1^2 + \kappa d(d-2)(d-4)] \end{aligned} \tag{14}$$

где $y = (d+2k-4)(d+2k-6)$. Из (14) видно, что бесконечный спин возможен только в плоском пространстве и в AdS. Поэтому дальше разберем эти два случая. В плоском пространстве условия вещественности лагранжиана принимают вид:

$$2d_0 \geq a_1^2 > 0 \tag{15}$$

Это соответствует условию $\mu_1 > 0, \mu_0 \leq 0$ в работе [11]. В случае бесконечного спина также может возникнуть ситуация, аналогичная рассмотренному выше частично безмассовому пределу со спином s. Для того, чтобы лагранжиан разделился на два слагаемых, в которые входят поля со спинами $\overline{0,k-1}$ и $\overline{k,+\infty}$ соответственно, должны выполняться условия:

$$\begin{gathered} 2d_0 > a_1^2 \\ 2d_0(k-1)(d+k-4) = a_1^2(k-2)(d+k-3) \end{gathered} \tag{16}$$

Следует подчеркнуть, что в случае частично безмассового предела a_1 может быть мнимым. Это соответствует условию $\mu_1 = s(s+d-2)\mu_0$ в работе [11].

Для случая пространства AdS условие усложняется. Необходимо и достаточно, чтобы выполнялись или условие (17):

$$\begin{aligned} 2d_0 - a_1^2 \geq& \kappa(d-2) \\ a_1^2 >& 0 \end{aligned} \tag{17}$$

или условие (18):

$$\begin{aligned} &\exists k \in \mathbb{N}: \qquad 2\kappa(k+1)(k+d-4) < 2d_0 - a_1^2 + (3d-10)\kappa \leq 2\kappa k(k+d-5) \\ &\kappa < \frac{2d_0}{(k-2)(k+d-3)} - \frac{a_1^2}{(k-1)(k+d-4)} \\ &\kappa < \frac{2d_0}{(k-1)(k+d-2)} - \frac{a_1^2}{k(k+d-3)} \end{aligned} \tag{18}$$

Эти условия соответствуют случаям $AdS{-}I$ и $AdS{-}II/AdS{-}III$ в работе [11]. Условия для частично безмассового предела с полями $\overline{k,+\infty}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{2d_0}{(k-2)(k+d-3)} - \frac{a_1^2}{(k-1)(k+d-4)} \\ 2d_0 &< \frac{a_1^2(k+d-2)(k-2)}{(k+d-4)k} \end{aligned} \tag{19}$$

В работе [11] этому соответствуют условия

$$\begin{aligned} &\mu_1 = s(s+d-2)(\mu_0 - |\rho|(s+1)(s+d-3)) \\ &2|\rho|s(s+d-3) < \mu_0 < 2|\rho|(s+1)(s+d-2) \end{aligned} \tag{20}$$

2.2 Фермионы

Для безмассового фермионного поля со спином $s+\frac{1}{2}$, где $s>1$ в плоском пространстве лагранжиан имеет вид [5]:

$$
\begin{aligned}
(-1)^s\mathcal{L}^{(s)} = i\Big[&\bar{\Psi}^{\mu(s)}\not{\partial}\,\Psi_{\mu(s)} - s\left((\bar{\Psi}\gamma)^{\mu(s-1)}(\partial\Psi)_{\mu(s-1)} + (\bar{\Psi}\partial)^{\mu(s-1)}(\gamma\Psi)_{\mu(s-1)}\right)\\
&+ s(\bar{\Psi}\gamma)^{\mu(s-1)}\not{\partial}\,(\gamma\Psi)_{\mu(s-1)} + \frac{s(s-1)}{2}\left((\bar{\Psi}\gamma\partial)^{\mu(s-2)}\tilde{\Psi}_{\mu(s-2)} + \tilde{\bar{\Psi}}^{\mu(s-2)}(\partial\gamma\Psi)_{\mu(s-2)}\right)\\
&- \frac{s(s-1)}{4}\tilde{\bar{\Psi}}^{\mu(s-2)}\not{\partial}\,\tilde{\Psi}_{\mu(s-2)}\Big]
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Здесь $\Psi^{\mu(s)}$ - полностью симметричный тензор-спинор, удовлетворяющий условию $(\gamma\tilde{\Psi})=0$ (обозначения приведены в разделе 5.1). Формула (1) применима также для частиц со спином $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2}$, если в ней оставить только слагаемые с ненулевыми коэффициентами. Данный лагранжиан является инвариантным относительно калибровочных преобразований вида:

$$
\delta_0\Psi^{\mu(s)} = \partial^\mu\eta^{\mu(s-1)}
\tag{22}
$$

где $\eta^{\mu(s-1)}$-симметричный тензор-спинор, удовлетворяющий условию $(\gamma\eta)=0$

Для того, чтобы построить калибровочно-инвариантную теорию для массивного поля в (A)dS, аналогично случаю бозонного поля введем набор полей со спинами $\frac{1}{2},\frac{3}{2}\dots s-\frac{1}{2}$ и рассмотрим лагранжиан $\mathcal{L}$, образованный суммой свободных лагранжианов $\mathcal{L}_0$, к которым добавлены все возможные перекрестные и массовые слагаемые $\mathcal{L}_1$ [14]:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} =&\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1,\\
\mathcal{L}_0 =&\sum_{k=2}^{s}(-1)^k i\Big[\bar{\Psi}^{\mu(s)}\not{D}\Psi_{\mu(s)} - s\left((\bar{\Psi}\gamma)^{\mu(s-1)}(D\Psi)_{\mu(s-1)} + (\bar{\Psi}D)^{\mu(s-1)}(\gamma\Psi)_{\mu(s-1)}\right)\\
&+s(\bar{\Psi}\gamma)^{\mu(s-1)}\not{D}(\gamma\Psi)_{\mu(s-1)} + \frac{s(s-1)}{2}\left((\bar{\Psi}\gamma D)^{\mu(s-2)}\tilde{\Psi}_{\mu(s-2)} + \tilde{\bar{\Psi}}^{\mu(s-2)}(\gamma D\Psi)_{\mu(s-2)}\right)\\
&-\frac{s(s-1)}{4}\tilde{\bar{\Psi}}^{\mu(s-2)}\not{D}\tilde{\Psi}_{\mu(s-2)}\Big] - i\Big[\bar{\Psi}^\mu\not{D}\Psi_\mu - \big((\bar{\Psi}\gamma)(D\Psi) + (\bar{\Psi}D)(\gamma\Psi)\big) + (\bar{\Psi}\gamma)\not{D}(\gamma\Psi)\Big]\\
&+i\bar{\Psi}\not{D}\Psi\\
\mathcal{L}_1 =&\sum_{k=2}^{s}(-1)^k\Big[a_k\bar{\Psi}^{\mu(k)}\Psi_{\mu(k)} + b_k(\bar{\Psi}\gamma)^{\mu(k-1)}(\gamma\Psi)_{\mu(k-1)} + c_k\tilde{\bar{\Psi}}_{\mu(k-2)}\tilde{\Psi}^{\mu(k-2)}\\
&+id_k\left((\bar{\Psi}\gamma)_{\mu(k-1)}\Psi^{\mu(k-1)} - \bar{\Psi}^{\mu(k-1)}(\gamma\Psi)_{\mu(k-1)}\right)\\
&+ie_k\left(\tilde{\bar{\Psi}}_{\mu(k-2)}(\gamma\Psi)^{\mu(k-2)} - (\bar{\Psi}\gamma)_{\mu(k-2)}\tilde{\Psi}^{\mu(k-2)}\right)\Big]\\
&+\Big[a_1\bar{\Psi}^\mu\Psi_\mu + b_1(\bar{\Psi}\gamma)(\gamma\Psi) + id_1\left((\bar{\Psi}\gamma)\Psi - \bar{\Psi}(\gamma\Psi)\right)\Big] + a_0\bar{\Psi}\Psi
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Аналогично бозонному случаю, данное выражение применимо и для описания частиц с бесконечным спином, если подставить $s = \infty$. Требование инвариантности относительно калибровочных преобразований вида

$$\begin{aligned}\delta\Psi_{\mu(k)} =& D_\mu\eta_{\mu(k-1)} + i\alpha_k\gamma_\mu\eta_{\mu(k-1)} + \beta_k\eta_{\mu(k)} + \rho_k g_{\mu(2)}\eta_{\mu(k-2)}, \qquad k \geq 2\\ \delta\Psi_\mu =& D_\mu\eta + i\alpha_1\gamma_\mu\eta + \beta_1\eta_\mu\\ \delta\Psi =& \beta_0\eta\end{aligned} \tag{24}$$

приводит к следующим выражениям для коэффициентов через a_k, d_k:

$$\begin{aligned} b_k &= -ka_k, & c_k &= -\frac{k(k-1)}{4}a_k, & e_k &= -\frac{k-1}{2}d_k\\ \alpha_k &= -\frac{a_k}{d+2k-4}, & \beta_k &= -\frac{d_{k+1}}{k+1}, & \rho_k &= -\frac{d_k}{d+2k-4}\end{aligned} \tag{25}$$

а также к рекуррентным соотношениям на a_k,d_k:

$$\begin{aligned} (d+2k-4)a_{k-1} &= (d+2k-2)a_k, \qquad\qquad k \geq s\\ \frac{d_k^2}{k(d+2k-4)} - \frac{d_{k+1}^2}{(k+1)(d+2k-2)} &= \frac{\kappa(d+2k-3)}{4} + \frac{a_k^2(d+2k-3)}{(d+2k-4)^2}, \qquad k \geq s\end{aligned} \tag{26}$$

Здесь $d_{s+1} = 0$, если s конечно.

Для масивного поля со спином s соотношения (26) дают:

$$\begin{aligned} a_k^2 &= \frac{(d+2s-2)^2}{(d-2+2k)^2}\left[m^2 - \kappa\frac{(d+2s-4)^2}{4}\right]\\ d_k^2 &= \frac{k(s-k+1)(d-3+s+k)}{d+2k-4}\left[m^2 - \kappa(s-k)(d+k+s-4)\right]\end{aligned} \tag{27}$$

Здесь m - параметр, выбранный за массу поля. Аналогично случаю бозона, при нулевом d_k лагранжиан распадается на два слагаемых: поля со спинами $\overline{\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}$ и $\overline{k+\frac{1}{2}, s+\frac{1}{2}}$. Для вещественности лагранжиана необходимо, чтобы выполнялись условия:

$$m^2 \geq \kappa(s-k)(s+k+d-4), \qquad k \in \overline{1,s} \tag{28}$$

Как и в случае бозонного поля, в плоском пространстве и в пространстве AdS накладывается ограничение $m^2 \geq 0$, причем случай $m = 0$ соответствует отделению поля со спином $s + \frac{1}{2}$, а в пространстве dS на массу или накладывается ограничение

$$m^2 \geq \kappa(s-1)(s+d-3), \qquad k \in \overline{1,s} \tag{29}$$

или выполняется равенство

$$m^2 = \kappa(s-k)(s+d-4+k), \qquad k \in \overline{1,s} \tag{30}$$

при которых возникает безмассовый или частично безмассовый предел - остается лагранжиан, в который входят поля спина $\overline{k+\frac{1}{2}, s+\frac{1}{2}}$ [14].

В случае бесконечного спина выразим a_k и d_k^2 через a_0 и d_1:

$$a_k = \frac{a_0(d-2)}{d-2+2k} \tag{31}$$

$$d_k^2 = \frac{k}{(d+2k-4)}\left[\frac{d_1^2(d+2k-4)^2}{(d-2)} - a_0^2(k-1)(d+k-3) - \frac{\kappa(d+2k-4)^2(k-1)(d+k-3)}{4}\right] \tag{32}$$

Исследуем, при каких параметрах возможен случай бесконечного спина. Для этого перепишем (32) в виде:

$$\frac{16d_k^2(d+2k-4)}{k} = -\kappa y^2 + \left[\frac{16d_1^2}{(d-2)} - 4a_0^2 - \kappa(d-2)^2\right]y + 16d_1^2(d-2) \tag{33}$$

где $y = 4(k-1)(d+k-3)$. Из (14) видно, что бесконечный спин возможен только в плоском пространстве и в AdS. Поэтому дальше разберем эти два случая. В плоском пространстве условия вещественности лагранжиана имеют вид:

$$\begin{aligned} &4d_1^2 \geq a_0^2(d-2) \\ &4d_1^2 > 0 \end{aligned} \tag{34}$$

Эти условия соответствуют $\mu_0 < 0 \vee (\mu_0 = 0 \wedge \kappa_0 \neq 0)$ в работе [12]. Частично безмассовый предел для полей со спинами $\overline{k, +\infty}$ реализуется при:

$$\begin{aligned} &d_1^2 = \frac{a_0^2(d-2)(k-1)(d+k-3)}{(d+2k-4)^2} \\ &a_0^2 \geq 0 \end{aligned} \tag{35}$$

Это соответствует $\kappa_0^2 = \left(s + \dfrac{d+1}{2}\right)^2 \mu_0$ в [12]

Для случая пространства AdS необходимо и достаточно, чтобы выполнялось или условие:

$$0 < 16d_1^2 < 4a_0^2(d-2) + \kappa(d-2)^3 \tag{36}$$

или условия:

$$\begin{aligned} &\exists k \in \mathbb{N}: \quad 8\kappa k(k+d-2) < 4a_0^2 - \frac{16d_1^2}{(d-2)} + \kappa(d-2)^2 \leq 8\kappa(k-1)(k+d-3) \\ &\kappa < \frac{4d_1^2}{(k-1)(d-2)(d+k-3)} - \frac{4a_0^2}{(d+2k-4)^2} \\ &\kappa < \frac{4d_1^2}{k(d-2)(d+k-2)} - \frac{4a_0^2}{(d+2k-2)^2} \end{aligned} \tag{37}$$

В работе [12] этим условиям отвечают случаи $AdS - I$ и $AdS - II/AdS - III$ соответственно. Условия для частично безмассового предела с полями $\overline{k, +\infty}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{4d_1^2}{(k-1)(d-2)(d+k-3)} - \frac{4a_0^2}{(d+2k-4)^2} \\ d_1^2 &> \frac{4a_0^2 k(k-1)(d-2)(d+k-3)(d+k-2)}{(d+2k-2)^2(d+2k-4)^2} \end{aligned} \tag{38}$$

Эти условия соответствуют следующим условиям в работе [12]:

$$\begin{aligned} &\kappa_0^2 = \left(s + \frac{d-1}{2}\right)^2 m^2 \\ &|\rho| \left(s + \frac{d-3}{2}\right)^2 < m^2 < |\rho| \left(s + \frac{d+1}{2}\right)^2 \end{aligned} \tag{39}$$

3 Реперный формализм

3.1 Бозоны

Перейдем к рассмотрению частиц в реперном формализме. Рассмотрим произвольную точку, и введем в некоторой ее окрестности d векторных полей $\mathbf{e}_a$, таких, что $\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = \eta_{ab}$ и соответствующие им ковектора $\hat{\mathbf{e}}^a$ Таким образом, эти поля образуют ортонормированный репер, связанный с мировым базисом соотношением $\mathbf{e}_\mu = e_\mu{}^a \mathbf{e}_a$; аналогичное утверждение $\hat{\mathbf{e}}^\mu = \hat{e}^\mu{}_a \hat{\mathbf{e}}^a$ верно для корепера.

Для описания бозонного поля со спином $s \geq 3$ в реперном формализме вводится поле $\Phi_\mu{}^{a(s-1)}$ (обозначения приведены в разделе 5.1), симметричное и бесследовое по локальным индексам, и вспомогательное поле $\Omega_\mu{}^{b(s-1),a}$, симметричное по $b(s-1)$, бесследовое по любой паре индексов, такое, что $\Omega_\mu{}^{b(s-1),b} = 0$. Потребуем инвариантности лагранжиана относительно преобразования вида:

$$\Phi_\mu{}^{a(s-1)} = \partial_\mu \xi^{a(s-1)} \tag{40}$$

где $\xi^{a(s-1)}$ - симметричный бесследовый тензор, и рассмотрим тензор $T_{\mu\nu}{}^{a(s-1)}$ вида

$$T_{\mu\nu}{}^{a(s-1)} = \partial_{[\mu} \xi_{\nu]}{}^{a(s-1)} \tag{41}$$

Легко видеть, то этот тензор калибровочно-инвариантен. Запишем лагранжиан в виде[18]:

$$(-1)^s \mathcal{L}_0 = \hat{e}_a{}^{[\mu} \hat{e}_b{}^\nu \hat{e}_c{}^{\tau]} \Omega_\mu{}^a{}_{p(s-2)}{}^b \left[3e_{[\nu}{}^q \Omega_{\tau]}{}^{p(s-2)c}{}_q + 6T_{\nu\tau}{}^{cp(s-2)} \right] \tag{42}$$

Легко видеть, что этот лагранжиан инвариантен относительно более широкого класса преобразований

$$\begin{aligned} \Phi_\mu{}^{a(s-1)} &= \partial_\mu \xi^{a(s-1)} + e_\mu{}^b \eta^{a(s-1),b} \\ \Omega_\mu{}^{b(s-1),a} &= \partial_\mu \eta^{b(s-1),a} + e_\mu{}^c \zeta^{b(s-1),a}{}_c \end{aligned} \tag{43}$$

где $\eta^{a(s-1),b}$-тензор, симметричный по $b(s-1)$, бесследовый по любой паре индексов и такой, что $\eta^{b(s-1),b} = 0$, а $\zeta^{b(s-1),a(2)}$ - симметричный по $b(s-1)$ и $a(2)$, бесследовый по любой паре индексов и такой, что $\zeta^{b(s-1),ba} = 0$. Далее в этом разделе мы будем опускать все мировые индексы. Перепишем (44) в виде [18]

$$\begin{aligned} (-1)^s \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \hat{E}_{a[2]} &\left[\Omega^{ab(k-2),c} \Omega^a{}_{b(k-2),c} + \frac{1}{k-1} \Omega^{b(k-1),a} \Omega_{b(k-1)}{}^a \right] \\ &+ \hat{E}_{a[3]} \Omega^a{}_{b(k-2)}{}^a D\Phi^{ab(k-2)} \end{aligned} \tag{44}$$

Конструирование калибровочно-инвариантного лагранжиана для массивного бозона в реперном формализме сходно с метрическим: точно так же вводится набор $s-1$

полей со спином $\overline{0, s-1}$. Итоговый составляется из суммы свободных лагранжианов и всевозможных перекрестных и массовых слагаемых[18]:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2, \\
&\mathcal{L}_0 = \sum_{k=2}^{s} (-1)^k \left[\frac{1}{2} \hat{E}_{a[2]} \left[\Omega^{ab(k-2),c} \Omega^a{}_{b(k-2),c} + \frac{1}{k-1} \Omega^{b(k-1),a} \Omega_{b(k-1)}{}^a \right] + \hat{E}_{a[3]} \Omega^a{}_{b(k-2)}{}^a D\Phi^{ab(k-2)} \right] \\
&\quad + \frac{1}{4} B_{a[2]} B^{a[2]} - \frac{1}{2} \hat{E}_{a[2]} B^{a[2]} DA - \frac{1}{2} \pi_a \pi^a + \hat{E}_a \pi^a D\phi \\
&\mathcal{L}_1 = \sum_{k=3}^{s} (-1)^k \left[\hat{E}_{a[2]} \left[a_k \Omega^{ab(k-2),a} \Phi_{b(k-2)} + b_k \Phi^a{}_{b(k-2)} \Omega^{b(k-2),a} \right] \right] \\
&\quad + \hat{E}_{a[2]} a_2 \Omega^{a[2]} A + \hat{E}_a b_2 B^{ab} \Phi_b - b_1 \pi^a A \\
&\mathcal{L}_2 = \sum_{k=2}^{s} (-1)^k \left[\hat{E}_{a[2]} c_k \Phi_{b(k-2)}{}^a \Phi^{b(k-2),a} \right] - \hat{E}_a c_1 \Phi^a \phi + c_0 \phi^2
\end{aligned} \tag{45}
$$

Для наглядности для полей со спинами 0,1 введены обозначения A^μ, ϕ и $B^{a[2]}, \pi^a$. Как и в метрическом формализме, это же выражение можно использовать для описания частиц с бесконечным спином, если положить $s = \infty$.

Калибровочные преобразования не должны нарушать свойства Φ и Ω. Ниже выписаны преобразования без членов, введенных для обеспечения необходимых симметрий или бесследовости преобразований (полные формулы приведены в приложении 5.3):

$$
\begin{aligned}
\delta\Omega^{a(k-1),b} &= D\eta^{a(k-1),b} + e_c \zeta^{a(k-1)bc} + (k-1)\rho_k \left[e^a \eta^{a(k-2),b} + \dots \right] \\
&\quad + \theta_k \left[k e_d \eta^{a(k-1)d,b} + \dots \right] + (k-1)\lambda_k \left[e^b \xi^{a(k-1)} + \dots \right], \qquad k > 2 \\
\delta\Omega^{a,b} &= D\eta^{a,b} + e_c \theta_2 (\eta^{ca,b} - \eta^{cb,a}) + \lambda_2 [e^a \xi^b - e^b \xi^a] \\
\delta\Phi^{a(k-1)} &= D\xi^{a(k-1)} + e_b \eta^{a(k-1),b} + \alpha_k e_d \xi^{da(k-1)} + (k-1)\beta_k \left[e^a \xi^{a(k-2)} + \dots \right], \; k > 2 \\
\delta\Phi^a &= D\xi^a + e_b \eta^{a,b} + \alpha_2 e_b \xi^{ab} + \beta_2 e^a \xi \\
\delta_1 B^{a,b} &= \rho_1 \eta^{a,b} \qquad \delta\pi^a = \lambda_0 \xi^a \qquad \delta A = D\xi + \alpha_1 e_a \xi^a \qquad \delta\phi = \alpha_0 \xi
\end{aligned} \tag{46}
$$

приводит к следующим выражениям для коэффициентов через b_k,c_k:

$$
\begin{aligned}
&a_k = -b_k, k \geq 2 \qquad && \rho_1 = 2b_2 \qquad && \rho_k = \frac{b_k}{(d+k-3)}, k > 2 \\
&\theta_k = \frac{b_{k+1}}{k} && \alpha_k = b_{k+1}, k = 0, 1 && \alpha_k = \frac{k-1}{k} b_{k+1}, k > 1 \\
&\beta_k = \frac{b_k}{(d+k-4)} && \lambda_0 = -c_1 && \lambda_k = -\frac{2c_k}{(d-2)k} k > 1 \\
&c_1 = b_1 b_2 && c_0 = \frac{b_2^2 d}{(d-2)} &&
\end{aligned} \tag{47}
$$

и к рекуррентным соотношениям на b_k,c_k:

$$
\begin{aligned}
c_k k(d+k-3) &= c_{k-1}(k-1)(d+k-4), && k \in \overline{3, s-1} \\
b_k^2 \frac{k(d+k-5)(d+2k-4)(k-2)}{(d+k-4)(d+2k-6)(k-1)} &= b_{k-1}^2(k-1) \\
&\quad - 2c_{k-1} - \kappa(d+k-5)(k-2), && k \in \overline{2, s+1}
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Здесь $b_{s+1} = 0$, если s конечно.

Для конечного спина s выразим b_k и c_k через массу поля m (см. приложение 5.2 про определение массы в (A)dS) и его спин s:

$$
b_k = \sqrt{\frac{(s+1-k)(s+k+d-4)}{(k-2)(d+2k-4)}[m^2 - \kappa(s-k)(s+k+d-5)]}, \qquad k \geq 2
$$

$$
b_1 = \sqrt{\frac{s(d+s-3)(m^2 - \kappa(d+s-4)(s-1))}{d-2}} \tag{49}
$$

$$
c_k = \frac{s(d+s-3)(m^2 - \kappa(d+s-4)(s-1))}{2(k-1)(d+k-3)}, \qquad k \geq 2 \tag{50}
$$

Так как свойства частицы не должны зависеть от используемого формализма, то следует ожидать, что ограничения на массу и массы, при которых реализуются частично безмассовые пределы, будут те же. Действительно, требование вещественности $_k$ приводит к тем же результатам, что и в метрическом формализме.

Рассмотрим случай бесконечного спина. Выразим a_k^2 и c_k через c_0 и b_1^2:

$$
\begin{aligned}
a_2^2 &= \frac{(d-2)c_0}{d} \\
a_k^2 &= \frac{1}{(k-2)(d+2k-4)}\Big[(k-1)(d+k-4)c_0 - (k-2)(d+k-3)b_1^2 \\
&\quad - (k-1)(k-2)(d+k-4)(d+k-3)\kappa\Big], \qquad k > 2
\end{aligned}
\tag{51}
$$

$$
c_k = \frac{d-2}{2(k-1)(d+k-3)} b_1^2, \qquad k > 1 \tag{52}
$$

Легко заметить сходство формул (51) и (12). Действительно, выражения в квадратных скобках приводятся друг к другу заменами $c_0 \leftrightarrow 2d_0$, $b_1 \leftrightarrow a_1$. Так как именно знаком этих скобок определяется знак a_k^2, то условия существования поля с бесконечным спином и частично безмассовых пределов совпадут с приведенными в разделе 2.1 условиями с точностью до данных замен.

3.2 Фермионы

Фермионное поле описывается полностью симметричным тензор-спинором $\Psi^{\mu(s)}$, удовлетворяющим соотношению $(\gamma\Psi) = 0$ (обозначения приведены в разделе 5.1). В случае свободного поля введение вспомогательных полей не требуется (хотя эти поля будут играть существенную роль при введении взаимодействия), и лагранжиан имеет вид [18]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \\
\mathcal{L}_0 &= \sum_{k=1}^{s} (-1)^k i\hat{E}_{a[3]} \left[\bar{\Psi}^{b(k-1)} \Gamma^{a[3]} D\Psi_{b(k-1)} - 6(k-1)\bar{\Psi}^{ab(k-2)}\gamma^a D\Psi^a{}_{b(k-2)} \right] + i\bar{\chi}\not{D}\chi \\
\mathcal{L}_1 &= \sum_{k=1}^{s} (-1)^k \Bigg[a_k \hat{E}_{a[2]} \left[\bar{\Psi}^{b(k-1)}\Gamma^{a[2]}\Psi_{b(k-1)} + 2(k-1)\bar{\Psi}^{ab(k-2)}\Psi^a{}_{b(k-2)} \right] \\
&\quad + ib_k \hat{E}_{a[2]} \left[\bar{\Psi}^{ab(k-2)}\gamma^a \Psi_{b(k-2)} - \bar{\Psi}^{b(k-2)}\gamma^a \Psi^a{}_{b(k-2)} \right] \Bigg] - a_1 \hat{E}_{a[2]} \bar{\psi}\Gamma^{a[2]}\psi \\
&\quad - ib_1 \left[(\bar{\psi}\gamma)\chi - \bar{\chi}(\gamma\psi) \right] + a_0(\bar{\chi}\chi)
\end{aligned} \tag{53}$$

Здесь, как и ранее, $\mathcal{L}_0$ - сумма всех лагранжианов свободных полей, $\mathcal{L}_1$ - всевозможные перекрестные и массовые члены. Этот лагранжиан также применим и для полей бесконечного спина.

Как и в случае бозонов, выпишем калибровочные преобразования с точностью до членов, обеспечивающих свойство $(\gamma\Psi) = 0$:

$$\begin{aligned}
\delta\Psi^{b(k-1)} &= D\xi^{b(k-1)} + \alpha_k e_c \xi^{cb(k-1)} + i\beta_k e^c \Big[\gamma_c \xi^{b(k-1)} - \dots \Big] + \rho_k e_c \Big[g^{bc}\xi^{b(k-2)} - \dots \Big] \\
&\quad + e^c \eta^{b(k-1)}{}_c \\
\delta\psi &= D\xi + \alpha_1 e_b \xi^b + i\beta_1 e_b \gamma^b \xi \\
\delta\chi &= \rho_0 \xi
\end{aligned} \tag{54}$$

Требование инвариантности лагранжиана относительно данных калибровочных преобразований приводит к следующим выражениям для коэффициентов через a_k,b_k:

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= -\frac{b_{k+1}}{6k}, \qquad \beta_k = \frac{a_k}{3(d-2)}, \qquad a_0 = -\frac{a_k d}{3(d-2)} \\
\rho_0 &= -b_1, \qquad \rho_k = \frac{b_k}{6(d+k-3)}, k > 1
\end{aligned} \tag{55}$$

а также к рекуррентным соотношениям:

$$a_{k-1}(d+2k-4) = a_k(d+2k-2), k \in \overline{1,s}$$

$$\begin{aligned}
\frac{b_k^2}{(k-1)(d+2k-4)} &= \frac{4(d+2k-3)a_k^2}{(d+2k-4)^2} + 9\kappa(d+2k-3) + \frac{b_{k+1}^2}{k(d+2k-2)}, k \in \overline{2,s} \\
\frac{6b_1^2}{(d-2)} &= \frac{4(d-1)a_1^2}{(d-2)^2} + 9\kappa(d-1) + \frac{b_2^2}{2d}
\end{aligned} \tag{56}$$

Для конечного спина s, аналогично бозонам, выразим b_k и c_k через массу поля m (см. приложение 5.2 про определение массы в (A)dS) и его спин s:

$$a_k = \frac{9(d+2s-2)^2}{4(d+2k-2)^2}\big[4m^2 - \kappa(d+2s-4)^2\big], \qquad k > 0$$

$$a_0 = -\frac{da_2}{3(d-2)} \tag{57}$$

$$b_k^2 = 36\frac{(k-1)(s-k+1)(s+k+d-3)}{(d+2k-4)}\big[m^2 - \kappa(s-k)(s+k+d-4)\big], \qquad k > 1$$

$$b_1^2 = 6\frac{s(d+s-2)}{(d-2)}\big[m^2 - \kappa(s-1)(s+d-3)\big] \tag{58}$$

Так же, как и в случае бозонов, ограничения на массу оказываются те же, что и в метрическом формализме. Случай бесконечного спина тоже аналогичен метрическому формализму. a_k и b_k выражаются через a_0, b_1 следующим образом:

$$a_k = -\frac{3(d-2)(d+2)c_0}{d(d+2k-2)} \tag{59}$$

$$b_k^2 = \frac{36(k-1)}{(d+2k-4)}\left[-\frac{a_0(d+2)^2(k-1)(d+k-3)}{d^2} + \frac{b_1^2(d+2k-4)^2}{6(d-2)} - \frac{\kappa(d+2k-4)^2(k-1)(d+k-3)}{4}\right] \tag{60}$$

Как и в случае бозонов, исследование бесконечного спина сводится к переобозначениям коэффициентов. В данном случае замена имеет вид $a_0 \to \frac{d+2}{d}a_0$, $d_1^2 \to \frac{b_1^2}{6}$.

4 Заключение

В данной работе были получены калибровочно-инвариантные лагранжианы для свободных массивных полей с высшими спинами и для полей с бесконечными спинами, для случая пространства (A)dS произвольной размерности $d \geq 4$. Для обоих случаев (бозонов и фермионов) лагранжиан представлен в метрическом и реперном формализмах. Из условия вещественности лагранжиана были получены ограничения на массу, а также рассмотрены специальные случаи частично безмассовых пределов. Выражения для лагранжианов в метрическом формализме совпали с полученными ранее в работах [11, 12, 13, 14]. Также совпали выражения для бозонов и фермионов для частного случая $d = 4$ в реперном формализме [18]. Выражение для фермионного лагранжиана в произвольной размерности $d \geq 4$ и для бозонов и фермионов с бесконечным спином в реперном формализме получены впервые. В четырехмерном пространстве-времени и массивные представления, и представления бесконечного спина исчерпываются симметричными тензорами и спин-тензорами; в пространстве-времени размерности $d > 4$ же для полного описания всех представлений необходимо использовать тензоры со смешанной симметрией; описание таких представлений будет разрабатываться в следующих работах.

5 Приложение

5.1 Используемые обозначения

В работе используются следующие обозначения:

1. Запись $(\partial\Phi)^{a_1 a_2 \ldots a_n}$ означает дивергенцию, т.е. $\partial_{a_0}\Phi^{a_0 a_1 a_2 \ldots a_n}$; запись $\tilde{\Phi}^{a_2 \ldots a_n}$ - взятие следа, т.е. $\tilde{\Phi}_{a_1}{}^{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Записи $(D\Phi)^{a_1 a_2 \ldots a_n}$ и $(\gamma\Phi)^{a_1 a_2 \ldots a_n}$ подразумевают свертку аналогично $(\partial\Phi)^{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

2. Симметризация тензора по набору из n индексов определяется как сумма всех возможных перестановок этих индексов, деленная на нормирующий множитель $n!$:
$$\Phi^{(a_1 a_2 \cdots a_n)} = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \Phi^{a_{\pi(1)} a_{\pi(2)} \cdots a_{\pi(n)}} \tag{61}$$

3. Антисимметризация тензора определена аналогично.
$$\Phi^{[a_1 a_2 \cdots a_n]} = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{\varepsilon_\pi} \Phi^{a_{\pi(1)} a_{\pi(2)} \cdots a_{\pi(n)}} \tag{62}$$

4. Если в выражении встречается n индексов $a_1 a_2 \ldots a_n$, по которым подразумевается симметризация или антисимметризация, то числовые индексы опускаются. Запись вида $a(s)$ или $a[s]$ обозначает s индексов $a_1 a_2 \ldots a_s$, по которым производится симметризация или антисимметризация соответственно.
$$\Phi^{a_1 a_2 \cdots a_n} = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{\varepsilon_\pi} \Phi^{a_{\pi(1)} a_{\pi(2)} \cdots a_{\pi(n)}} \tag{63}$$

5. D_μ обозначает ковариантную производную. В пространстве (A)dS:
$$[D_\mu, D_\nu]\xi_\alpha = -\kappa(g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta})\xi^\beta \tag{64}$$

6. В вычислениях реперного формализма локальные индексы обозначаются латинскими буквами. Мировые индексы опускаются почти везде. Если же необходимо подчеркнуть наличие мировых индексов, они обозначаются греческими буквами. По мировым индексам всегда подразумевается антисимметризация. e_a и $\hat{e}_a$ - реперные вектор и ковектор соответственно. Символы $E_{a[n]}$ и $\hat{E}_{a[n]}$ означают произведение n реперных векторов или ковекторов соответственно, умноженных на нормирующий множитель $n!$:
$$\begin{aligned} E_{a[n]} &= n! e_a e_a \cdots e_a \\ \hat{E}_{a[n]} &= n! \hat{e}_a \hat{e}_a \cdots \hat{e}_a \end{aligned} \tag{65}$$

7. Символ $\Gamma_{a[n]}$ означает антисимметризованное произведение n гамма-матриц:
$$\Gamma_{a[n]} = \gamma_a \gamma_a \cdots \gamma_a \tag{66}$$

5.2 О простанствах постоянной кривизны

В искривленном пространстве обычные частные производные заменяются на ковариантные, которые обладают следующими свойствами:

$$
\begin{aligned}
D_\lambda g_{\mu\nu} =& 0 \\
D_\lambda(a^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m} b^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}) =& D_\lambda a^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k} b^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_k} + a^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k} D_\lambda b^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_k} \\
[D_\alpha, D_\beta]\xi_\mu =& R_{\alpha\beta\mu\nu}\xi^\nu \\
[D_\alpha, D_\beta]\psi =& \frac{\gamma^\mu\gamma^\nu R_{\alpha\beta\mu\nu}}{4}\psi
\end{aligned} \tag{67}
$$

Здесь ψ - спинорное поле, остальные поля тензорные. Пространство, для которого $R_{\alpha\beta\mu\nu} = -\kappa(g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta} - g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu})$, называется пространством постоянной кривизны. Пространство постоянной кривизны с $\kappa > 0$ называется пространством де Ситтера, или dS, а пространство с $\kappa < 0$ - пространством анти-де Ситтера, или AdS. Случай $\kappa = 0$ соответствует обычному плоскому пространству.

В плоском пространстве, квадрат массы поля определяется как собственное значение оператора $p^\mu p_\mu \equiv -\partial^\mu \partial_\mu$ при его действии на это поле [10]. Этот оператор является оператором Казимира группы Пуанкаре, т.е. коммутирует со всеми ее генераторами. Данное определение невозможно обобщить на пространство (A)dS, так как ковариантные производные не коммутируют, а потому такое определение массы не будет инвариантным относительно группы изометрий (A)dS. О том, что называть массой в пространстве (A)dS, не существует единого соглашения. Тем не менее, есть общепринятое соглашение о том, что называть безмассовой частицей: это частица, у которой состояния с максимальной по модулю проекцией спина на направление импульса распространяются независимо от остальных. В данной работы, следуя [13], масса поля m вводится как функция коэффициентов лагранжиана и кривизны таким образом, чтобы, во-первых, в пределе плоского пространства m переходило бы в массу в смысле плоского пространства, и, во-вторых, чтобы при выполнении равенства $m = 0$ поле было бы безмассовым.

5.3 Формулы для калибровочных преобразований в реперном формализме

В этом разделе приведены полные выражения для калибровочных преобразований для бозонов (раздел 3.1) и фермионов (раздел 3.2) в реперном формализме, в которых для краткости были опущены члены, отвечающие за симметричность и бесследовость.

Полные преобразования для бозонов:

$$
\begin{aligned}
\delta\Omega^{a(k-1),b} &= D\eta^{a(k-1),b} + e_c\zeta^{a(k-1)bc} + (k-1)\rho_k\Bigg[e^a\eta^{a(k-2),b} - \frac{1}{d+k-4}e_d g^{ba}\eta^{a(k-2),d} \\
&\quad - \frac{(k-2)}{d+2k-6}e_d g^{a(2)}\eta^{a(k-3)d,b} + \frac{(k-2)}{(d+k-4)(d+2k-6)}e_d g^{a(2)}\eta^{a(k-3)b,d}\Bigg] \\
&\quad + \theta_k\Big[k e_d\eta^{a(k-1)d,b} + e_d\eta^{ba(k-1),d}\Big] + (k-1)\lambda_k\Bigg[e^b\xi^{a(k-1)} - e^a\xi^{ba(k-2)} \\
&\quad - \frac{k-2}{d+k-4}e_c\big[g^{ab}\xi^{ca(k-2)} - g^{a(2)}\xi^{ca(k-3)b}\big]\Bigg], \qquad k>2 \\
\delta\Omega^{a,b} &= D\eta^{a,b} + e_c\theta_2(\eta^{ca,b} - \eta^{cb,a}) + \lambda_2[e^a\xi^b - e^b\xi^a] \\
\delta\Phi^{a(k-1)} &= D\xi^{a(k-1)} + e_b\eta^{a(k-1),b} + \alpha_k e_d\xi^{da(k-1)} \\
&\quad + (k-1)\beta_k\Bigg[e^a\xi^{a(k-2)} - \frac{(k-2)}{d+2k-6}e_d g^{a(2)}\xi^{a(k-3)d}\Bigg], \qquad k>2
\end{aligned} \tag{68}
$$

Полные преобразования для фермионов:

$$
\begin{aligned}
\delta\Psi^{b(k-1)} &= D\xi^{b(k-1)} + \alpha_k e_c\xi^{cb(k-1)} + i\beta_k e^c\Bigg[\gamma_c\xi^{b(k-1)} - \frac{2(k-1)}{d+2k-4}\gamma^b\xi_c{}^{b(k-2)}\Bigg] \\
&\quad + \rho_k e_c\Bigg[g^{bc}\xi^{b(k-2)} - \frac{1}{d+2k-4}\gamma^b\gamma^c\xi^{b(k-2)} - \frac{k-2}{d+2k-4}g^{b(2)}\xi^{b(k-3)c}\Bigg] \\
&\quad + e^c\eta^{b(k-1)}{}_c
\end{aligned} \tag{69}
$$

Список литературы

[1] P. A. M. Dirac. Relativistic wave equations. *Proc. R. Soc. Lond.*, A155:447, 1936.

[2] L. P. S. Singh and C. R. Hagen. Lagrangian formulation for arbitrary spin. 1. the boson case. *Phys. Rev.*, D9:898, 1974.

[3] L. P. S. Singh and C. R. Hagen. Lagrangian formulation for arbitrary spin. 2. the fermion case. *Phys. Rev.*, D9:910, 1974.

[4] C. Fronsdal. Massless fields with integer spin. *Phys. Rev.*, D18:3624, 1978.

[5] J. Fang and C. Fronsdal. Massless fields with half integral spin. *Phys. Rev.*, D18:3630, 1978.

[6] J. Fang and C. Fronsdal. Massless half integer spin fields in de sitter space. *Phys. Rev.*, D22:1361, 1980.

[7] F. A. Berends, G. J. H. Burgers, and H. van Dam. Explicit construction of conserved currents for massless fields of arbitrary spin. *Nucl. Phys.*, B271:429, 1986.

[8] F. A. Berends, G. J. H. Bugrers, and H. van Dam. On the theoretical problems in constructing interactions involving higher-spin massless particles. *Nucl. Phys.*, B260:295, 1985.

[9] X. Bekaert, N. Boulanger, and P. Sundell. How higher-spin gravity surpasses the spin two barrier, no-go theorems versus yes-go examples.

[10] Xavier Bekaert and Nicolas Boulanger. The unitary representations of the poincare group in any spacetime dimension.

[11] R.R. Metsaev. Continuous spin gauge field in (a)ds space.

[12] R.R. Metsaev. Fermionic continuous spin gauge field in (a)ds space.

[13] Yu. M. Zinoviev. On massive high spin particles in (a)ds.

[14] R. R. Metsaev. Gauge invariant formulation of massive totally symmetric fermionic fields in (a)ds space. *Phys. Lett.*, B643:205–212, 2006.

[15] M. A. Vasiliev. 'gauge' form of description of massless fields with arbitrary spin. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 32:439, 1980.

[16] V. E. Lopatin and M. A. Vasiliev. Free massless bosonic fields of arbitrary spin in d-dimensional de sitter space. *Mod. Phys. Lett.*, A3:257, 1988.

[17] M. A. Vasiliev. Free massless fermionic fields of arbitrary spin in d-dimensional anti-de sitter space. *Nucl. Phys.*, B301:26, 1988.

[18] Yu. M. Zinoviev. Frame-like gauge invariant formulation for massive high spin particles. *Nucl. Phys.*, B808:185, 2009.

[19] D. S. Ponomarev and M. A. Vasiliev. Frame-like action and unfolded formulation for massive higher-spin fields. *Nucl. Phys.*, B839:466, 2010.

[20] E. S. Fradkin and M. A. Vasiliev. On the gravitational interaction of massless higher-spin fields. *Phys. Lett.*, B189:89, 1987.

[21] E. S. Fradkin and M. A. Vasiliev. Cubic interaction in extended theories of massless higher-spin fields. *Nucl. Phys.*, B291:141, 1987.