Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа Фундаментальной и Прикладной Физики
Кафедра физики высоких энергий

Направление подготовки / специальность: 03.04.01 Прикладные математика и физика (магистратура)
Направленность (профиль) подготовки: Физика высоких энергий

КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНОЕ ОПИСАНИЕ МАССИВНЫХ ПОЛЕЙ С ВЫСШИМИ СПИНАМИ

(магистерская диссертация)

Студент:
Хабаров Максим Валентинович

____
(подпись студента)

Научный руководитель:
Зиновьев Юрий Михайлович,
д-р физ.-мат. наук

____
(подпись научного руководителя)

Консультант *(при наличии)*:
____
____
(подпись консультанта)

Москва 2019

Аннотация

В работе построено калибровочно-инвариантное описание массивных частиц с произвольным спином s и частиц с бесконечным спином в пространстве AdS_4 в реперном лагранжевом и развернутом формализмах. Также построен полный набор калибровочно-инвариантных объектов и выражение для лагранжиана в терминах этих объектов. Исследована эрмитовость теорий и их безмассовые и частично безмассовые пределы. Вычисления проведены с использованием мультиспинорного формализма, упрощающего выражения для тензоров со смешанной симметрией.

Содержание

1 Обозначения и определения **4**

1.1 Соглашения об обозначениях 4

1.2 Мультиспинорный формализм 4

1.3 Пространство постоянной кривизны 6

2 Введение **8**

3 Описание частиц в реперном лагранжевом и развернутом формализмах **12**

4 Бозоны **17**

4.1 Лагранжев формализм 17

4.2 Кривизны 20

4.3 Выражение лагранжиана через кривизны 24

4.4 Развернутые уравнения 28

4.5 Развернутые уравнения в формализме Васильева-Скворцова 30

5 Фермионы **32**

5.1 Лагранжев формализм 32

5.2 Кривизны 34

5.3 Выражение лагранжиана через кривизны 38

5.4 Развернутые уравнения 41

5.5 Формализм Васильева-Скворцова для фермионов 42

6 Заключение **44**

Список литературы **45**

A Соотношения для калибровочно-инвариантных кривизн **47**

1 Обозначения и определения

1.1 Соглашения об обозначениях

В данной работе используется сжатая запись индексов. В случае, если в выражении встречаются верхние индексы $\mu_1\mu_2\cdots\mu_s$, по которым необходимо провести симметризацию, эти индексы обозначаются одной буквой, после которой в скобках пишется число индексов. Аналогичные правила применяются и для нижних индексов. Например:

$$R^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_s} = R^{\mu(s)} \tag{1}$$

Симметризация но набору из n индексов определена как сумма $n!$ выражений, полученных из исходного путем всех возможных перестановок индексов, деленная на $n!$. В соответствии с этим определением, многократная симметризация по набору индексов эквивалентна однократной. Пример:

$$\begin{aligned} R^{\mu(s)}R_{\mu(s)}a^\mu a_\mu &= \frac{s-1}{s}R^{\mu(s-1)\nu}R_{\mu(s)}a^\mu a_\nu + \frac{1}{s}R^{\mu(s)}R_{\mu(s)}a^\nu a_\nu \\ R^{\mu(s-1)\nu}R_{\mu(s)}a^\mu a_\nu &= R^{\mu(s-1)\nu}R_{\mu(s-1)\lambda}a^\lambda a_\nu \end{aligned} \tag{2}$$

Аналогично определена антисимметризация, с тем лишь отличием, что перед слагаемым стоит знак "минус", если перестановка нечетная, и "плюс", если четная.

Свертка осуществляется в соответствии с обычным правилом Эйнштейна, с учетом симметризации. Например:

$$\begin{aligned} e_\alpha A^\alpha B^{\alpha(2)} &\equiv \frac{e_{\alpha_1}A^{\alpha_1}B^{\alpha_2\alpha_3} + e_{\alpha_2}A^{\alpha_1}B^{\alpha_1\alpha_3} + e_{\alpha_3}A^{\alpha_1}B^{\alpha_1\alpha_2}}{3} \\ &= \frac{e_\beta A^\beta B^{\alpha(2)} + 2e_\beta A^\alpha B^{\alpha\beta}}{3} \end{aligned} \tag{3}$$

Все (за исключением специальных тензоров, например, тензора Римана) тензоры, появляющиеся в данной работе, описываются двухкомпонентными таблицами Юнга [1]. В этом случае группы индексов, по которым тензор симметричен (т.е. соответствующие строкам таблицы Юнга), разделяются запятой - $T^{\mu(k),\nu(l)} \sim Y(k,l)$.

1.2 Мультиспинорный формализм

В четырехмерном пространстве, благодаря эквивалентности $\mathfrak{so}(3,1) \sim \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, можно разложить векторный индекс в пару спинорных индексов, пробегающих значения $i = 1, 2$. [22]: $T^\mu \sim T^{\alpha\dot\alpha}$. Правила поднятия и опускания этих индексов следующие:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta}\xi^{\beta} &= -\xi_{\alpha} \\ \epsilon^{\alpha\beta}\xi_{\beta} &= \xi^{\alpha} \end{aligned} \tag{4}$$

аналогично для индексов с точкой. В отличие от $g_{\mu\nu}$, тензор $\epsilon_{\alpha\beta}$ антисимметричен по своим индексам. Поэтому симметричность по паре индексов автоматически означает бесследовость по ним. При эрмитовом сопряжении индексы с точкой и без точки переходят друг в друга. Например:

$$\left(A^{\alpha(2)\dot{\beta}}\right)^{\dagger} = A^{\beta\dot{\alpha}(2)} \tag{5}$$

Тензор $\Phi^{\mu(k),\nu(l)} \sim Y(k,l)$ в мультиспинорном формализме заменяется на пару тензоров $\Phi^{\alpha(k+l),\dot{\alpha}(k-l)}, \Phi^{\alpha(k-l),\dot{\alpha}(k+l)}$. Если тензор $\Phi^{\mu(k),\nu(l)}$ действительный, то:

$$\left(\Phi^{\alpha(k+l),\dot{\alpha}(k-l)}\right)^{\dagger} = \Phi^{\alpha(k-l),\dot{\alpha}(k+l)} \tag{6}$$

Точно так же, спин-тензор $\Psi^{\mu(k),\nu(l)} \sim Y(k+1/2, l+1/2)$ заменяется на пару тензоров $\Psi^{\alpha(k+l+1),\dot{\alpha}(k-l)}, \Psi^{\alpha(k-l+1),\dot{\alpha}(k+l)}$. спин-тензор $\Psi^{\mu(k),\nu(l)}$ майорановский, то

$$\left(\Psi^{\alpha(k+l+1),\dot{\alpha}(k-l)}\right)^{\dagger} = \Psi^{\alpha(k-l),\dot{\alpha}(k+l+1)} \tag{7}$$

При этом фермионные поля описываются грассмановыми переменными, т.е. произведение нескольких фермионных полей меняет знак при перестановке соседних множителей.

В работе используется реперный формализм, в котором часть индексов выражается в мировом базисе, а часть - в локальном базисе $\mathbf{e}^a$. Мировые индексы опущены везде, кроме вводных объяснений; по ним всюду подразумевается антисимметризация. Это означает, что поля являются n-формами, а их произведения - внешними произведениями. Таким образом, при перестановке двух соседних полей, имеющих нечетное количество мировых индексов, знак выражения меняется на противоположный (без учета дополнительного минуса от перестановки фермионных полей). Локальные индексы обозначаются латинскими буквами из начала алфавита, когда они еще не превращены в спинорные, и греческими буквами из начала алфавита с точкой или без точки, когда превращены. Важную роль также играют базисные формы - антисимметризованные произведения базисных векторов. Они обозначаются как $E^{a_1,a_2,\cdots,a_i}$ и антисимметричны по локальным индексам. В мультиспинорном формализме:

$$\begin{aligned} e^a &\sim e^{\alpha\dot\alpha} & E^{ab} &\sim E^{\alpha(2)}, E^{\dot\alpha(2)} \\ E^{abc} &\sim E^{\alpha\dot\alpha} & E^{abcd} &\sim E \end{aligned} \tag{8}$$

Антисимметризованные произведения пяти и более векторов тождественно равны нулю. При комплексном сопряжении базисные формы меняются следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(e^{\alpha\dot\alpha}\right)^\dagger &= e^{\alpha\dot\alpha} & \left(E^{\alpha(2)}\right)^\dagger &= E^{\dot\alpha(2)} \\ \left(E^{\alpha\dot\alpha}\right)^\dagger &= -E^{\alpha\dot\alpha} & (E)^\dagger &= -E \end{aligned} \tag{9}$$

Наконец, лагранжиан всюду приведен без произведения ковекторов $\hat e^a \hat e^b \hat e^c \hat e^d \sim \hat E$, т.е. является 4-формой.

1.3 Пространство постоянной кривизны

Мы работаем в четырехмерном пространстве-времени постоянной кривизны, которое является частным случаем риманова пространства-времени. В римановом пространстве-времени частные производные ∂_μ тензорного поля, вообще говоря, не являются компонентами какого-либо тензора, т.е. не преобразуются как тензор при произвольных заменах координат. Поэтому обычные частные производные заменяются ковариантными производными D_μ. Ковариантные производные обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} D_\lambda g_{\mu\nu} =&0 \\ D_\lambda(a^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m} b^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}) =&D_\lambda a^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k} b^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_k} + a^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k} D_\lambda b^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_k} \\ [D_\alpha, D_\beta]\xi_\mu =&R_{\alpha\beta\mu\nu}\xi^\nu \\ [D_\alpha, D_\beta]\psi =&\frac{\gamma^\mu\gamma^\nu R_{\alpha\beta\mu\nu}}{4}\psi \\ D_\mu\phi = \partial_\mu\phi& \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь ψ - спинорное поле, остальные поля тензорные. Кривизна пространства определяется тензором Римана $R_{\alpha\beta\mu\nu}$, который может быть выражен через метрический тензор и его частные производные первого и второго порядка. Этот тензор антисимметричен по первой и второй паре индексов, и инвариантен относительно перестановки индексов первой и второй пары:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} \tag{11}$$

В случае, если тензор Римана $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ удается выразить только через метрический тензор, пространство называется пространством постоянной кривизны. Единственное выражение, которое удовлетворяет всем свойствам тензора Римана, имеет вид: $R_{\alpha\beta\mu\nu} = -\kappa(g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} - g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu})$, при этом κ не зависит от координат. Легко видеть, что в случае $\kappa = 0$ пространство является обычным плоским пространством-временем. При $\kappa > 0$ пространство постоянной кривизны называется пространством де Ситтера, или, сокращенно, dS, а пространство с $\kappa < 0$ - пространством анти-де Ситтера, или AdS.

2 Введение

Есть несколько причин, почему имеет смысл изучать частицы с высшими спинами. Во-первых, у всех известных частиц спин не превышает единицу, и поэтому любая теория с высшими спинами является расширением стандартной модели и может оказаться полезной в поисках новой физики. Во-вторых, бесконечные цепочки частиц с высшими спинами возникают в теории суперструн, и было бы полезно иметь способ описания этих частиц. Наконец, в отличие от элементарных частиц, составные частицы со спином, превышающим единицу, известны. Например, ядро кобальта-60 имеет спин 5. В пределе малых переданных импульсов такие частицы могут быть описаны с помощью теории для элементарных частиц.

Основы теории высших спинов были заложены Дираком в 1936 году [5]; однако, долгое время задачей этой теории было лишь описание составных частиц. Активное изучение элементарных частиц же началось в 70-х годах. Лагранжианы для частиц с произвольным спином (как для бозонов, так и для фермионов) были построены в 1974 году Сингхом и Хагеном [19, 20]. В тех же работах были исследованы безмассовые пределы этих полей. Фронсдал и Фэнг показали, что теории для безмассовых полей инвариантны относительно калибровочных преобразований определенного вида [10, 6]. Немного позднее, полученные результаты были обобщены на случай пространства dS [11, 7]; в этих работах также рассматривались только безмассовые частицы.

Стандартный способ построения теории взаимодействующих частиц предполагает инвариантность лагранжиана теории относительно некоторой группы калибровочных преобразований. Оказывается, что в общем случае, для произвольного набора полей ввести калибровочно-инвариантное взаимодействие невозможно [3], хотя для некоторых полей указать способ построения вершин взаимодействия удается [4]. Данные ограничения удается обойти, если вместо отдельных полей рассматривать бесконечные семейства взаимодействующих частиц с возрастающими спинами[2]. При этом, для безмассовых полей необходимо дополнительно предположить, что пространство имеет ненулевую кривизну. Это связано с тем, что для введения взаимодействия необходимо наличие размерного параметра. В случае массивных полей таким параметром может быть масса; в случае безмассового поля единственный размерный параметр - это космологическая постоянная.

Калибровочно-инвариантное описание можно построить для любых унитарных представлений группы Пуанкаре. Напомним классификацию этих представлений [1]:

1. Массивные частицы со спином s. Характеризуются целым или полуцелым спином s, положительным квадратом массы $m^2 = p^2$ и могут иметь $2s + 1$ различных поляризаций, соответствующих проекциям спина на направление распространения $-s, -s+1, \ldots, s-1, s$.

2. Безмассовые частицы. Эти частицы имеют нулевую массу: $p^2 = 0$. Есть два подкласса безмассовых частиц: соответствующие представлению спиральности s (к этому классу принадлежат все известные безмассовые частицы) и соответствующие представлению бесконечного спина. Первые характеризуются целой или полуцелой спиральностью s и могут иметь две различные проекции спина на направление распространения - $\pm s$. Эти представления хараткреризуются также нулевым оператором Казимира 4-го порядка (т.е. квадратом вектора Паули-Любанского): $W^2 = 0$. В отличие от представлений спиральности, безмассовые представления бесконечного спина характеризуются размерным параметром $W^2 = \mu^2 > 0$. Проекция спина на направление движения такой частицы может быть любым (полу)целым числом.

3. Тахионные представления. Характеризуются отрицательным квадратом массы. У всех тахионных представлений, за исключением характеризующегося нулевым оператором Казимира 4-го порядка, число поляризаций бесконечно. Случай $W^2 = 0$ соответствует единственной возможной степени свободы (аналогично массивному скалярному полю).

Калибровочно-инвариантное описание массивной частицы со спином s $(s + \frac{1}{2})$ можно построить, если ввести $s + 1$ полей со спинами $0, 1, 2, \ldots, s$ $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \ldots, s + \frac{1}{2})$, и записав лагранжиан как сумму свободных лагранжианов с добавлением перекрестных и массовых слагаемых. Этот же подход позволяет построить калибровочно-инвариантное описание частиц с высшими спинами в пространстве (A)dS [25, 17]. В пределе $s \to +\infty$ такая теория описывает частицу с бесконечным числом степеней свободы, соответствующую или частице с бесконечным спином, или тахионному представлению с бесконечным числом степеней свободы [15, 16].

Непосредственно обобщить понятие массы на случай ненулевой космологической постоянной не удается: из-за некоммутативности ковариантных производных в пространстве (A)dS, оператор $-D^\mu D_\mu$ не является оператором Казимира группы изометрий. О том, что называть массой в пространстве (A)dS, единого соглашения не существует;

однако, есть общепринятое соглашение о том, что называть безмассовым представлением в случае симметричных частиц (частицы со смешанной симметрией возникают только в пространствах размерности $d > 4$ и в данной работе не рассматриваются). А именно, у безмассовой частицы со спином s состояния с максимальной проекцией спина на импульс распространяются независимо от остальных. Следуя [25], в данной работе квадрат массы поля M^2 вводится как линейная комбинация коэффициентов лагранжиана (или их квадратов, в зависимости от размерности) и кривизны таким образом, чтобы, во-первых, безмассовому полю соответствовал бы нулевой квадрат массы $M^2 = 0$, и, во-вторых, чтобы при предельном переходе к плоскому пространству $\kappa \to 0$ параметр M^2 переходил бы в квадрат массы в смысле плоского пространства.

Результаты выше относятся к так называемому метрическому формализму. В данной же работе используется реперный формализм, являющийся развитием идеи тетрадного формализма в теории гравитации [23]. Достоинство данного подхода состоит в том, что в нем проще исследовать взаимодействие частиц [9, 8]; следует, однако, подчеркнуть, что метрический и реперный формализмы являются лишь разными подходами к описанию одних и тех же частиц, а потому конечные результаты, как минимум в случае свободных полей, от выбора формализма не зависят. Изначально, реперный формализм был предложен лишь для описания безмассовых частиц [23] в плоском пространстве-времени, и лишь позднее он был обобщен для случая пространства постоянной кривизны произвольной размерности [14, 24], для массивных частиц [26, 18] и для частиц с бесконечным спином [12].

Еще одним подходом к описанию частиц с высшими спинами является развернутый формализм. В нем, частица описывается бесконечным набором полей, параметризующем все производные физического поля, не обнуляющиеся на массовой поверхности; при этом все "лишние" степени свободы, содержащиеся в этом наборе полей, соответствуют симметрии относительно калибровочных преобразований. Для массивных бозонов система развернутых уравнений была построена в [18].

Цель данной работы - построить описание массивных частиц со спином s и частиц с бесконечным спином в реперном лагранжевом и в развернутом формализмах Для вычислений используется мультиспинорный формализм, который упрощает вычисления, но применим только для случая четырехмерного пространства. Отдельно следует подчеркнуть, что бозоны и фермионы в мультиспинорном формализме выглядят одинаково (с точностью до количества спинорных индексов), что делает его особенно удобным при изучении суперсимметрии. В разделе 2 мы проиллюстрируем оба подхода на примере безмассового бозона. В разделах 3 и 4 мы строим описание бозонов и фермионов соответственно. В приложении приведены некоторые соотношения для калибровочно-инвариантных кривизн.

3 Описание частиц в реперном лагранжевом и развернутом формализмах

Для описания частицы в реперном формализме прежде всего необходимо ввести в каждой точке локальный ортонормированный базис $\mathbf{e}_a$ (используемые обозначения приведены в приложении). Тогда каждый тензорный индекс может быть преобразован из мирового в локальный, и наоборот: $T^a e_a^\mu = T^\mu$, $T^\mu \hat{e}_\mu^a = T^a$. Здесь $\hat{\mathbf{e}}^a$ - базис ковекторов, дуальный к локальному базису: $(\hat{\mathbf{e}}^a, \mathbf{e}_b) = \delta_b^a$. Для векторов выполняется соотношение $\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = \eta_{ab}$, аналогичное соотношение $\hat{\mathbf{e}}^a \cdot \hat{\mathbf{e}}^b = \eta^{ab}$ верно и для ковекторов. В мультиспинорном формализме базисные вектора будут иметь вид $\mathbf{e}_{\alpha\dot{\alpha}}$, а ковектора - $\hat{\mathbf{e}}^{\alpha\dot{\alpha}}$.

Для описания безмассового бозона со спином s в реперном формализме вводятся физическое поле ${\Phi_\mu}^{a(s-1)} \sim {\Phi_\mu}^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)} \sim Y(s-1,0)$ и вспомогательное поле ${\Omega_\mu}^{b(s-1),a} \sim {\Omega_\mu}^{\alpha(s)\dot{\alpha}(s-2)} \oplus h.c. \sim Y(s-1,1)$ (см. [1] об описании неприводимых представлений группы $SO(n)$ с помощью таблиц Юнга). Эти поля являются 1-формами по мировым индексам. Эти поля бесследовые по любой паре тензорных индексов.

Лагранжиан для частицы со спином s имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}(-1)^s\frac{\mathcal{L}}{i} &= s\Omega^{\alpha(s-2)\dot{\gamma}\dot{\alpha}(s-1)}E_{\dot{\gamma}\dot{\beta}}{\Omega_{\alpha(s-2)}}^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}(s-1)} - (s-2)\Omega^{\alpha(s-3)\gamma\dot{\alpha}(s)}E_{\gamma\beta}{\Omega_{\alpha(s-3)}}^{\beta}{}_{\dot{\alpha}(s)} \\ &+ 2\Omega^{\alpha(s-2)\dot{\gamma}\dot{\alpha}(s-1)}e_{\beta\dot{\gamma}}D{\Phi_{\alpha(s-2)}}^{\beta}{}_{\dot{\alpha}(s-1)} + 2\lambda^2\Phi^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)}{E_\alpha}^\beta\Phi_{\alpha(s-2)\beta\dot{\alpha}(s-1)} \\ &+ h.c. \end{aligned} \tag{12}$$

Он инвариантен относительно следующих калибровочных преобразований:

$$\begin{aligned}\delta\Phi^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)} &= D\xi^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)} + (s-1){e_\beta}^{\dot{\alpha}}\eta^{\alpha(s-1)\beta\dot{\alpha}(s-2)} + h.c. \\ \delta\Omega^{\alpha(s)\dot{\alpha}(s-2)} &= D\eta^{\alpha(s)\dot{\alpha}(s-2)} + (s-2){e_\beta}^{\dot{\alpha}}\zeta^{\alpha(s)\beta\dot{\alpha}(s-3)} + s\lambda^2{e^\alpha}_{\dot{\beta}}\xi^{\alpha(s-1)\dot{\beta}\dot{\alpha}(s-2)}\end{aligned} \tag{13}$$

Из этих полей можно построить калибровочно-инвариантный объект, являющийся аналогом кручения в теории гравитации:

$$T^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)} = D\Phi^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)} + (s-1){e_\beta}^{\dot{\alpha}}\Omega^{\alpha(s-1)\beta\dot{\alpha}(s-2)} + h.c. \tag{14}$$

Однако, аналогичным образом построить аналог тензора Римана не удается - полученный тензор оказывается лишь частично инвариантен относительно калибровочных преобразований, а именно, относительно преобразований, параметризованных $\xi^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$ и $\eta^{\alpha(s)\dot\alpha(s-2)} + h.c.$

$$
\begin{aligned}
R^{\alpha(s)\dot\alpha(s-2)} =& D\Omega^{\alpha(s)\dot\alpha(s-2)} + s\lambda^2 e^{\alpha}{}_{\dot\beta}\Phi^{\alpha(s-1)\dot\beta\dot\alpha(s-2)} \\
\delta R^{\alpha(s)\dot\alpha(s-2)} =& -(s-2)e_{\beta}{}^{\dot\alpha} D\zeta^{\alpha(s-1)\beta\dot\alpha(s-2)} + (s-2)s\lambda^2 E^{\alpha}{}_{\beta}\eta^{\alpha(s-1)\beta\dot\alpha(s-2)} \\
& -(s-2)(s+2)\lambda^2 E^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\eta^{\alpha(s)\dot\beta\dot\alpha(s-3)}
\end{aligned} \tag{15}
$$

Однако, восстановить инвариантность удается, если ввести экстраполе $\Sigma^{\alpha(s+1)\dot\alpha(s-3)}$ (и комплексно сопряженное), которое преобразуется следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\delta\Sigma^{\alpha(s+1)\dot\alpha(s-3)} =& D\zeta^{\alpha(s+1)\dot\alpha(s-2)} + (s-3)e_{\beta}{}^{\dot\alpha}\zeta^{\alpha(s+1)\beta\dot\alpha(s-4)} \\
& + (s+1)\lambda^2 e^{\alpha}{}_{\dot\beta}\eta^{\alpha(s)\dot\beta\dot\alpha(s-3)}
\end{aligned} \tag{16}
$$

Это поле не входит в свободный лагранжиан, но возникает при введении взаимодействия. Тогда выражение для кривизны $R^{\alpha(s)\dot\alpha(s-2)}$ будет следующим:

$$
R^{\alpha(s)\dot\alpha(s-2)} = D\Omega^{\alpha(s)\dot\alpha(s-2)} + s\lambda^2 e^{\alpha}{}_{\dot\beta}\Phi^{\alpha(s-1)\dot\beta\dot\alpha(s-2)} + (s-2)e_{\alpha}{}^{\dot\alpha}\Sigma^{\alpha(s+1)\dot\alpha(s-3)} \tag{17}
$$

Повторяя те же самые рассуждения, мы получим, что для построения калибровочно-инвариантной кривизны $R^{\alpha(s+1)\dot\alpha(s-3)}$ потребуется новое поле $\Sigma^{\alpha(s+2)\dot\alpha(s-4)}$ и.т.д. В итоге, мы получим набор 1-форм $\Sigma^{\alpha(s-1+m)\dot\alpha(s-1-m)}$,$|m| \le s-1$, преобразующиеся следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\delta\Sigma^{\alpha(s-1+m)\dot\alpha(s-1-m)} =& D\zeta^{\alpha(s-1+m)\dot\alpha(s-1-m)} + (s-1-m)e_{\beta}{}^{\dot\alpha}\zeta^{\alpha(s-1+m)\beta\dot\alpha(s-2-m)} \\
& + (s-1+m)\lambda^2 e^{\alpha}{}_{\dot\beta}\zeta^{\alpha(s-2+m)\dot\beta\dot\alpha(s-1-m)}
\end{aligned} \tag{18}
$$

С помощью которых удается построить набор калибровочно-инвариантных объектов:

$$
\begin{aligned}
R^{\alpha(s-1+m)\dot\alpha(s-1-m)} =& D\Sigma^{\alpha(s-1+m)\dot\alpha(s-1-m)} + (s-1+m)\lambda^2 e^{\alpha}{}_{\dot\alpha}\Sigma^{\alpha(s-2+m)\dot\alpha(s-m)} \\
& + (s-1-m)e_{\alpha}{}^{\dot\alpha}\Sigma^{\alpha(s+m)\dot\alpha(s-2-m)} \\
R^{\alpha(2s-2)} =& D\Sigma^{\alpha(2s-2)} + (2s-2)\lambda^2 e^{\alpha}{}_{\dot\alpha}\Sigma^{\alpha(2s-3)\dot\alpha}
\end{aligned} \tag{19}
$$

Отметим, что для кривизн выполняются соотношения:

$$
\begin{aligned}
DR^{\alpha(s-1+m)\dot\alpha(s-1-m)} =& -(s-1+m)\lambda^2 e^{\alpha}{}_{\dot\alpha}R^{\alpha(s-2+m)\dot\alpha(s-m)} \\
& -(s-1-m)e_{\alpha}{}^{\dot\alpha}R^{\alpha(s+m)\dot\alpha(s-2-m)}, m > 0 \\
DR^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} =& -(s-1)e^{\alpha}{}_{\dot\alpha}R^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s)} - (s-1)e_{\alpha}{}^{\dot\alpha}R^{\alpha(s)\dot\alpha(s-2)}
\end{aligned} \tag{20}
$$

Возможность построить полный набор калибровочно-инвариантных объектов является одним из достоинств реперного формализма. Благодаря этому, в частности, удается выразить лагранжиан только через кривизны:

$$-(-1)^s i\mathcal{L} = \sum_{m=1}^{s-1} \frac{(s-2)!(s-1)!}{(s-1-m)!(s+m-1)!\lambda^{2m}} \times \left[R^{\alpha(s-1+m)\dot\alpha(s-1-m)} R_{\alpha(s-1+m)\dot\alpha(s-1-m)} - h.c.\right] \tag{21}$$

Вид коэффициентов при $R^{\alpha(s-1+m)\dot\alpha(s-1-m)} R_{\alpha(s-1+m)\dot\alpha(s-1-m)}$ с точностью до нормировки определяется условием отделения экстраполей:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Sigma^{\alpha(s-1-m)\dot\alpha(s-1+m)}} = 0, |m| \geq 2 \tag{22}$$

Теперь перейдем к построению системы развернутых уравнений. Обнулим кривизну $T^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$. Тогда мы получим следующее уравнение:

$$0 = D\Phi^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} + (s-1)e_\beta{}^{\dot\alpha}\Omega^{\alpha(s-1)\beta\dot\alpha(s-2)} + h.c. \tag{23}$$

С учетом соотношений для кривизн мы получим:

$$\begin{aligned}0 =& - DT^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}\\ =&(s-1)e_\beta{}^{\dot\alpha}R^{\alpha(s-1)\beta\dot\alpha(s-2)} + h.c.\\ =& - (s-1)e_\beta{}^{\dot\alpha}D\Omega^{\alpha(s)\dot\alpha(s-2)} - 2(s-1)^2\lambda^2 E_\beta{}^\alpha\Phi^{\alpha(s-1)\beta\dot\alpha(s-2)} - h.c.\end{aligned} \tag{24}$$

Благодаря тому, что $e_\beta{}^{\dot\alpha}R^{\alpha(s-1)\beta\dot\alpha(s-2)}$ обращается в ноль, поля $R^{\alpha(s)\dot\alpha(s-2)}$ и $\Sigma^{\alpha(s+1)\dot\alpha(s-3)}$ содержат одинаковое число степеней свободы (с точностью до калибровочных преобразований). Это дает возможность полностью обнулить $R^{\alpha(s)\dot\alpha(s-2)}$ выбором $\Sigma^{\alpha(s+1)\dot\alpha(s-3)}$, причем этот выбор будет однозначным с точностью до калибровочных преобразований:

$$0 = R^{\alpha(s)\dot\alpha(s-2)} = s\lambda^2 e^\alpha{}_{\dot\alpha}\Phi^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} + D\Omega^{\alpha(s)\dot\alpha(s-2)} + (s-2)e_\alpha{}^{\dot\alpha}\Sigma^{\alpha(s+1)\dot\alpha(s-3)} \tag{25}$$

Рассмотрим выражение

$$0 = (s-2)e_\alpha{}^{\dot\alpha}R^{\alpha(s+1)\dot\alpha(s-3)} = -DR^{\alpha(s)\dot\alpha(s-2)} - s\lambda^2 e^\alpha{}_{\dot\alpha}T^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} \tag{26}$$

С учетом условия $e_\alpha{}^{\dot\alpha}R^{\alpha(s+1)\dot\alpha(s-3)} = 0$ количество степеней свободы у полей $R^{\alpha(s+1)\dot\alpha(s-3)}$ и $\Sigma^{\alpha(s+2)\dot\alpha(s-3)}$ получается одинаковым (с точностью до калибровочных преобразований). Поэтому, $R^{\alpha(s+1)\dot\alpha(s-3)}$ можно обнулить выбором $\Sigma^{\alpha(s+2)\dot\alpha(s-4)}$:

$$R^{\alpha(s+1)\dot\alpha(s-3)} = D\Sigma^{\alpha(s+1)\dot\alpha(s-3)} + (s+1)\lambda^2 e^\alpha{}_{\dot\alpha}\Omega^{\alpha(s)\dot\alpha(s-2)} + (s-3)e_\alpha{}^{\dot\alpha}\Sigma^{\alpha(s+2)\dot\alpha(s-4)} \tag{27}$$

Повторяя рассуждения, мы получим набор уравнений:

$$R^{\alpha(s+m-1)\dot{\alpha}(s-m-1)} = 0, \qquad |m| \leq s-2 \tag{28}$$

Единственное отличие - случай кривизны $R^{\alpha(2s-2)}$. К этому моменту, все экстраполя уже были выражены через производные физического поля. Воспользуемся тождеством:

$$e_{\alpha}{}^{\dot{\alpha}} R^{\alpha(2s-2)} = -DR^{\alpha(2s-3)\dot{\alpha}} - (2s-3)\lambda^2 e^{\alpha}{}_{\dot{\alpha}} R^{\alpha(2s-4)\dot{\alpha}(2)} = 0 \tag{29}$$

С учетом этого соотношения, кривизна $R^{\alpha(2s-2)}$ допускает параметризацию:

$$R^{\alpha(2s-2)} = E_{\alpha(2)} W^{\alpha(2s)} \tag{30}$$

Соответствие между степенями свободы $R^{\alpha(2s-2)}$ и $W^{\alpha(2s)}$ взаимно однозначное; поле $W^{\alpha(2s)}$ при этом является калибровочно инвариантным. Поле $W^{\alpha(2s)}$ является аналогом тензора Вейля для частицы со спином s. Продифференцировав это тождество, мы получим:

$$0 = E_{\alpha(2)} D W^{\alpha(2s)} \tag{31}$$

Отсюда следует, что найдется такой тензор $W^{\alpha(2s+1)\dot{\alpha}}$, что

$$DW^{\alpha(2s)} + e_{\alpha\dot{\alpha}} W^{\alpha(2s+1)\dot{\alpha}} = 0 \tag{32}$$

Дифференцируя, получим следующее уравнение

$$\begin{aligned} 0 &= -4s\lambda^2 E^{\alpha}{}_{\beta} W^{\alpha(2s-1)\beta} - e_{\alpha\dot{\alpha}} DW^{\alpha(2s+1)\dot{\alpha}} \\ &= -e_{\alpha\dot{\alpha}}((2s+1)\lambda^2 e^{\alpha\dot{\alpha}} W^{\alpha(2s)} + DW^{\alpha(2s+1)\dot{\alpha}}) \end{aligned} \tag{33}$$

Из него следует возможность параметризации:

$$(2s+1)\lambda^2 e^{\alpha\dot{\alpha}} W^{\alpha(2s)} + DW^{\alpha(2s+1)\dot{\alpha}} = -e_{\alpha\dot{\alpha}} W^{\alpha(2s+2)\dot{\alpha}(2)} \tag{34}$$

Продолжая рассуждения, мы получим бесконечную цепочку уравнений:

$$\begin{aligned} &(2s+m)m\lambda^2 e^{\alpha\dot{\alpha}} W^{\alpha(2s+m-1)\dot{\alpha}(m-1)} + DW^{\alpha(2s+m)\dot{\alpha}(m)} \\ &+ e_{\alpha\dot{\alpha}} W^{\alpha(2s+m+1)\dot{\alpha}(m+1)} = 0 \end{aligned} \tag{35}$$

На рис. 1 показан полный набор полей, необходимых для описания безмассовой частицы со спином s.

Обсудим физический смысл этих уравнений. Как можно заметить, каждое поле с точностью до членов порядка λ^2 выражается через производную предыдущего. Поэтому $m-1$-е экстраполе $\Sigma^{\alpha(s+m-1)\dot{\alpha}(s-m-1)}$ содержит все m-е производные физического поля, не обнуляющиеся на массовой поверхности; то же верно для полей $W^{\alpha(2s+m)\dot{\alpha}(m)}$ - каждое такое поле параметризует $(s+m)$-ю производную. Лагранжиан частицы, если выразить все поля через физическое, имеет порядок 2 по производным в случае бозона и 1 в случае фермиона. Поэтому в лагранжиан не входят экстраполя, а только физические и вспомогательные поля в бозонном случае и только физические - в фермионном.

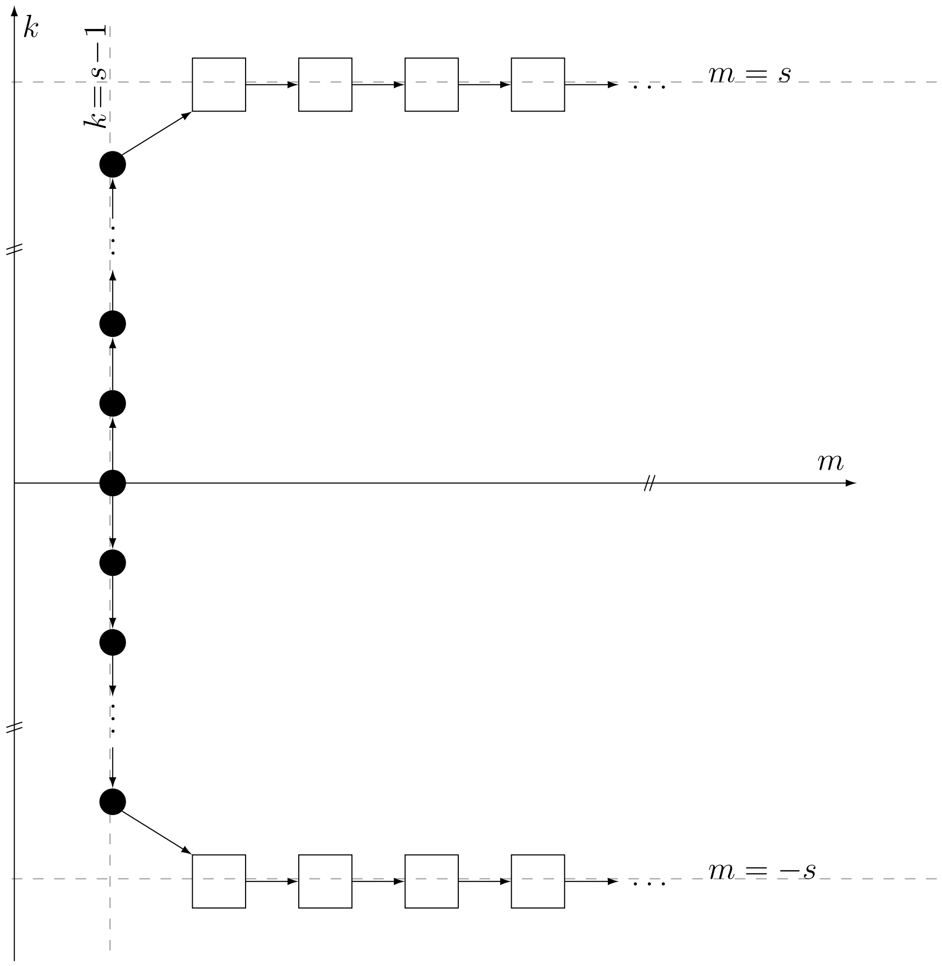

Рис. 1: Поля, необходимые для описания безмассовой частицы со спином s. Здесь 1-формы обозначены жирными точками, а калибровочно-инвариантные 0-формы - квадратами. Стрелка от объекта A к объекту B означает, что слагаемое с B входит в уравнение вида $DA + \ldots = 0$

4 Бозоны

4.1 Лагранжев формализм

Для того, чтобы построить калибровочно-инвариантное описание массивного бозона со спином s, нам потребуется набор из $s+1$ физических полей со спинами от 0 до s (и $s+1$ вспомогательных) [25, 26]. Лагранжиан массивной частицы строится как сумма лагранжианов безмассовых частиц, с добавлением перекрестных и массовых слагаемых. Каждый из безмассовых лагранжианов (кроме скаляра) имеет свой набор калибровочных симметрий. Мы требуем, чтобы итоговый лагранжиан имел группу калибровочных симметрий той же размерности, что и сумма безмассовых лагранжианов; при этом выражения для калибровочных преобразований также потребуют модификации. Лагранжиан для массивного бозона в реперном мультиспинорном имеет вид:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \\
-i\mathcal{L}_0 &= \sum_{k=1}^{s-1} (-1)^{k+1} \Big[\big[(k+1) \Omega^{\alpha(k-1)\dot\gamma\dot\alpha(k)} E_{\dot\gamma\dot\beta} \Omega_{\alpha(k-1)}{}^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha(k)} \\
&\quad - (k-1) \Omega^{\alpha(k-2)\gamma\dot\alpha(k+1)} E_{\gamma\beta} \Omega_{\alpha(k-2)}{}^{\beta}{}_{\dot\alpha(k+1)} \big] \\
&\quad + 2\Omega^{\alpha(k-1)\dot\gamma\dot\alpha(k)} e_{\beta\dot\gamma} D\Phi_{\alpha(k-1)}{}^{\beta}{}_{\dot\alpha(k)} + h.c. \Big] \\
&\quad - 4\mu_1^2 E B^{\alpha(2)} B_{\alpha(2)} - 2\mu_1 E_{\alpha(2)} B^{\alpha(2)} DA \\
&\quad + 12\mu_1^2 \beta_2 E \pi^{\alpha\dot\alpha} \pi_{\alpha\dot\alpha} - 24\mu_1\beta_2 E_{\alpha\dot\alpha} \pi^{\alpha\dot\alpha} D\phi \\
-i\mathcal{L}_1 &= \sum_{k=2}^{s-1} (-1)^{k+1} \big[-\frac{2(k+1)\mu_k}{(k-1)} \Omega^{\alpha(k+1)\dot\alpha(k-1)} E_{\alpha(2)} \Phi_{\alpha(k-1)\dot\alpha(k-1)} \\
&\quad + 2\mu_k \Omega_{\alpha(k-2)\dot\alpha(k)} E_{\alpha(2)} \Phi^{\alpha(k)\dot\alpha(k)} + h.c. \big] - 2\mu_1 \Omega^{\alpha(2)} E_{\alpha(2)} A \\
&\quad - 4\mu_1^2 E_{\alpha\dot\alpha} B^{\alpha}{}_{\beta} \Phi^{\beta\dot\alpha} + h.c. + 24\beta_2\mu_1 E_{\alpha\dot\alpha} \pi^{\alpha\dot\alpha} A \\
-i\mathcal{L}_2 &= \sum_{k=1}^{s-1} (-1)^{k+1} \big[2\beta_{k+1}(k+1) \Phi^{\alpha(k)\dot\alpha(k)} E_{\alpha}{}^{\beta} \Phi_{\alpha(k-1)\beta\dot\alpha(k)} + h.c. \big] \\
&\quad - 24\mu_1\beta_2 E_{\alpha\dot\alpha} \Phi^{\alpha\dot\alpha}\phi + 24\mu_1^2\beta_2 E\phi^2
\end{aligned} \tag{36}$$

Здесь для удобства дальнейших вычислений выбрана неканоническая нормировка полей $B^{\alpha(2)}, \pi^{\alpha\dot\alpha}, \phi$. Данный лагранжиан можно использовать и для описания частиц с бесконечным спином, если положить $s = +\infty$ ([15, 12]). Потребуем инвариантности лагранжиана относительно следующих калибровочных преобразований:

$$\begin{aligned}
\delta\Omega^{\alpha(k-1)\dot\alpha(k+1)} =& D\eta^{\alpha(k-1)\dot\alpha(k+1)} + (k-1)e^{\alpha}{}_{\dot\alpha}\zeta^{\alpha(k-2)\dot\alpha(k+2)} \\
&+ (k+1)\beta_{k+1}e_{\alpha}{}^{\dot\alpha}\xi^{\alpha(k)\dot\alpha(k)} + \frac{(k+1)\mu_k}{(k+2)}e^{\alpha\dot\alpha}\eta^{\alpha(k-2)\dot\alpha(k)} \\
&+ \frac{(k+2)\mu_{k+1}}{k}e_{\alpha\dot\alpha}\eta^{\alpha(k)\dot\alpha(k+2)} \\
\delta\Phi^{\alpha(k)\dot\alpha(k)} =& D\xi^{\alpha(k)\dot\alpha(k)} + ke^{\alpha}{}_{\dot\alpha}\eta^{\alpha(k-1)\dot\alpha(k+1)} + ke_{\alpha}{}^{\dot\alpha}\eta^{\alpha(k+1)\dot\alpha(k-1)} \\
&+ \frac{\mu_k}{k(k-1)}k^2e^{\alpha\dot\alpha}\xi^{\alpha(k-1)\dot\alpha(k-1)} + \mu_{k+1}e_{\alpha\dot\alpha}\xi^{\alpha(k+1)\dot\alpha(k+1)} \\
\delta\Omega^{\dot\alpha(2)} =& D\eta^{\dot\alpha(2)} + 2\beta_2 e_{\alpha}{}^{\dot\alpha}\xi^{\alpha\dot\alpha} + 3\mu_2 e_{\alpha\dot\alpha}\eta^{\alpha\dot\alpha(3)} \\
\delta\Phi^{\alpha\dot\alpha} =& D\xi^{\alpha\dot\alpha} + e^{\alpha}{}_{\dot\alpha}\eta^{\dot\alpha(2)} + e_{\alpha}{}^{\dot\alpha}\eta^{\alpha(2)} + \frac{\mu_1}{2}e^{\alpha\dot\alpha}\xi + \mu_2 e_{\alpha\dot\alpha}\xi^{\alpha(2)\dot\alpha(2)} \\
\delta B^{\alpha(2)} =& \eta^{\alpha(2)} \\
\delta A =& D\xi + \mu_1 e_{\alpha\dot\alpha}\xi^{\alpha\dot\alpha} \\
\delta\pi^{\alpha\dot\alpha} =& \xi^{\alpha\dot\alpha} \\
\delta\phi =& \xi
\end{aligned} \tag{37}$$

Это требование приводит к следующим соотношением для параметров μ_k, β_k:

$$\begin{aligned}
\frac{k+2}{k}\mu_{k+1}^2 &= -2\beta_{k+1}(k+1) + 2\lambda^2(k+1) + \frac{(k+1)}{(k-1)}\mu_k^2 \\
3\mu_2^2 &= 4\lambda^2 - 4\beta_2 + \mu_1^2 \\
(k-1)k\beta_k &= (k+2)(k+1)\beta_{k+1}
\end{aligned} \tag{38}$$

Решение этих соотношений зависит от двух параметров. В случае конечного спина s эта цепочка обрывается условием $\mu_s = 0$. Для полного определения коэффициентов необходим еще один параметр. В качестве этого параметра удобно ввести $M^2 = \dfrac{s(s-1)\mu_{s-1}^2}{2(s-2)}$ - параметр "массы" (см. приложение об определении массы в пространстве постоянной кривизны). μ_k и β_k выражаются через эти параметры следующим образом:

$$\begin{aligned}
{\mu_k}^2 &= \frac{(s-k)(s+k+1)(k-1)}{k(k+1)^2}\Big[(s+k)(s-k-1)\lambda^2 + M^2\Big] \\
{\mu_1}^2 &= \frac{(s-1)(s+2)}{2}\Big[(s+1)(s-2)\lambda^2 + M^2\Big] \\
\beta_k &= \frac{s(s+1)\Big[s(s-1)\lambda^2 + M^2\Big]}{(k-1)k^2(k+1)}
\end{aligned} \tag{39}$$

Для случая бесконечного спина такая параметризация не подходит, и μ_k, β_k удобнее всего выразить через младшие коэффициенты - β_2, μ_1:

$$\begin{aligned} {\mu_k}^2 &= \frac{(k-1)}{(k+1)}\left[\mu_1^2 - \frac{6(k-1)(k+2)\beta_2}{k(k+1)} + (k-1)(k+2)\lambda^2\right] \\ \beta_k &= \frac{12\beta_2}{(k-1)k^2(k+1)} \end{aligned} \tag{40}$$

Выясним, при каком условии лагранжиан является эрмитовым. Для случая конечного спина необходимо и достаточно, чтобы все μ_k^2 были неотрицательны. В плоском пространстве и AdS $M^2 \geq 0$. В случае $M^2 = 0$ в AdS отделяется старшее поле, в плоском случае лагранжиан распадается на $s+1$ безмассовое поле. В dS требование эрмитовости дает условие $M^2 \geq -s(s-1)\lambda^2$. Кроме этого, в dS возможен еще набор частично безмассовых пределов, соответствующих теории, содержащей поля со спинами $\overline{k, s}$, соответствующих массам $M^2 = -\lambda^2(s+k-1)(s-k)$. В этом случае $\mu_{k-1} = 0$, и перекрестные члены, содержащие поля $\overline{k, s}$ и $\overline{0, k-1}$, выпадают. В результате лагранжиан распадается на два независимых слагаемых, причем слагаемое, содержащее поля $\overline{k, s}$, остается эрмитовым. Таким образом, неэрмитовые слагаемые отцепляются, и теория остается унитарной несмотря на то, что масса лежит в унитарно запрещенной области.

В случае бесконечного спина удобно ввести переменную $y_k = k^2 + k - 2$. Тогда

$${\mu_k}^2 \propto \mu_1^2(y_k+2) - 6y_k\beta_2 + y_k(y_k+2)\lambda^2 \tag{41}$$

Сразу видно, что в dS случай бесконечного спина невозможен, т.к. все μ_k^2, начиная с некоторого k, становятся отрицательными. Условие унитарности в плоском случае:

$$\begin{aligned} &\beta_2 \geq 0 \\ &\mu_1^2 > 6\beta_2 \end{aligned} \tag{42}$$

Частично безмассовый предел с полями $\overline{k, +\infty}$ возможен при:

$$\begin{aligned} \beta_2 &\leq 0 \\ \mu_1^2(k^2+k) &= 6\beta_k(k^2+k-2) \end{aligned} \tag{43}$$

В пространстве AdS область унитарности в координатах μ_1^2, β_2 является неограниченной областью с кусочно-линейной границей:

$$\begin{aligned} &12\beta_2 \in \left[(k-1)k^2(k+1)\lambda^2; k(k+1)^2(k+2)\lambda^2\right], k \in \mathbb{N} \\ &\mu_1^2 > (k^2+k-2)\left[\frac{6\beta_2}{(k^2+k)} - \lambda^2\right] \end{aligned} \tag{44}$$

Частично безмассовый предел с полями $\overline{k, +\infty}$ получается при:

$$\begin{aligned}
12\beta_2 < \lambda^2 k(k+1)^2(k+2)& \\
\mu_1^2 = (k^2+k-2)\left[\frac{6\beta_2}{(k^2+k)} - \lambda^2\right]&
\end{aligned} \tag{45}$$

4.2 Кривизны

Построим полный набор калибровочно-инвариантных объектов для массивного бозона. Для этого потребуются, во-первых, те же поля, что и для полного набора безмассовых частиц. Это значит, что необходимо ввести полный набор 1-форм $\Omega^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}$, $m \le k \le s-1$; однако, наличие в лагранжиане 0-форм требует введения также и 0-форм. Это отличает массивный случай от безмассового, в котором все 0-формы появлялись только в развернутых уравнениях и были калибровочно-инвариантными объектами. Нам потребуется полный набор 0-форм $W^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}$, $m \le k \le s-1$. Здесь для удобства обозначения унифицированы: $\Phi^{\alpha(k)\dot\alpha(k)} \equiv \Omega^{\alpha(k)\dot\alpha(k)}$, $B^{\alpha(2)} \equiv W^{\alpha(2)}$, $\pi^{\alpha\dot\alpha} \equiv W^{\alpha\dot\alpha}$, $\phi \equiv W$. Калибровочные преобразования для физических и вспомогательных полей уже получены при конструировании лагранжиана. Фиксируем нормировку оставшихся полей. Тогда наиболее общий анзатц для калибровочных преобразований имеет вид (см. приложение для выражения коэффициентов $\alpha_{k,m}^{**}$):

$$\begin{aligned}
\delta\Omega^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} &= D\eta^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} \\
&+ (k+m)(k-m)\alpha_{k,m}^{--} e^{\alpha\dot\alpha}\eta^{\alpha(k+m-1)\dot\alpha(k-m-1)} \\
&+ \alpha_{k,m}^{++} e_{\alpha\dot\alpha}\eta^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m+1)} \\
&+ (k+m)\alpha_{k,m}^{-+} e^{\alpha}{}_{\dot\alpha}\eta^{\alpha(k+m-1)\dot\alpha(k-m+1)} \\
&+ (k-m)e_{\alpha}{}^{\dot\alpha}\eta^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m-1)} \\
\delta\Omega^{\alpha(2k)} &= D\eta^{\alpha(2k)} + \alpha_{k,k}^{++} e_{\alpha\dot\alpha}\eta^{\alpha(2k+1)\dot\alpha} + 2k\alpha_{k,k}^{-+} e^{\alpha}{}_{\dot\alpha}\eta^{\alpha(2k-1)\dot\alpha} \\
\delta W^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} &= \eta^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}
\end{aligned} \tag{46}$$

Этот вид преобразований полностью определяет выражения для кривизн. Для $k \geq 2$ эти кривизны имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} &= D\Omega^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} + (k+m)(k-m)\alpha^{--}_{k,m}e^{\alpha\dot\alpha}\Omega^{\alpha(k+m-1)\dot\alpha(k-m-1)} \\
&+ \alpha^{++}_{k,m}e_{\alpha\dot\alpha}\Omega^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m+1)} + (k-m)e_\alpha{}^{\dot\alpha}\Omega^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m-1)} \\
&+ (k+m)\alpha^{-+}_{k,m}e^\alpha{}_{\dot\alpha}\Omega^{\alpha(k+m-1)\dot\alpha(k-m+1)}, \qquad (0 \leq m < k) \\
R^{\alpha(2k)} &= D\Omega^{\alpha(2k)} + \alpha^{++}_{k,m}e_{\alpha\dot\alpha}\Omega^{\alpha(2k+1)\dot\alpha} + 2k\alpha^{-+}_{k,k}e^\alpha{}_{\dot\alpha}\Omega^{\alpha(2k-1)\dot\alpha} \\
&- 4k(2k-1)\alpha^{-+}_{k,k}\alpha^{--}_{k,k-1}E^{\alpha(2)}W^{\alpha(2k-2)} - 2\alpha^{++}_{k,k}E_{\alpha(2)}W^{\alpha(2k+2)} \\
&- \frac{\alpha^{++}_{k-1}\alpha^{--}_k}{k+1}E^\alpha{}_\beta W^{\alpha(2k-1)\beta} \\
C^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} &= DW^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} - \Omega^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} \\
&+ (k+m)(k-m)\alpha^{--}_{k,m}e^{\alpha\dot\alpha}W^{\alpha(k+m-1)\dot\alpha(k-m-1)} \\
&+ \alpha^{++}_{k,m}e_{\alpha\dot\alpha}W^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m+1)} \\
&+ (k-m)e_\alpha{}^{\dot\alpha}W^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m-1)} \\
&+ (k+m)\alpha^{-+}_{k,m}e^\alpha{}_{\dot\alpha}W^{\alpha(k+m-1)\dot\alpha(k-m+1)}
\end{aligned} \tag{47}
$$

Отдельно выпишем младшие кривизны ($k = 0, 1$), для которых выражения выше неприменимы:

$$
\begin{aligned}
R^{\alpha\dot\alpha} &= D\Phi^{\alpha\dot\alpha} + e^\alpha{}_{\dot\alpha}\Omega^{\dot\alpha(2)} + e_\alpha{}^{\dot\alpha}\Omega^{\alpha(2)} + \frac{\mu_1}{2}e^{\alpha\dot\alpha}A + \mu_2 e_{\alpha\dot\alpha}\Phi^{\alpha(2)\dot\alpha(2)} \\
R^{\alpha(2)} &= D\Omega^{\alpha(2)} + \mu_0^2 e^\alpha{}_{\dot\alpha}\Phi^{\alpha\dot\alpha} + 3\mu_2 e_{\alpha\dot\alpha}\Omega^{\alpha(3)\dot\alpha} - \mu_1^2 E^\alpha{}_\beta B^{\alpha\beta} \\
&- \mu_0^2\mu_1 E^{\alpha(2)}\phi - 6\mu_2 E_{\alpha(2)}W^{\alpha(4)} \\
C^{\alpha\dot\alpha} &= D\pi^{\alpha\dot\alpha} - \Phi^{\alpha\dot\alpha} + e^\alpha{}_{\dot\beta}B^{\dot\alpha\dot\beta} + e_\beta{}^{\dot\alpha}B^{\alpha\beta} + \frac{\mu_1}{2}e^{\alpha\dot\alpha}\phi + \mu_2 e_{\alpha\dot\alpha}W^{\alpha(2)\dot\alpha(2)} \\
C^{\alpha(2)} &= DB^{\alpha(2)} - \Omega^{\alpha(2)} + \mu_0^2 e^\alpha{}_{\dot\alpha}\pi^{\alpha\dot\alpha} + 3\mu_2 e_{\alpha\dot\alpha}W^{\alpha(3)\dot\alpha} \\
R &= DA + \mu_1 e_{\alpha\dot\alpha}\Phi^{\alpha\dot\alpha} - 2\mu_1 E_{\alpha(2)}B^{\alpha(2)} - 2\mu_1 E_{\dot\alpha(2)}B^{\dot\alpha(2)} \\
C &= D\phi - A + \mu_1 e_{\alpha\dot\alpha}\pi^{\alpha\dot\alpha}
\end{aligned} \tag{48}
$$

Коэффициенты $\alpha^{ij}_{k,m}$ удобно выразить через $\alpha^{++}_k, \alpha^{--}_k, \alpha^{-+}_m$:

$$
\begin{aligned}
\alpha^{++}_{k,m} &= \frac{\alpha^{++}_k}{(k-m+1)(k-m+2)} \\
\alpha^{--}_{k,m} &= \frac{\alpha^{--}_k}{(k+m)(k+m+1)} \\
\alpha^{-+}_{k,m} &= \frac{\alpha^{-+}_m}{(k-m+1)(k-m+2)(k+m)(k+m+1)}
\end{aligned} \tag{49}
$$

Значения $\alpha_k^{++}, \alpha_k^{--}, \alpha_m^{-+}$ в случае конечного спина (см. приложение о коэффициентах):

$$\begin{aligned}
{\alpha_{k-1}^{++}}^2 &= k(k-1)(s-k)(s+k+1)\Big[(s+k)(s-k-1)\lambda^2 + M^2\Big] \\
{\alpha_k^{--}}^2 &= \frac{(s-k)(s+k+1)}{k(k-1)}\Big[(s+k)(s-k-1)\lambda^2 + M^2\Big] \\
\alpha_m^{-+} &= (s-m+1)(s+m)\Big[(s-m)(s+m-1)\lambda^2 + M^2\Big]
\end{aligned} \tag{50}$$

и в случае бесконечного спина:

$$\begin{aligned}
{\alpha_{k-1}^{++}}^2 &= k(k-1)\Big[\mu_1^2 k(k+1) - 6(k-1)(k+2)\beta_2 \\
&\quad + (k-1)k(k+1)(k+2)\lambda^2\Big] \\
{\alpha_k^{--}}^2 &= \frac{1}{k(k-1)}\Big[\mu_1^2 k(k+1) - 6(k-1)(k+2)\beta_2 \\
&\quad + (k-1)k(k+1)(k+2)\lambda^2\Big] \\
\alpha_k^{-+} &= \Big[\mu_1^2(k-1)k - 6(k-2)(k+1)\beta_2 + (k-2)(k-1)k(k+1)\lambda^2\Big]
\end{aligned} \tag{51}$$

Как мы видели выше, из условия эрмитовости лагранжиана следуют ограничения для значения параметров $s, M/\mu_1, \beta_2$. Так как и ${\alpha_{k,m}^{ij}}^2$, и μ_k^2 являются параметрами калибровочных преобразований, то их знак должен определяться одинаковыми выражениями. Действительно, ${\alpha_{k,m}^{--}}^2 \propto {\alpha_{k-1,m}^{++}}^2 \propto \mu_k^2$, ${\alpha_{m+1}^{-+}}^2 \propto \mu_m^2$. Поэтому, в случае неэрмитового лагранжиана кривизны также будут содержать мнимые коэффициенты. В частности, это приводит к нарушению свойства $\big(R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}\big)^\dagger = R^{\alpha(k-m)\dot\alpha(k+m)}$, если использовать общее выражение для всех $R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}$. В случае частично безмассового предела, соответствующего набору полей $\overline{k,s}$ младшие поля (т.е. $\Omega^{\alpha(l+m)\dot\alpha(l-m)}$,$W^{\alpha(l+m)\dot\alpha(l-m)}$ при $l < k-1$) "отцепляются" и не входят в выражения для старших кривизн, которые остаются эрмитовыми. Кроме этого, в кривизне $R^{\alpha(2k-2)}$ отцепляется 0-форма $W^{\alpha(2k-2)}$, а в кривизнах $C^{\alpha(l+k)\dot\alpha(l-k)}$ - все 0-формы $W^{\alpha(l+k-1)\dot\alpha(l-k+1)}$. Тем самым, отцепляются и поля $W^{\alpha(l+n-1)\dot\alpha(l-n+1)}$, $n < k$ вместе с кривизнами $C^{\alpha(l+n-1)\dot\alpha(l-n+1)}$, $n < k$. Таким образом, в случае частично безмассового предела остаются поля $\Omega^{\alpha(l+m)\dot\alpha(l-m)}$ при $k-1 \le l \le s-1$ и $W^{\alpha(l+m)\dot\alpha(l-m)}$ при $k-1 \le l \le s-1$, $k \le m$, т.е. поля, возникающие при описании компонент лагранжиана со спином от k до s (см. рис. 2).

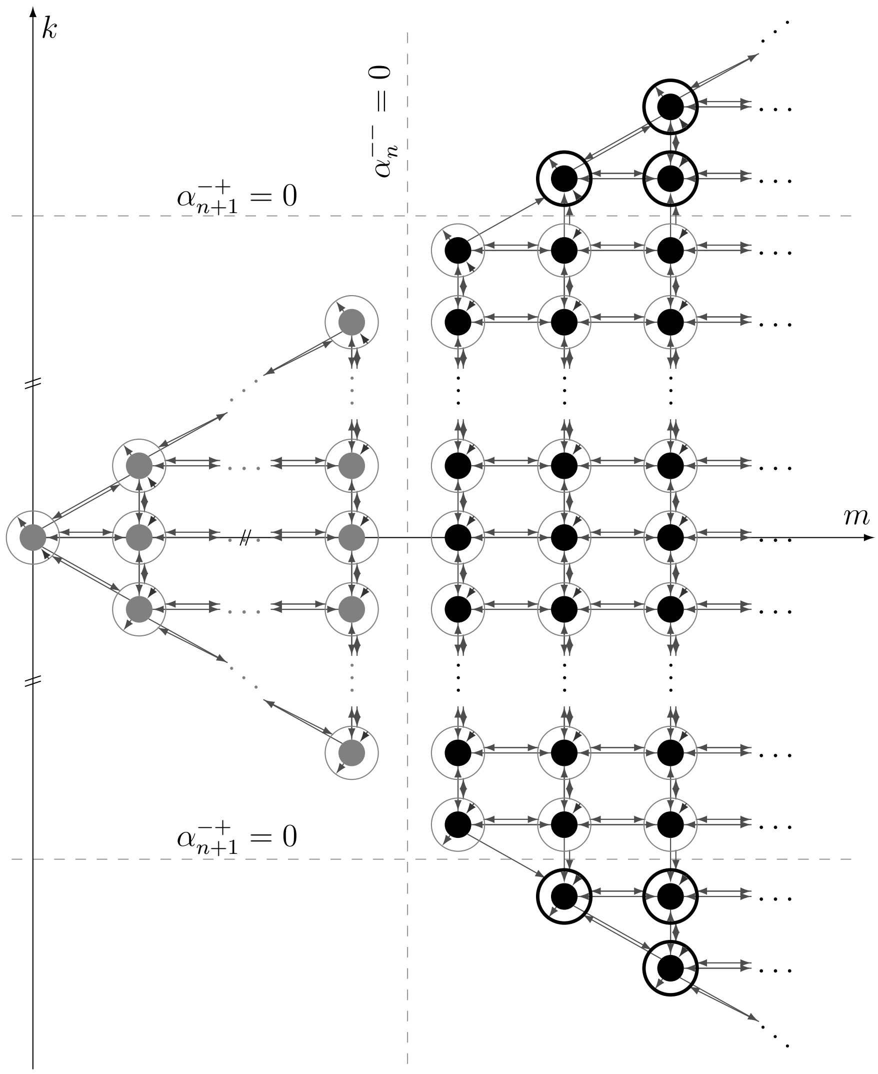

Рис. 2: Отцепление полей при частично безмассовом пределе вида n, s. Здесь 1-формы обозначены жирными точками, а 0-формы - кругами. Стрелка от объекта A к объекту B означает, что слагаемое с B входит в уравнение вида $DA + \ldots = 0$. Отцепляющиеся поля нарисованы серым цветом.

4.3 Выражение лагранжиана через кривизны

Наличие полного набора кривизн позволяет выразить лагранжиан только через них. Наша следующая задача - выразить лагранжиан через калибровочно-инвариантные объекты. Наиболее общее выражение лагранжиана через кривизны следующее($a_{k,m} = -a_{k,-m}$, $b_{k,m} = -b_{k,-m}$, $c_{k,m} = -c_{k,-m}$ из условия эрмитовости):

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{L} = &\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{m=-k}^{k}(-1)^{k+1}a_{k,m}R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}R_{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} \\
&+\sum_{k=0}^{s-2}\sum_{m=-k}^{k}(-1)^{k+1}b_{k,m}R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}e^{\alpha\dot\alpha}C_{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m+1)} \\
&+\sum_{k=1}^{s-1}\sum_{m=-k+1}^{k-1}(-1)^{k+1}c_{k,m}R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}e_{\alpha\dot\alpha}C_{\alpha(k+m-1)\dot\alpha(k-m-1)} \\
&+\sum_{k=1}^{s-1}\sum_{m=-k}^{k-1}(-1)^{k+1}d_{k,m}R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}e^{\beta}{}_{\dot\alpha}C_{\alpha(k+m)\beta\dot\alpha(k-m-1)} \\
&-\sum_{k=1}^{s-1}\sum_{m=-k+1}^{k}(-1)^{k+1}d_{k,-m}R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}e_{\alpha}{}^{\dot\beta}C_{\alpha(k+m-1)\dot\beta\dot\alpha(k-m)} \\
&+\sum_{k=1}^{s-1}\sum_{m=-k+1}^{k}(-1)^{k+1}e_{k,m}C^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}E^{\beta}{}_{\alpha}C_{\alpha(k+m-1)\beta\dot\alpha(k-m)} \\
&-\sum_{k=1}^{s-1}\sum_{m=-k}^{k-1}(-1)^{k+1}e_{k,-m}C^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}E^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha}C_{\alpha(k+m)\dot\beta\dot\alpha(k-m-1)} \\
&+\sum_{k=0}^{s-2}\sum_{m=-k}^{k}(-1)^{k+1}f_{k,m}C^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}E^{\alpha(2)}C_{\alpha(k+m+2)\dot\alpha(k-m)} \\
&-\sum_{k=0}^{s-2}\sum_{m=-k}^{k}(-1)^{k+1}f_{k,-m}C^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}E^{\dot\alpha(2)}C_{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m+2)}
\end{aligned} \tag{52}$$

Наша задача - подобрать коэффициенты $a_{k,m} - f_{k,m}$ так, чтобы лагранжиан был бы равен (36). Наиболее прямолинейный способ - подставить выражения кривизн через поля в (52), и подобрать $a_{k,m} - f_{k,m}$ так, чтобы лагранжиан совпал бы с (36). Более удобно, однако, приравнять уравнения движения, следующие из лагранжианов, выраженные через кривизны. Это эквивалентно условию отделения экстраполей

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Omega^{\alpha(k-1-m)\dot\alpha(s-1+m)}}=0, \qquad |m|\geq 2$$
$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta W^{\alpha(k-1-m)\dot\alpha(k-1+m)}}=0, \qquad k\geq 2 \tag{53}$$

и условию нормировки коэффициентов $a_{k,m}-f_{k,m}$, определяемой из уравнений движения:

$$\begin{aligned}
&(-1)^{k+1}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Omega^{\alpha(k-1)\dot\alpha(k+1)}}=2e_{\beta\dot\gamma}R_{\alpha(k-1)}{}^{\beta}{}_{\dot\alpha(k)}\\
&(-1)^{k+1}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi^{\alpha(k)\dot\alpha(k)}}=2e_{\alpha\dot\gamma}R_{\alpha(k-1)}{}^{\dot\gamma}{}_{\dot\alpha(k)}+h.c.\\
&\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A}=2\mu_1E_{\alpha(2)}C^{\alpha(2)}+h.c.\\
&\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta B^{\alpha(2)}}=-2\mu_1E_{\alpha(2)}R\\
&\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\pi^{\alpha\dot\alpha}}=-24\mu_1\beta_2E_{\alpha\dot\alpha}C\\
&\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}=-24\mu_1\beta_2E_{\alpha\dot\alpha}C^{\alpha\dot\alpha}
\end{aligned}\tag{54}$$

Эти условия задают систему линейных уравнений для $a_{k,m}-f_{k,m}$. При этом существует произвол в выборе коэффициентов $a_{k,m}-f_{k,m}$, связанный с тем, что некоторые выражения, квадратичные по кривизнам, равны полной производной (см. приложение), не влияющей на уравнения движения:

$$\begin{aligned}
&-i(\mathcal{L}-\mathcal{L}_0)=\\
&\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{m=1}^{k}-(-1)^{k+1}p_{k,m}D(R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}C_{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}-h.c.)\\
&+\sum_{k=1}^{s-1}\sum_{m=0}^{k-1}-(-1)^{k+1}q_{k,m}D(C^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}e^{\alpha}{}_{\dot\alpha}C_{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m-1)}-h.c.)\\
&+\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{m=1}^{k}-(-1)^{k+1}r_{k,m}D(C^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}e^{\alpha\dot\alpha}C_{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m+1)}-h.c.)
\end{aligned}\tag{55}$$

Поэтому, если $a^{(0)}_{k,m} - f^{(0)}_{k,m}$ является решением, то любые $a_{k,m} - f_{k,m}$ вида

$$
\begin{aligned}
\pm a_{k,\pm m} &= \pm a^{(0)}_{k,\pm m} + p_{k,m}\\
\pm b_{k,\pm m} &= \pm b^{(0)}_{k,\pm m} + p_{k,m}\alpha^{++}_{k,m} - p_{k+1,m}(k+m+1)(k-m+1)\alpha^{--}_{k+1,m} + r_{k,m}\\
\mp c_{k+1,\pm m} &= \mp c^{(0)}_{k+1,\pm m} + p_{k,m}\alpha^{++}_{k,m} - p_{k+1,m}(k+m+1)(k-m+1)\alpha^{--}_{k+1,m} + r_{k,m}\\
d_{k,m} &= d^{(0)}_{k,m} - (k-m)p_{k,m} + (k+m+1)\alpha^{-+}_{k,m+1}p_{k,m+1} + q_{k,m}\\
d_{k,-1-m} &= d^{(0)}_{k,-1-m} - (k-m)p_{k,m} + (k+m+1)\alpha^{-+}_{k,m+1}p_{k,m+1} - q_{k,m}\\
e_{k,m} &= e^{(0)}_{k,m} + (k+m)\alpha^{-+}_{k,m+1}q_{k,m} + (k-m+2)q_{k,m-1}\\
&\quad - (k-m+2)(k+m)\alpha^{--}_{k+1,m}r_{k,m} + \alpha^{++}_{k-1,m}r_{k-1,m}\\
e_{k,0} &= e^{(0)}_{k,0} + k\alpha^{-+}_{k,1}q_{k,0}\\
&\quad - k(k+2)\alpha^{--}_{k+1,0}r_{k,0} + \alpha^{++}_{k-1,0}r_{k-1,0}\\
e_{k,-m} &= e^{(0)}_{k,-m} + (k+m+2)\alpha^{-+}_{k,m+1}q_{k,m} + (k-m)q_{k,m-1}\\
&\quad + (k+m+2)(k-m)\alpha^{--}_{k+1,m}r_{k,m} - \alpha^{++}_{k-1,m}r_{k-1,m}\\
e_{1,0} &= e^{(0)}_{1,0} + 4\beta_2 q_{1,0} - 3\alpha^{--}_{2,0}r_{1,0}\\
e_{k,k} &= e^{(0)}_{k,k} + \frac{\alpha^{++}_{k-1}\alpha^{--}_{k}}{k+1}p_{k,k} + 2q_{k,k-1} - 4k\alpha^{--}_{k+1,k}r_{k,k}\\
e_{1,1} &= e^{(0)}_{1,1} + \mu_1^2 p_{1,1} + 2q_{1,0} - 4\alpha^{--}_{2,1}r_{1,1}\\
f_{k,m} &= f^{(0)}_{k,m} - (k+m+1)(k-m+2)\alpha^{--}_{k+1,m}q_{k+1,m} + \alpha^{++}_{k,m+1}q_{k,m}\\
&\quad - (k+m+1)\alpha^{-+}_{k,m+1}r_{k,m+1} + (k-m+2)r_{k,m}\\
f_{k,-m} &= f^{(0)}_{k,-m} + (k+m+2)(k-m+1)\alpha^{--}_{k+1,m}q_{k+1,m} - \alpha^{++}_{k,m-1}q_{k,m-1}\\
&\quad - (k+m+2)\alpha^{-+}_{k+1,m}r_{k,m} + (k-m+1)r_{k,m-1}\\
f_{k,k} &= f^{(0)}_{k,k} - 2\alpha^{++}_{k,k}p_{k,k} - 4(k+1)(2k+1)\alpha^{-+}_{k+1,k+1}\alpha^{--}_{k+1,k}p_{k+1,k+1}\\
&\quad - 2(2k+1)\alpha^{--}_{k+1,k}q_{k+1,k} + 2r_{k,k}\\
f_{0,0} &= f^{(0)}_{0,0} - \mu_1 q_{1,0} - 2\beta_2\mu_1 p_{1,1} + 2\mu_1 p_{0,0} + 2r_{0,0}
\end{aligned}
\tag{56}
$$

также являются решением. Благодаря этому произволу, можно выбрать $a^{(0)}_{k,m} - f^{(0)}_{k,m}$ так, чтобы некоторые коэффициенты были бы нулевыми. Из (56) видно, что подбором $p_{k,m}, q_{k,m}, r_{k,m}$ можно обнулить все $b_{k,m}, c_{k,m}$ и $d_{k,m}$ при $m \geq 0$. Оказывается, что при этом также обнуляются и все $d_{k,m}, e_{k,m}, f_{k,m}$, кроме $e_{k,k}, f_{k,k}$. Для $a^{(0)}_{k,m}, e^{(0)}_{k,k}, f^{(0)}_{k,k}$ получаются следующие выражения:

$$
\begin{aligned}
a^{(0)}_{k,\pm m} &= \pm \frac{(k-1)!(k+m+1)!k!}{(k-m)!^2(k-m+1)!\prod\limits_{i=1}^{m}\alpha_i^{-+}}, m>0 \\
e^{(0)}_{k,k} &= \frac{a_{k,k}\alpha^{-+}_{k+1}}{k+1} \\
f^{(0)}_{k,k} &= -4\alpha^{++}_{k,k}a_{k,k} \\
f^{(0)}_{0,0} &= -2\mu_1
\end{aligned} \tag{57}
$$

и тем самым выражение для лагранжиана существенно упрощается:

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{L} = \sum_{k=0}^{s-1}(-1)^{k+1}\sum_{m=0}^{k} a_{k,m}R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}R_{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} \\
+\sum_{k=1}^{s-1}(-1)^{k+1}e_{k,k}C^{\alpha(2k)}E^{\beta}{}_{\alpha}C_{\alpha(2k-1)\beta} - h.c. \\
+\sum_{k=0}^{s-2}(-1)^{k+1}f_{k,k}C^{\alpha(2k)}E^{\alpha(2)}C_{\alpha(2k+2)} - h.c.
\end{aligned} \tag{58}
$$

Заметим, что структура выражений совпадает с [18]. Зная частное решение $a^{(0)}_{k,m}, e^{(0)}_{k,k}, f^{(0)}_{k,k}$, можно найти и общее решение для $a_{k,m} - f_{k,m}$ с помощью (56), подставляя в качестве $p_{k,m}, q_{k,m}, r_{k,m}$ произвольные числа. Легко видеть, что выражения для $a^{(0)}_{k,m} - f^{(0)}_{k,m}$ имеют полюса в случае частично безмассового предела, т.е. при $\alpha^{-+}_n = \alpha^{--}_{n-1} = 0$. В этом случае анзатц из [18] не работает, и в лагранжиане возникнут $e_{k,m}, f_{k,m}$ с $m < k$. Чтобы получить $a_{k,m} - f_{k,m}$ в случае частично безмассового предела, выберем $p_{k,m}, q_{k,m}, r_{k,m}$ в общем решении (56) так, чтобы полюса во всех выражениях были бы устранены, после чего возьмем предел $\alpha^{-+}_n = \alpha^{--}_{n-1} = 0$. Наиболее простой способ это сделать - обнулить "плохие" коэффициенты $a^{(0)}_{k,m}$, $m \geq n$, $e^{(0)}_{k,k}, f^{(0)}_{k,k}, k > n$, оставив нулевыми $b_{k,m}, c_{k,m}$ и $d_{k,m} (m \neq n-1)$. Коэффициенты с $k < n$ остаются нетронутыми, кроме обнуляющихся $e_{n-1,n-1}, f_{n-2,n-2}, f_{n-1,n-1}$; выпишем выражения для коэффициентов с $k \geq n$, не обращающихся в ноль:

$$
\begin{aligned}
\pm a_{k,\pm m} &= \frac{(k-1)!(k+m+1)!k!}{(k-m)!^2(k-m+1)!\prod\limits_{i=1}^{m}\alpha_i^{-+}}, 0<m<n \\
d_{k,n-1} &= -2(k-n+1)a_{k,n-1} \\
e_{k,n} &= -(k-n+1)(k-n+2)a_{k,n-1} \\
e_{k,-n} &= -(k-n+1)(k-n)a_{k,n-1}
\end{aligned} \tag{59}
$$

Эти выражения получаются из (56) при следующих ненулевых $p_{k,m}, q_{k,m}$ (все $r_{k,m} = 0$):

$$p_{k,m} = -\frac{(k-1)!(k+m+1)!k!}{(k-m)!^2(k-m+1)!\prod\limits_{i=1}^{m}\alpha_i^{-+}}, m \geq n$$
$$q_{k,n-1} = -\frac{(k-1)!(k+n)!k!}{(k-n)!(k-n+1)!(k-n+2)!\prod\limits_{i=1}^{n-1}\alpha_i^{-+}} \qquad (60)$$

Лагранжиан в этом случае приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{L} = & -i\mathcal{L}^{(0,n-2)} \\
& + \sum_{k=n-1}^{s-1}\sum_{m=-n+1}^{n-1}(-1)^{k+1}a_{k,m}R^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)}R_{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)} \\
& + \sum_{k=n}^{s-1}(-1)^{k+1}d_{k,n-1}\left[R^{\alpha(k+n-1)\dot{\alpha}(k-n+1)}e^{\beta}{}_{\dot{\alpha}}C_{\alpha(k+n-1)\beta\dot{\alpha}(k-n)} - h.c.\right] \\
& + \sum_{k=n}^{s-1}(-1)^{k+1}e_{k,n}\left[C^{\alpha(k+n)\dot{\alpha}(k-n)}E^{\beta}{}_{\alpha}C_{\alpha(k+n-1)\beta\dot{\alpha}(k-n)} - h.c.\right] \\
& + \sum_{k=n}^{s-1}(-1)^{k+1}e_{k,-n}\left[C^{\alpha(k+n)\dot{\alpha}(k-n)}E^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}}C_{\alpha(k+n-1)\beta\dot{\alpha}(k-n)} - h.c.\right] \qquad (61)
\end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{L}^{(0,n-2)}$ содержит все слагаемые с $k \leq n-2$. Все выражения, приведенные выше, применимы также и для $n = 1$, если положить $\prod\limits_{i=k}^{k-1}\alpha_i^{-+} \equiv 1$, $\mathcal{L}^{(0,-1)} \equiv 0$.

Можно заметить, что выражение лагранжиана через кривизны разбивается на два куска, каждый из которых содержит только кривизны с $k \geq n-1$ и $k < n-1$, что и следовало ожидать при частично безмассовом пределе. Примечательно, что при этом кривизны, содержащие экстраполя $W^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)}$, $|m| \leq n-1$, то есть поля, соответствующие компоненте спина $k \leq n-1$, не входят в лагранжиан для полей $\overline{n,s}$.

4.4 Развернутые уравнения

В разделе 2 мы видели, что начальные уравнения цепочки развернутых уравнений имеют вид условий обнуления кривизн. Аналогичное верно и в случае массивных полей. Рассмотрим систему уравнений вида:

$$R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} = 0$$
$$C^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} = 0 \qquad (62)$$

В случае бесконечного спина эта система формально уже является системой развернутых уравнений. Следует, однако, отметить, что полный анализ системы развернутых уравнений для частиц с бесконечным спином не проводился. В случае конечного спина эти уравнения представляют собой лишь начальные звенья бесконечной цепочки. Продолжим эту цепочку. На примере безмассового случая мы видели, что набор 0-форм для безмассового спина s имеет вид $W^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k)}, k \geq s$ (и комплексно сопряженные). Тогда для массивного спина потребуются поля $W^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}$ со всеми возможными $k \geq s, |m| \leq s$. Подчеркнем, что все вводимые поля являются калибровочно-инвариантными.

Первое поле с $k - m = s$ (тензор Вейля $W^{\alpha(2s)}$) возникает при разворачивании цепочки, соответствующей $R^{\alpha(2s-2)}$; поля с $k - m < s$ появляются при дальнейшем развертывании цепочки, соответствующей $C^{\alpha(s+m-1)\dot\alpha(s-m-1)}$. Поэтому, уравнения для старших полей модифицируются следующим образом:

$$0 = R^{\alpha(2s-2)} - 2E_{\alpha(2)}W^{\alpha(2s)}$$
$$0 = C^{\alpha(s+m-1)\dot\alpha(s-m-1)} + e_{\alpha\dot\alpha}W^{\alpha(s+m)\dot\alpha(s-m)} \qquad (63)$$

Общий анзатц для цепочки уравнений, содержащих только калибровочно-инвариантные 0-формы, следующий:

$$\begin{aligned} 0 &= DW^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} + (k+m)(k-m)\beta^{--}_{k,m}e^{\alpha\dot\alpha}W^{\alpha(k+m-1)\dot\alpha(k-m-1)} \\ &+ e_{\beta\dot\beta}W^{\alpha(k+m)\beta\dot\alpha(k-m)\dot\beta} + (k-m)\beta^{+-}_{k,m}e_\beta{}^{\dot\alpha}W^{\alpha(k+m)\beta\dot\alpha(k-m-1)} \\ &+ (k+m)\beta^{-+}_{k,m}e^\alpha{}_{\dot\beta}W^{\alpha(k+m-1)\dot\alpha(k-m)\dot\beta} \end{aligned} \qquad (64)$$

Здесь условие эрмитовости накладывает ограничение $\beta^{-+}_{k,m} = \beta^{-+}_{k,-m}$ Из условия согласованности уравнений получаются следующие выражения для коэффициентов:

$$\begin{aligned}
\beta^{-+}_{k,m} &= \frac{\beta^{-+}_m}{(k+m)(k+m+1)} \\
\beta^{+-}_{k,m} &= \frac{\beta^{+-}_m}{(k-m)(k-m+1)} \\
\beta^{--}_{k,m} &= \frac{\alpha^{-+}_{k+1}}{(k+m)(k+m+1)(k-m)(k-m+1)} \\
\beta^{-+}_m &= \frac{\alpha^{-+}_m}{(s-m)(s-m+1)}, 1 \le m < s \\
\beta^{-+}_s &= \frac{\alpha^{-+}_s}{2} \\
\beta^{+-}_m &= (s-m-1)(s-m), 0 \le m < s-1 \\
\beta^{+-}_{s-1} &= 2
\end{aligned} \tag{65}$$

Как мы уже знаем, в случае частично безмассового предела $\alpha^{-+}_n = 0$ кривизны $C^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)}$, $m < n$ отцепляются. В развернутых уравнениях мы имеем $\beta^{-+}_n = 0$, что соответствует отцеплению полей $W^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)}, m < n$. Тем самым, из цепочки выпадают все уравнения, содержащие $W^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)}$; остаются лишь поля, соответствующие компонентам со спинами $\overline{n,s}$.

4.5 Развернутые уравнения в формализме Васильева-Скворцова

В работе Васильева и Скворцова [21] был предложен подход к описанию частично безмассовых полей с использованием только 1-форм. Рассмотрим частично безмассовый предел, соответствующий отделению полей $\overline{n,s}$. Формализм Васильева-Скворцова соответствует частичной фиксации калибровки, обнуляющей все 0-формы $W^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)}$, $k < s$, $|m| \ge n-1$.

Сначала обсудим, что произойдет с кривизнами $C^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)}$ при такой фиксации калибровки. Как уже было сказано ранее, кривизны $C^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)}$, $|m| < n-1$ отцепляются. Кривизны $C^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)}$, $|m| \ge n-1$ приобретут следующий вид:

$$C^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)} = -\Omega^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)} \tag{66}$$

Кривизны $R^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)}$, $|m| < k$, не изменятся, однако вместо

$R^{\alpha(k+n-2)\dot\alpha(k-n+2)}, |m| = n-2$ удобно выбрать кривизну $\bar R^{\alpha(k+n-2)\dot\alpha(k-n+2)}$:

$$\begin{aligned}
\bar R^{\alpha(k+n-2)\dot\alpha(k-n+2)} &= R^{\alpha(k+n-2)\dot\alpha(k-n+2)} + (k-n+2) e_\alpha{}^{\dot\alpha} C^{\alpha(k+n-1)\dot\alpha(k-n+1)} \\
&= D\Omega^{\alpha(k+n-2)\dot\alpha(k-n+2)} \\
&+ (k+n-2)(k-n+2)\alpha^{--}_{k,n-2} e^{\alpha\dot\alpha}\Omega^{\alpha(k+n-3)\dot\alpha(k-n+1)} \\
&+ \alpha^{++}_{k,n-2} e_{\alpha\dot\alpha}\Omega^{\alpha(k+n-1)\dot\alpha(k-n+3)} \\
&+ (k+n-2)\alpha^{-+}_{k,n-2} e^{\alpha}{}_{\dot\alpha}\Omega^{\alpha(k+n-3)\dot\alpha(k-n+3)} \qquad (67)
\end{aligned}$$

Для унификации обозначений положим $\bar R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} = R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}, |m| < n-2$. Тогда в наборе кривизн $\bar R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}$ вообще отсутствует связь с полями $\Omega^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}, |m| \geq n-1$. Лагранжиан в этом случае удается выразить только через $\bar R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}$:

$$-i\mathcal{L} = -i\mathcal{L}^{(0,n-2)} + \sum_{k=n-1}^{s-1} \sum_{m=-n+1}^{n-1} (-1)^{k+1} a_{k,m} \bar R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} \bar R_{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} \qquad (68)$$

Таким образом, отцепляются не только все 0-формы, но и 1-формы $\Omega^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}, |m| \geq n-1$.

Теперь получим развернутые уравнения. Для этого необходимо перейти к кривизнам $\bar R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}$:

$$\begin{aligned}
\bar R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} &= 0, && k < s-1 \\
\bar R^{\alpha(s-1+m)\dot\alpha(s-1-m)} &= 0, && m < n-2 \\
\bar R^{\alpha(s+n-3)\dot\alpha(s-n+1)} &= 2E_{\alpha(2)} W^{\alpha(s+n-1)\dot\alpha(s-n+1)} && (69)
\end{aligned}$$

Последнее уравнение содержит единственную связь с калибровочно-инвариантными 0-формами $W^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}, k \geq s, |m| \geq n-1$; при этом ни набор этих 0-форм, ни уравнения, содержащие только эти 0-формы, не изменятся. Это закономерный результат, так как переход к формализму Васильева-Скворцова сводится к частичной фиксации калибровки.

5 Фермионы

5.1 Лагранжев формализм

Лагранжиан для массивного фермиона строится так же, как и для бозона [17, 26]. Нам потребуются поля, описывающие частицы со спинами $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots s + \frac{1}{2}$. Итоговый лагранжиан строится как сумма безмассовых лагранжианов с добавленными перекрестными и массовыми слагаемыми. При этом все исходные калибровочные симметрии безмассовых слагаемых должны остаться и для итогового лагранжиана. Запишем лагранжиан в виде:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} =& \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 \\
\mathcal{L}_0 =& \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^{k+1} \Psi_{\alpha(k)\beta\dot{\alpha}(k)} e^{\beta}{}_{\dot{\beta}} D \Psi^{\alpha(k)\dot{\alpha}(k)\dot{\beta}} - \alpha_0^2 \psi_\alpha E^{\alpha}{}_{\dot{\alpha}} D \psi^{\dot{\alpha}} \\
\mathcal{L}_1 =& \sum_{k=1}^{s-1} (-1)^{k+1} \alpha_k \Psi_{\alpha(k-1)\beta(2)\dot{\alpha}(k)} E^{\beta(2)} \Psi^{\alpha(k-1)\dot{\alpha}(k)} + \alpha_0^2 \Psi_\alpha E^{\alpha}{}_{\dot{\alpha}} \psi^{\dot{\alpha}} + h.c. \\
& + \sum_{k=1}^{s-1} (-1)^{k+1} \frac{\beta_{k+1}}{2} \big[(k+2) \Psi_{\alpha(k)\beta\dot{\alpha}(k)} E^{\beta}{}_{\gamma} \Psi^{\alpha(k)\gamma\dot{\alpha}(k)} \\
& - k \Psi_{\alpha(k+1)\dot{\beta}\dot{\alpha}(k-1)} E^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\gamma}} \Psi^{\alpha(k+1)\dot{\gamma}\dot{\alpha}(k-1)} \big] \\
& + \beta_1 \alpha_0^2 E \psi_\alpha \psi^\alpha + h.c.
\end{aligned} \tag{70}$$

где $\mathcal{L}_0$ -сумма всех кинетических членов, $\mathcal{L}_1$ - всех перекрестных и массовых членов. В свободный лагранжиан вспомогательные поля не входят, хотя их введение и необходимо при изучении взаимодействий. Нормировка поля ψ изменена по сравнению с канонической. Точно так же, как и в случае бозона, этот лагранжиан может быть использован для частиц с бесконечным спином, если положить $s = +\infty$ [16, 12]. Калибровочные преобразования, оставляющие лагранжиан инвариантным, также требуют введения перекрестных слагаемых:

$$\begin{aligned}
\delta \Psi^{\alpha(k+1)\dot{\alpha}(k)} =& D\eta^{\alpha(k+1)\dot{\alpha}(k)} + \alpha_{k+1} e_{\alpha\dot{\alpha}} \eta^{\alpha(k+2)\dot{\alpha}(k+1)} + \beta_{k+1}(k+1) e^{\alpha}{}_{\dot{\alpha}} \eta^{\alpha(k)\dot{\alpha}(k+1)} \\
& + \frac{(k+1)\alpha_k}{(k+2)} e^{\alpha\dot{\alpha}} \eta^{\alpha(k)\dot{\alpha}(k-1)} + k e_{\alpha}{}^{\dot{\alpha}} \eta^{\alpha(k+2)\dot{\alpha}(k-1)} \\
\delta \psi^\alpha =& \eta^\alpha
\end{aligned} \tag{71}$$

Требование инвариантности лагранжиана (70) относительно данных преобразований дает следующие соотношения для коэффициентов α_k, β_k:

$$\begin{aligned}
k\beta_k &= \beta_{k+1}(k+2) \\
\alpha_{k+1}^2 &= \alpha_k^2 + \lambda^2(2k+3) - \beta_{k+1}^2(2k+3)
\end{aligned} \tag{72}$$

Эти соотношения определяют α_k, β_k с точностью до двух параметров. В случае конечного спина $s+\frac{1}{2}$ имеется дополнительное условие $\alpha_s = 0$, и остается один свободный параметр. В качестве него выберем параметр "массы" $M^2 = \dfrac{s^2\alpha_{s-1}^2}{(2s-1)}$ (см. приложение об определении массы в пространстве постоянной кривизны):

$$\begin{aligned}
\beta_k^2 &= \frac{(s+1)^2}{k^2(k+1)^2}\Big[M^2 + s^2\lambda^2\Big] \\
\alpha_k^2 &= \frac{(s-k)(s+k+2)}{(k+1)^2}\Big[M^2 + (s+k+1)(s-k-1)\lambda^2\Big]
\end{aligned} \tag{73}$$

В случае бесконечного спина решение удобно параметризовать через младшие коэффициенты - β_1 и α_0:

$$\begin{aligned}
\beta_k^2 &= \frac{4\beta_1^2}{k^2(k+1)^2} \\
\alpha_k^2 &= \frac{1}{(k+1)^2}\Big[\alpha_0^2(k+1)^2 - 4\beta_1^2 k(k+2) + k(k+1)^2(k+2)\lambda^2\Big]
\end{aligned} \tag{74}$$

Выясним, при каком условии лагранжиан является эрмитовым. Для случая конечного спина необходимо и достаточно, чтобы все α_k^2 и β_k^2 были неотрицательны. В плоском пространстве и AdS $M^2 \geq 0$. В случае $M^2 = 0$ в AdS отделяется старшее поле, в плоском случае лагранжиан распадается на $s+1$ безмассовое поле. В dS условие эрмитовости имеет вид $M^2 \geq -s^2\lambda^2$. В отличие от случая бозона, частично безмассовые пределы, соответствующие массам $M^2 = -\lambda^2(s+k-1)(s-k+1)$, не являются унитарными. В случае бесконечного спина удобно ввести переменную $y_k = k^2 + 2k$. Тогда

$$\alpha_k{}^2 \propto \alpha_0^2 + (\alpha_0 + \lambda^2 - 4\beta_1^2)y_k + y_k^2\lambda^2 \tag{75}$$

Сразу видно, что в dS случай бесконечного спина невозможен, т.к. все α_k^2, начиная с некоторого k, становятся отрицательными. Условие унитарности в плоском случае:

$$\begin{aligned}
\beta_1^2 &\geq 0 \\
\alpha_0^2 &\geq 4\beta_0^2
\end{aligned} \tag{76}$$

Частично безмассовых пределов в плоском случае нет. В пространстве AdS область унитарности в координатах α_0^2, β_1^2 является неограниченной областью с кусочно-линейной границей:

$$\begin{aligned}
2\beta_1^2 &\in \big[(k-1)k(k+1)(k+2)\lambda^2 k(k+1)(k+2)(k+3)\lambda^2\big], k \in \mathbb{N} \\
\alpha_0^2 &> k(k+2)\left[\frac{4\beta_1^2}{(k+1)^2} - \lambda^2\right]
\end{aligned} \tag{77}$$

Частично безмассовый предел с полями $\overline{k,+\infty}$ получается при:

$$\begin{aligned} & 0 \le \beta_1^2 < (k+1)^2(k+2)^2\lambda^2 \\ & \alpha_0^2 = \frac{k(k+2)\left[4\beta_1^2 - (k+1)^2\lambda^2\right]}{(k+1)^2} \end{aligned} \tag{78}$$

5.2 Кривизны

Как и в бозонном случае, для того, чтобы построить полный набор калибровочно-инвариантных объектов, потребуется полный набор 1-форм $\Omega^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)}$,$k \le s-1, m \ge 0$ и 0-форм $W^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)}$,$k \le s-1, m \ge 0$ (и комплексно сопряженных им). Здесь обозначения унифицированы: $\Phi^{\alpha(k+1)\dot\alpha(k)} \equiv \Omega^{\alpha(k+1)\dot\alpha(k)}$,$\phi^\alpha \equiv W^\alpha$. Благодаря мультиспинорному формализму анзатц калибровочных преобразований и кривизн имеет такой же вид, как и в бозонном случае, с тем отличием, что теперь у полей нечетное количество индексов. А именно, наиболее общие калибровочные преобразования для полей ($m \ge 0$) при фиксированной нормировке этих полей имеют вид:

$$\begin{aligned} \delta\Omega^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)} &= D\eta^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)} + (k+m+1)\alpha_{k,m}^{-+}e^\alpha{}_{\dot\alpha}\eta^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m+1)} \\ &+ (k-m)e_\alpha{}^{\dot\alpha}\eta^{\alpha(k+m+2)\dot\alpha(k-m-1)} + \alpha_{k,m}^{++}e_{\alpha\dot\alpha}\eta^{\alpha(k+m+2)\dot\alpha(k-m+1)} \\ &+ (k+m+1)(k-m)\alpha_{k,m}^{--}e^{\alpha\dot\alpha}\eta^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m-1)} \\ \delta W^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)} &= \eta^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)} \end{aligned} \tag{79}$$

Отсюда получаются следующие выражения для кривизн:

$$\begin{aligned}
R^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)} &= D\Omega^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} \\
&+ (k+m+1)(k-m)\alpha^{--}_{k,m}e^{\alpha\dot\alpha}\Omega^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m-1)} \\
&+ \alpha^{++}_{k,m}e_{\alpha\dot\alpha}\Omega^{\alpha(k+m+2)\dot\alpha(k-m+1)} \\
&+ (k+m+1)\alpha^{-+}_{k,m}e^{\alpha}{}_{\dot\alpha}\Omega^{\alpha(k+m-2)\dot\alpha(k-m+1)} \\
&+ (k-m)e_{\alpha}{}^{\dot\alpha}\Omega^{\alpha(k+m+2)\dot\alpha(k-m-1)} \\
R^{\alpha(2k+1)} &= D\Omega^{\alpha(2k+1)} + \alpha^{++}_{k,k}e_{\alpha\dot\alpha}\Omega^{\alpha(2k+2)\dot\alpha} \\
&+ (2k+1)\alpha^{-+}_{k,k}e^{\alpha}{}_{\dot\alpha}\Omega^{\alpha(2k)\dot\alpha} \\
&- 4k(2k+1)\alpha^{-+}_{k,k}\alpha^{--}_{k,k-1}E^{\alpha(2)}W^{\alpha(2k-1)} - 2\alpha^{++}_{k,k}E_{\alpha(2)}W^{\alpha(2k+3)} \\
&- \frac{2\alpha^{-+}_{k+1}}{(2k+3)}E^{\alpha}{}_{\beta}W^{\alpha(2k)\beta} \\
C^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)} &= DW^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)} - \Omega^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)} \\
&+ (k+m+1)(k-m)\alpha^{--}_{k,m}e^{\alpha\dot\alpha}W^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m-1)} \\
&+ \alpha^{++}_{k,m}e_{\alpha\dot\alpha}W^{\alpha(k+m+2)\dot\alpha(k-m+1)} \\
&+ (k-m)e_{\alpha}{}^{\dot\alpha}W^{\alpha(k+m+2)\dot\alpha(k-m-1)} \\
&+ (k+m+1)\alpha^{-+}_{k,m}e^{\alpha}{}_{\dot\alpha}W^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m+1)}
\end{aligned} \tag{80}$$

Коэффициенты $\alpha^{ij}_{k,m}$ удобно выразить через $\alpha^{++}_k, \alpha^{--}_k, \alpha^{-+}_m$:

$$\begin{aligned}
\alpha^{++}_{k,m} &= \frac{\alpha^{++}_k}{(k-m+1)(k-m+2)} \\
\alpha^{--}_{k,m} &= \frac{\alpha^{--}_k}{(k+m+1)(k+m+2)} \\
\alpha^{-+}_{k,m} &= \frac{\alpha^{-+}_m}{(k-m+1)(k-m+2)(k+m+1)(k+m+2)} \\
\alpha^{-+}_{k,m} &= \frac{\alpha^{-+}_0}{(k+1)(k+2)}
\end{aligned} \tag{81}$$

Значения $\alpha_k^{++}, \alpha_k^{--}, \alpha_m^{-+}$ в случае конечного спина (см. приложение о коэффициентах):

$$
\begin{aligned}
\alpha_{k-1}^{++\,2} &= k^2(s-k)(s+k+2)\Big[(s+k+1)(s-k-1)\lambda^2+M^2\Big] \\
\alpha_k^{--\,2} &= \frac{1}{k^2}(s-k)(s+k+2)\Big[(s+k+1)(s-k-1)\lambda^2+M^2\Big] \\
\alpha_m^{-+} &= (s-m+1)(s+m+1)\Big[(s-m)(s+m)\lambda^2+M^2\Big] \\
\alpha_0^{-+\,2} &= (s+1)^2\Big[s^2\lambda^2+M^2\Big]
\end{aligned}
\qquad (82)
$$

и в случае бесконечного спина:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{k-1}^{++\,2} &= k^2\Big[\alpha_0^2(k+1)^2-4\beta_1^2k(k+2)+k(k+1)^2(k+2)\lambda^2\Big] \\
\alpha_k^{--\,2} &= \frac{1}{k^2}\Big[\alpha_0^2(k+1)^2-4\beta_1^2k(k+2)+k(k+1)^2(k+2)\lambda^2\Big] \\
\alpha_{k+1}^{-+} &= \Big[\alpha_0^2(k+1)^2-4\beta_1^2k(k+2)+k(k+1)^2(k+2)\lambda^2\Big] \\
\alpha_0^{-+\,2} &= 4\beta_1^2
\end{aligned}
\qquad (83)
$$

Условия эрмитовости кривизн, как и в случае бозона, описываются теми же выражениями, что и условия эрмитовости лагранжиана. При этом коэффиценты $\alpha_{k,0}^{-+}$ также могут быть мнимые, что накладывает дополнительные ограничения в условии эрмитовости, в частности, в случае фермионов нет эрмитовых частично безмассовых пределов при конечном спине. При этом появляется особый случай $M^2 = -s^2\lambda^2$ ($\beta_1^2 = 0$), соответствующий $\alpha_{k,0}^{-+} = 0$, в результате чего в каждую кривизну входят поля $\Omega^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)}, W^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)}$ или только с $m \geq 0$, или только с $m < 0$. В случае частично безмассового предела, соответствующего полям $k+\frac{1}{2}, +\infty$, остаются все поля $\Omega^{\alpha(l+m)\dot\alpha(l-m)}$ при $l \geq k-1$ и $W^{\alpha(l+m)\dot\alpha(l-m)}$ при $l \geq k-1$, $m \leq k$, т.е. поля, возникающие при описании безмассовых частиц со спином от $k+\frac{1}{2}$ до $+\infty$, как и в случае бозона (см. рис. 3).

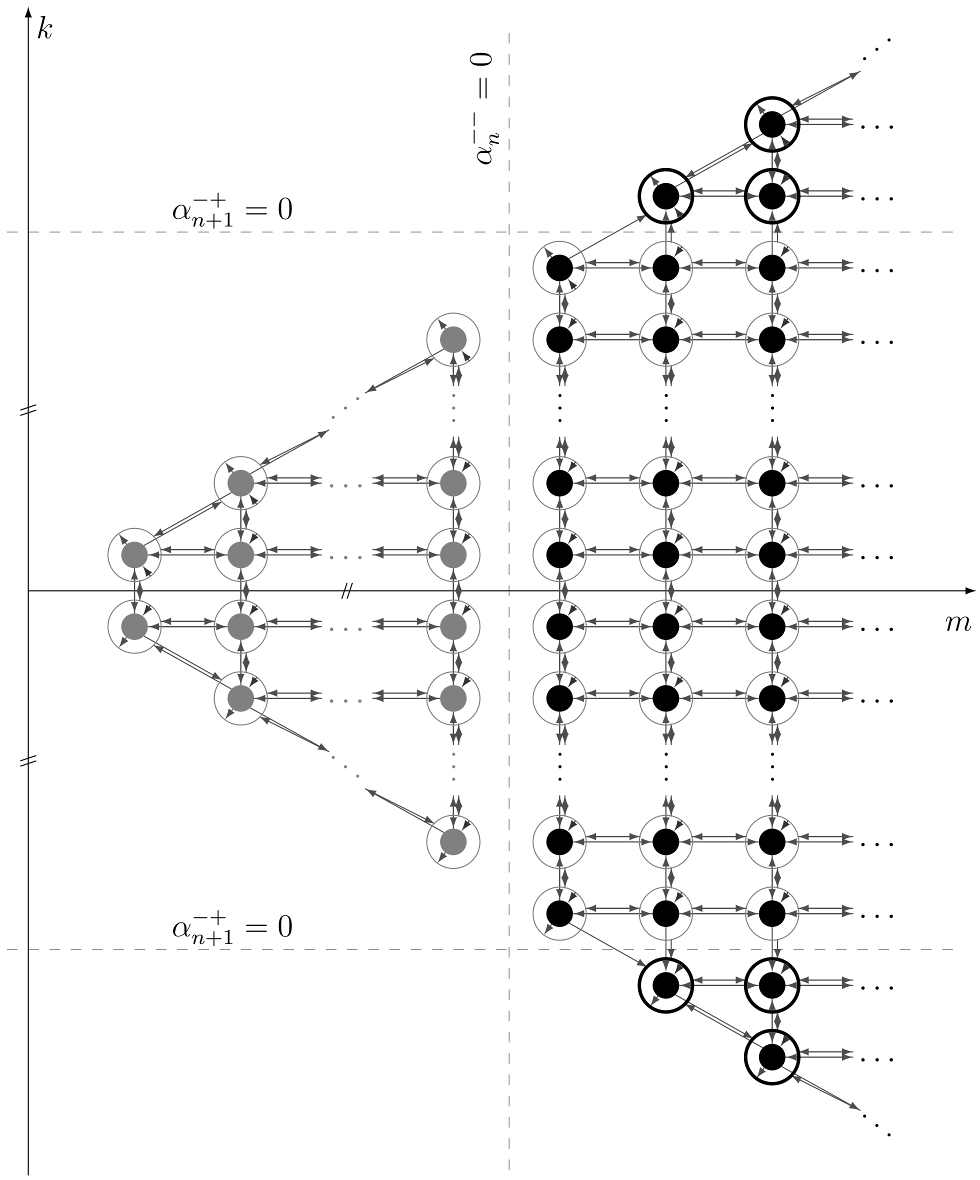

Рис. 3: Отцепление полей при частично безмассовом пределе вида $n + \frac{1}{2}, s + \frac{1}{2}$. Здесь 1-формы обозначены жирными точками, а 0-формы - кругами. Стрелка от объекта A к объекту B означает, что слагаемое с B входит в уравнение вида $DA + \ldots = 0$. Отцепляющиеся поля нарисованы серым цветом.

5.3 Выражение лагранжиана через кривизны

Анзатц для лагранжиана, выраженного через кривизны, такой же, как и для бозона:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = &\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{m=-k-1}^{k}(-1)^{k+1}a_{k,m}R^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)}R_{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)}\\
&+\sum_{k=0}^{s-2}\sum_{m=-k-1}^{k}(-1)^{k+1}b_{k,m}R^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)}e^{\alpha\dot\alpha}C_{\alpha(k+m+2)\dot\alpha(k-m+1)}\\
&+\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{m=-k}^{k-1}(-1)^{k+1}c_{k,m}R^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)}e_{\alpha\dot\alpha}C_{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m-1)}\\
&+\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{m=-k-1}^{k}(-1)^{k+1}d_{k,m}R^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)}e^{\beta}{}_{\dot\alpha}C_{\alpha(k+m+1)\beta\dot\alpha(k-m)}\\
&+\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{m=-k}^{k+1}(-1)^{k+1}d_{k,-m}R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m+1)}e_{\alpha}{}^{\dot\beta}C_{\alpha(k+m)\dot\beta\dot\alpha(k-m+1)}\\
&+\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{m=-k}^{k}(-1)^{k+1}e_{k,m}C^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)}E^{\beta}{}_{\alpha}C_{\alpha(k+m)\beta\dot\alpha(k-m)}\\
&+\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{m=-k}^{k}(-1)^{k+1}e_{k,-m}C^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m+1)}E^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha}C_{\alpha(k+m)\dot\beta\dot\alpha(k-m)}\\
&+\sum_{k=0}^{s-2}\sum_{m=-k-1}^{k}(-1)^{k+1}f_{k,m}C^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)}E^{\alpha(2)}C_{\alpha(k+m+3)\dot\alpha(k-m)}\\
&+\sum_{k=0}^{s-2}\sum_{m=-k-1}^{k}(-1)^{k+1}f_{k,-m}C^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m+1)}E^{\dot\alpha(2)}C_{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m+3)}
\end{aligned}
\tag{84}
$$

Из эрмитовости лагранжиана следует $a_{k,m} = a_{k,-m-1}$, $b_{k,m} = b_{k,-m-1}$, $c_{k,m} = c_{k,-m-1}$. Уравнения движения, определяемые лагранжианом (70) выражаются через кривизны следующим образом:

$$
\begin{aligned}
(-1)^{k+1}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi^{\alpha(k+1)\alpha(k)}} &= e_{\alpha}{}^{\dot\alpha}\Omega_{\alpha(k)\dot\alpha(k+1)}\\
\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi^{\alpha}} &= e_{\alpha}{}^{\dot\alpha}\Omega_{\dot\alpha}\\
\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi^{\alpha}} &= -\alpha_0^2E_{\alpha}{}^{\dot\alpha}C_{\dot\alpha}
\end{aligned}
\tag{85}
$$

Как и в случае бозона, мы найдем $a_{k,m} - f_{k,m}$ из условия отделения экстраполей и вспомогательных полей и совпадения уравнений движения, получаемых из (84) и (70). Эти условия дадут систему линейных уравнений. Лагранжиан определен с точностью до полных производных:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}-\mathcal{L}_0) &= \sum_{k=0}^{s-1}\sum_{m=0}^{k}(-1)^{k+1}p_{k,m}D(R^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)}C_{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)}+h.c.)\\ &+\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{m=0}^{k}(-1)^{k+1}q_{k,m}D(C^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)}e^{\alpha}{}_{\dot\alpha}C_{\alpha(k+m+2)\dot\alpha(k-m)}+h.c.)\\ &+\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{m=0}^{k}(-1)^{k+1}r_{k,m}D(C^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)}e^{\alpha\dot\alpha}C_{\alpha(k+m+2)\dot\alpha(k-m+1)}+h.c.)\end{aligned} \tag{86}$$

Поэтому в силу квадратичных по кривизнам соотношений (см. приложение) возможен следующий произвол в выборе коэффициентов:

$$\begin{aligned}
a_{k,\pm m} &= a_{k,m}^{(0)} + p_{k,m}\\
b_{k,\pm m} &= b_{k,m}^{(0)} + p_{k,m}\alpha_{k,m}^{++} - p_{k+1,m}(k+m+2)(k-m+1)\alpha_{k+1,m}^{--} + r_{k,m}\\
c_{k+1,\pm m} &= c_{k,m}^{(0)} - p_{k,m}\alpha_{k,m}^{++} + p_{k+1,m}(k+m+2)(k-m+1)\alpha_{k+1,m}^{--} - r_{k,m}\\
d_{k,m} &= d_{k,m}^{(0)} - (k-m)p_{k,m} + (k+m+2)\alpha_{k,m+1}^{-+}p_{k,m+1} + q_{k,m}\\
d_{k,-1} &= d_{k,-1}^{(0)} + 2q_{k,-1}\\
d_{k,-m} &= d_{k,-m}^{(0)} + (k-m+2)p_{k,m-2} - (k+m)\alpha_{k,m-1}^{-+}p_{k,m-1} + q_{k,m-2}\\
e_{k,m} &= e_{k,m}^{(0)} + (k+m+1)\alpha_{k,m+1}^{-+}q_{k,m} + (k-m+2)q_{k,m-1}\\
&- (k-m+2)(k+m+1)\alpha_{k+1,m}^{--}r_{k,m} + \alpha_{k-1,m}^{++}r_{k-1,m}\\
e_{k,-m} &= e_{k,-m}^{(0)} - (k+m+2)\alpha_{k,m}^{-+}q_{k,m-1} - (k-m+1)q_{k,m-2}\\
&+ (k-m+3)(k+m)\alpha_{k+1,m-1}^{--}r_{k,m-1} - \alpha_{k-1,m-1}^{++}r_{k-1,m-1}\\
e_{k,k} &= e_{k,k}^{(0)} + \frac{2\alpha_{k-1}^{++}\alpha_{k}^{--}}{2k+3}p_{k,k} + 2q_{k,k-1} - 2(2k+1)\alpha_{k+1,k}^{--}r_{k,k}\\
f_{k,m} &= f_{k,m}^{(0)} - (k+m+2)(k-m+2)\alpha_{k+1,m}^{--}q_{k+1,m} + \alpha_{k,m+1}^{++}q_{k,m}\\
&- (k+m+1)\alpha_{k,m+1}^{-+}r_{k,m+1} + (k-m+2)r_{k,m}\\
f_{k,-m} &= f_{k,-m}^{(0)} + (k+m+1)(k-m+3)\alpha_{k+1,m-1}^{--}q_{k+1,m-1} - \alpha_{k,m}^{++}q_{k,m-1}\\
&+ (k+m)\alpha_{k,m}^{-+}r_{k,m} - (k-m+1)r_{k,m-1}\\
f_{k,k} &= f_{k,k}^{(0)} - 2\alpha_{k,k}^{++}p_{k,k} - 4(k+1)(2k+3)\alpha_{k+1,k+1}^{-+}\alpha_{k+1,k}^{--}p_{k+1,k+1}\\
&- 4(k+1)\alpha_{k+1,k}^{--}q_{k+1,k} + 2r_{k,k}
\end{aligned} \tag{87}$$

Воспользовавшись этим произволом, обнулим $b_{k,m}, c_{k,m}, d_{k,m}$ и $e_{k,m}, f_{k,m}$, $k \neq m$. Это даст следующие выражения для коэффициентов:

$$\begin{aligned} a^{(0)}_{k,m} =& \frac{(k+m+2)!k!^2}{4(k-m)!^2(k-m+1)!\prod_{i=0}^m \alpha_i^{-+}} \\ e^{(0)}_{k,k} =& \frac{(2k+2)!k!^2\alpha_{k+1}^{-+}}{2(2k+3)\prod_{i=0}^m \alpha_i^{-+}} \\ f^{(0)}_{k,k} =& -\frac{\alpha_k^{++}(2k)!k!^2}{\prod_{i=0}^m \alpha_i^{-+}} \end{aligned} \qquad (88)$$

Из частного решения $a^{(0)}_{k,m} - f^{(0)}_{k,m}$ можно получить общее, подставляя произвольные $p_{k,m}, q_{k,m}, r_{k,m}$ в (87). В случае частично безмассового предела часть $a^{(0)}_{k,m} - f^{(0)}_{k,m}$ обращается в бесконечность. Процедура устранения сингулярностей та же, что и в случае бозона - мы выписываем общее решение (87), после чего подбираем $p_{k,m}, q_{k,m}, r_{k,m}$ так, чтобы выражение допускало предельный переход $\alpha_n^{-+} = \alpha_{n-1}^{--} = \alpha_{n-2}^{++} = 0$. Мы получим следующие выражения для коэффициентов при $k \geq n$:

$$\begin{aligned} a_{k,\pm m} =& \frac{(k+m+2)!k!^2}{4(k-m)!^2(k-m+1)!\prod_{i=0}^m \alpha_i^{-+}}, m < n \\ d_{k,n-1} =& -\frac{(k+n+1)!k!^2}{2(k-n)!(k-n+1)!(k-n+2)!\prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i^{-+}} \\ e_{k,n} =& -\frac{(k+n+1)!k!^2}{4(k-n)!(k-n+1)!^2\prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i^{-+}} \\ e_{k,-n-1} =& \frac{(k+n+1)!k!^2}{4(k-n-1)!(k-n+1)!(k-n+2)!\prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i^{-+}} \end{aligned} \qquad (89)$$

Помимо этого, обнуляются $e_{n-1,n-1}, f_{n-2,n-2}, f_{n-1,n-1}$. Эти выражения получаются из (87) при следующих ненулевых $p_{k,m}, q_{k,m}, r_{k,m}$:

$$\begin{aligned} p_{k,m} =& -\frac{(k+m+2)!k!^2}{4(k-m)!^2(k-m+1)!\prod_{i=0}^m \alpha_i^{-+}}, m \geq n \\ q_{k,n-1} =& -\frac{(k+n+1)!k!^2}{4(k-n)!(k-n+1)!(k-n+2)!\prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i^{-+}} \end{aligned} \qquad (90)$$

Данные выражения применимы и при $n = 0$, если положить $\prod_{i=0}^{-1} \alpha_i^{-+} \equiv 1$.

Лагранжиан распался на две независимых части, каждая из которых содержит только кривизны с $k \geq n-1$ и $k < n-1$:

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{L} = -i\mathcal{L}^{(0,n-2)} &+ \sum_{k=n-1}^{s-1} \sum_{m=-n}^{n-1} (-1)^{k+1} a_{k,m} R^{\alpha(k+m+1)\dot{\alpha}(k-m)} R_{\alpha(k+m+1)\dot{\alpha}(k-m)} \\
&+ \sum_{k=n}^{s-1} (-1)^{k+1} d_{k,n-1} \left[R^{\alpha(k+n)\dot{\alpha}(k-n+1)} e^{\beta}{}_{\dot{\alpha}} C_{\alpha(k+n)\beta\dot{\alpha}(k-n)} - h.c. \right] \\
&+ \sum_{k=n}^{s-1} (-1)^{k+1} e_{k,n} \left[C^{\alpha(k+n+1)\dot{\alpha}(k-n)} E^{\beta}{}_{\alpha} C_{\alpha(k+n)\beta\dot{\alpha}(k-n)} - h.c. \right] \\
&+ \sum_{k=n}^{s-1} (-1)^{k+1} e_{k,-n-1} \left[C^{\alpha(k+n+1)\dot{\alpha}(k-n)} E^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} C_{\alpha(k+n+1)\dot{\beta}\dot{\alpha}(k-n-1)} \right. \\
&\left. - h.c. \right]
\end{aligned} \tag{91}
$$

При этом в лагранжиан, соответствующий полям с $\overline{n+\frac{1}{2}, s+\frac{1}{2}}$, не входят кривизны, содержащие поля $W^{\alpha(k+m+1)\dot{\alpha}(k-m)}$, $m \leq n-1$. В случае $n = 0$ выражение выглядит следующим образом:

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{L} = &\sum_{k=0}^{s-1} (-1)^{k+1} d_{k,-1} \left[R^{\alpha(k)\dot{\alpha}(k+1)} e^{\beta}{}_{\dot{\alpha}} C_{\alpha(k)\beta\dot{\alpha}(k)} - h.c. \right] \\
&+ \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^{k+1} e_{k,n} \left[C^{\alpha(k+n+1)\dot{\alpha}(k-n)} E^{\beta}{}_{\alpha} C_{\alpha(k)\beta\dot{\alpha}(k)} - h.c. \right] \\
&+ \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^{k+1} e_{k,-n-1} \left[C^{\alpha(k+1)\dot{\alpha}(k)} E^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} C_{\alpha(k+1)\dot{\beta}\dot{\alpha}(k-1)} - h.c. \right]
\end{aligned} \tag{92}
$$

5.4 Развернутые уравнения

Получение системы развернутых уравнений аналогично бозонному случаю. В случае бесконечного спина система уравнений

$$
\begin{aligned}
R^{\alpha(k+m+1)\dot{\alpha}(k-m)} &= 0 \\
C^{\alpha(k+m+1)\dot{\alpha}(k-m)} &= 0
\end{aligned} \tag{93}
$$

формально уже является завершенной системой развернутых уравнений, поэтому далее мы рассматриваем случай конечного спина. В этом случае уравнения (93) требуют модификации для старших кривизн. А именно, уравнения для кривизн $R^{\alpha(2s-1)}$,$C^{\alpha(s+m)\dot{\alpha}(s-m-1)}$ прибретают следующий вид:

$$
\begin{aligned}
0 &= R^{\alpha(2s-1)} - 2E_{\alpha(2)} W^{\alpha(2s+1)} \\
0 &= C^{\alpha(s+m)\dot{\alpha}(s-m-1)} + e_{\alpha\dot{\alpha}} W^{\alpha(s+m+1)\dot{\alpha}(s-m)}
\end{aligned} \tag{94}
$$

Общий анзатц для цепочки уравнений, содержащих только 0-формы, следующий:

$$
\begin{aligned}
0 &= DW^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)} + e_{\beta\dot\beta}W^{\alpha(k+m+1)\beta\dot\alpha(k-m)\dot\beta} \\
&+ (k+m+1)(k-m)\beta^{--}_{k,m}e^{\alpha\dot\alpha}W^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m-1)} \\
&+ (k-m)\beta^{+-}_{k,m}e_{\beta}{}^{\dot\alpha}W^{\alpha(k+m+1)\beta\dot\alpha(k-m-1)} \\
&+ (k+m+1)\beta^{-+}_{k,m}e^{\alpha}{}_{\dot\beta}W^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)\dot\beta}
\end{aligned} \tag{95}
$$

где требование эрмитовости дает ограничение $\beta^{-+}_{k,m} = \beta^{+-}_{k,-m-1}$. Из условия согласованности уравнений получаются следующие выражения для коэффициентов:

$$
\begin{aligned}
\beta^{-+}_{k,m} &= \frac{\beta^{-+}_{m}}{(k+m+2)(k+m+1)} \\
\beta^{+-}_{k,m} &= \frac{\beta^{+-}_{m}}{(k-m+1)(k-m)} \\
\beta^{--}_{k,m} &= \frac{\alpha^{-+}_{k+1}}{(k+m+1)(k+m+2)(k-m)(k-m+1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta^{-+}_{m} &= \frac{\alpha^{-+}_{m}}{(s-m)(s-m+1)}, 1 \le m < s \\
\beta^{-+}_{s} &= \frac{\alpha^{-+}_{s}}{2} \\
\beta^{-+}_{0} &= \alpha^{-+}_{0} \\
\beta^{+-}_{m} &= (s-m-1)(s-m), 1 \le m < s-1 \\
\beta^{+-}_{s-1} &= 2
\end{aligned} \tag{96}
$$

Эрмитов частично безмассовый предел возможен только для бесконечного спина. В случае частично безмассового предела $\overline{n+\frac{1}{2},+\infty}$, выпадают все уравнения для отцепляющихся полей $\Omega^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)}$,$k < n$,$W^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)}$,$m < n$.

5.5 Формализм Васильева-Скворцова для фермионов

В случае частично безмассового предела, для фермионов можно построить формализм, аналогичный формализму Васильева-Скворцова для бозонов[21]. Мы рассматриваем частично безмассовые пределы вида $\overline{n,s}$ (напомним, что при конечном s эти пределы неунитарны). Зафиксируем калибровку, обнуляющую все 0-формы $W^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m)}$, $m <$

$n-1$. Как и в бозонном случае, введем кривизну $\bar{R}^{\alpha(k+n-1)\dot{\alpha}(k-n+2)}$:

$$\begin{aligned}\bar{R}^{\alpha(k+n-1)\dot{\alpha}(k-n+2)} &= R^{\alpha(k+n-1)\dot{\alpha}(k-n+2)} + (k-n+2)e_{\alpha}{}^{\dot{\alpha}}C^{\alpha(k+n)\dot{\alpha}(k-n+1)} \\ &= D\Omega^{\alpha(k+n-1)\dot{\alpha}(k-n+2)} \\ &+ (k+n-1)(k-n+2)\alpha^{--}_{k,n-2}e^{\alpha\dot{\alpha}}\Omega^{\alpha(k+n)\dot{\alpha}(k-n+1)} \\ &+ \alpha^{++}_{k,n-2}e_{\alpha\dot{\alpha}}\Omega^{\alpha(k+n)\dot{\alpha}(k-n+3)} \\ &+ (k+n-1)\alpha^{-+}_{k,n-2}e^{\alpha}{}_{\dot{\alpha}}\Omega^{\alpha(k+n-2)\dot{\alpha}(k-n+3)} \end{aligned} \tag{97}$$

Для унификации обозначений положим $\bar{R}^{\alpha(k+m+1)\dot{\alpha}(k-m)} = R^{\alpha(k+m+1)\dot{\alpha}(k-m)}$,$m < n-2$. Тогда все 1-формы $\Omega^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)}$,$|m| \geq n-1$, также отцепляются. $\Omega^{\alpha(k+m+1)\dot{\alpha}(k-m)}$,$m \geq n-1$. Лагранжиан в этом случае удается выразить только через $\bar{R}^{\alpha(k+m+1)\dot{\alpha}(k-m)}$:

$$-i\mathcal{L} = -i\mathcal{L}^{(0,n-2)} + \sum_{k=n-1}^{+\infty}\sum_{m=-n+1}^{n-1}(-1)^{k+1}a_{k,m}\bar{R}^{\alpha(k+m+1)\dot{\alpha}(k-m)}\bar{R}_{\alpha(k+m+1)\dot{\alpha}(k-m)} \tag{98}$$

Систему развернутых уравнений для частично безмассового фермиона, у которого отцепились поля $\overline{n+\frac{1}{2}, s+\frac{1}{2}}$, можно привести к аналогичной [21] форме с помощью частичной фиксации калибровки условиями $W^{\alpha(k+m+1)\dot{\alpha}(k-m)} = 0,\ k < s,\ \geq n-1$. Уравнения при $m < n-2$ и уравнения для калибровочно-инвариантных 0-форм не меняются. Остальные нетривиальные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} 0 &= \Omega^{\alpha(k+m+1)\dot{\alpha}(k-m)}, \qquad\qquad k < s-1,\ m \geq n-1 \\ 0 &= \Omega^{\alpha(s+m)\dot{\alpha}(s-m-1)} - e_{\alpha\dot{\alpha}}W^{\alpha(s+m+1)\dot{\alpha}(s-m)}, \qquad m \geq n-1 \\ 0 &= D\Omega^{\alpha(k+n-1)\dot{\alpha}(k-n+2)} + (k+n-1)(k-n+2)\alpha^{--}_{k,n-2}e^{\alpha\dot{\alpha}}\Omega^{\alpha(k+n-2)\dot{\alpha}(k-n+1)} \\ &+ \alpha^{++}_{k,n-2}e_{\alpha\dot{\alpha}}\Omega^{\alpha(k+n)\dot{\alpha}(k-n+3)} \\ &+ (k+n-1)\alpha^{-+}_{k,n-2}e^{\alpha}{}_{\dot{\alpha}}\Omega^{\alpha(k+n-1)\dot{\alpha}(k-n-3)}, \qquad k < s-1 \\ 0 &= D\Omega^{\alpha(s+n-2)\dot{\alpha}(s-n+1)} + (s+n-2)(s-n+1)\alpha^{--}_{s-1,n-2}e^{\alpha\dot{\alpha}}\Omega^{\alpha(s+n-3)\dot{\alpha}(s-n)} \\ &+ (s+n-2)\alpha^{-+}_{s-1,n-2}e^{\alpha}{}_{\dot{\alpha}}\Omega^{\alpha(s+n-1)\dot{\alpha}(s-n)} \\ &- (s-n+1)E_{\alpha(2)}W^{\alpha(s+n-2)\dot{\alpha}(s-n+2)} \end{aligned} \tag{99}$$

Последнее уравнение содержит единственную связь калибровочного сектора с 0-формами.

6 Заключение

В данной работе было построено калибровочно-инвариантное описание массивных частиц со спином s и частиц с бесконечным спином в 4-мерном пространстве постоянной кривизны в реперном лагранжевом и развернутом формализмах. Были исследованы области параметров, при которых полученные теории унитарны; также были получены безмассовые и частично безмассовые пределы.

Результаты для массивных бозонов совпали с полученными ранее в [18]. Результаты для бозонов с бесконечным спином и фермионов получены впервые. Также впервые были получены выражения лагранжианов через кривизны в случае частично безмассового предела. Ранее сходный результат был получен в работе [21]; в ней с помощью частичной фиксации калибровки все кривизны, являющиеся 1-формами, были положены равными нулю. Полученные в данной работе результаты уже были частично использованы в работе [13].

Список литературы

[1] *Bekaert Xavier, Boulanger Nicolas.* The unitary representations of the Poincare group in any spacetime dimension [электронный ресурс]. — 2006. — Режим доступа: http://arxiv.org/hep-th/0611263.pdf, дата доступа: 05.06.2019.

[2] *Bekaert X., Boulanger N., Sundell P.* How higher-spin gravity surpasses the spin two barrier, no-go theorems versus yes-go examples // *Rev. Mod. Phys.* — 2012. — Vol. 84. — Pp. 987–1009.

[3] *Berends F. A., Bugrers G. J. H., van Dam H.* On the theoretical problems in constructing interactions involving higher-spin massless particles // *Nucl. Phys.* — 1985. — Vol. B260. — P. 295.

[4] *Berends F. A., Burgers G. J. H., van Dam H.* Explicit construction of conserved currents for massless fields of arbitrary spin // *Nucl. Phys.* — 1986. — Vol. B271. — P. 429.

[5] *Dirac P. A. M.* Relativistic Wave Equations // *Proc. R. Soc. Lond.* — 1936. — Vol. A155. — P. 447.

[6] *Fang J., Fronsdal C.* Massless fields with half integral spin // *Phys. Rev.* — 1978. — Vol. D18. — P. 3630.

[7] *Fang J., Fronsdal C.* Massless half integer spin fields in de sitter space // *Phys. Rev.* — 1980. — Vol. D22. — P. 1361.

[8] *Fradkin E. S., Vasiliev M. A.* Cubic interaction in extended theories of massless higher-spin fields // *Nucl. Phys.* — 1987. — Vol. B291. — P. 141.

[9] *Fradkin E. S., Vasiliev M. A.* On the gravitational interaction of massless higher-spin fields // *Phys. Lett.* — 1987. — Vol. B189. — P. 89.

[10] *Fronsdal C.* Massless fields with integer spin // *Phys. Rev.* — 1978. — Vol. D18. — P. 3624.

[11] *Fronsdal C.* Singletons and massless, integral spin fields on de sitter space // *Phys. Rev.* — 1979. — Vol. D20. — P. 848.

[12] *Khabarov M. V., Zinoviev Yu. M.* Infinite (continuous) spin fields in the frame-like formalism // *Nucl. Phys.* — 2018. — Vol. B928. — P. 182.

[13] Lagrangian formulation of the massive higher spin $N = 1$ supermultiplets in AdS_4 space / I. L. Buchbinder, M.V. Khabarov, T. V. Snegirev, Yu. M. Zinoviev // *Nucl. Phys.* — 2019. — Vol. B942. — P. 1.

[14] *Lopatin V. E., Vasiliev M. A.* Free massless bosonic fields of arbitrary spin in d-dimensional de sitter space // *Mod. Phys. Lett.* — 1988. — Vol. A3. — P. 257.

[15] *Metsaev R.R.* Continuous spin gauge field in (A)dS space // *Phys. Lett.* — 2017. — Vol. B767. — P. 458.

[16] *Metsaev R.R.* Fermionic continuous spin gauge field in (A)dS space // *Phys. Lett.* — 2017. — Vol. B773. — P. 135.

[17] *Metsaev R. R.* Gauge invariant formulation of massive totally symmetric fermionic fields in (A)dS space // *Phys. Lett.* — 2006. — Vol. B643. — Pp. 205–212.

[18] *Ponomarev D. S., Vasiliev M. A.* Frame-Like Action and Unfolded Formulation for Massive Higher-Spin Fields // *Nucl. Phys.* — 2010. — Vol. B839. — P. 466.

[19] *Singh L. P. S., Hagen C. R.* Lagrangian formulation for arbitrary spin. 1. The boson case. // *Phys. Rev.* — 1974. — Vol. D9. — P. 898.

[20] *Singh L. P. S., Hagen C. R.* Lagrangian formulation for arbitrary spin. 2. The fermion case. // *Phys. Rev.* — 1974. — Vol. D9. — P. 910.

[21] *Skvortsov E. D., Vasiliev M. A.* Geometric Formulation for Partially Massless Fields // *Nucl. Phys.* — 2006. — Vol. B756. — P. 117.

[22] *V.E.Didenko, E.D.Skvortsov.* Elements of Vasiliev theory [электронный ресурс]. — Режим доступа: http://arxiv.org/abs/1401.2975, дата доступа: 05.06.2019.

[23] *Vasiliev M. A.* 'Gauge' form of description of massless fields with arbitrary spin // *Sov. J. Nucl. Phys.* — 1980. — Vol. 32. — P. 439.

[24] *Vasiliev M. A.* Free massless fermionic fields of arbitrary spin in d-dimensional de sitter space // *Nucl. Phys.* — 1988. — Vol. B301. — P. 26.

[25] *Zinoviev Yu. M.* On Massive High Spin Particles in (A)dS [электронный ресурс]. — Режим доступа: http://arXiv.org/abs/hep-th/0108192, дата доступа: 05.06.2019.

[26] *Zinoviev Yu. M.* Frame-like gauge invariant formulation for massive high spin particles // *Nucl. Phys.* — 2009. — Vol. B808. — P. 185.

A Соотношения для калибровочно-инвариантных кривизн

Сначала рассмотрим задачу следующего вида. Даны объекты вида

$$\begin{aligned} B^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} &= DA^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} + \alpha^{--}_{k,m} e_{\alpha\dot\alpha} A^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m+1)} \\ &+ (k+m)(k-m)\alpha^{++}_{k,m} e^{\alpha\dot\alpha} A^{\alpha(k+m-1)\dot\alpha(k-m-1)} \\ &+ (k+m)\alpha^{-+}_{k,m} e^{\alpha}{}_{\dot\alpha} A^{\alpha(k+m-1)\dot\alpha(k-m+1)} \\ &+ (k-m)\alpha^{+-}_{k,m} e_{\alpha}{}^{\dot\alpha} A^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m-1)} \end{aligned} \tag{100}$$

для которых выполняются соотношения

$$\begin{aligned} 0 &= DB^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} + (k+m)(k-m)\beta^{++}_{k,m} e^{\alpha\dot\alpha} B^{\alpha(k+m-1)\dot\alpha(k-m-1)} \\ &+ \beta^{--}_{k,m} e_{\alpha\dot\alpha} B^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m+1)} + (k+m)\beta^{-+}_{k,m} e^{\alpha}{}_{\dot\alpha} B^{\alpha(k+m-1)\dot\alpha(k-m+1)} \\ &+ (k-m)\beta^{+-}_{k,m} e_{\alpha}{}^{\dot\alpha} B^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m-1)} \end{aligned} \tag{101}$$

Требуется получить выражения для $\alpha^{ij}_{k,m}$, $\beta^{ij}_{k,m}$. Такая задача (с дополнительными ограничениями) возникает при выводе формы калибровочно-инвариантных кривизн, являющихся 2-формами $R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}$, при выводе соотношений для этих кривизн и при получении системы развернутых уравнений, поэтому имеет смысл решить ее один раз в общем случае. Сразу очевидно, что $\alpha^{ij}_{k,m} = \beta^{ij}_{k,m}$. Далее, для $\alpha^{ij}_{k,m}$ получаются следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} (k-m)\Big[\alpha^{--}_{k,m}\alpha^{++}_{k-1,m} + \alpha^{-+}_{k,m+1}\alpha^{+-}_{k,m}\Big] + 2\lambda^2 \\ = (k-m+2)\Big[\alpha^{--}_{k+1,m}\alpha^{++}_{k,m} + \alpha^{+-}_{k,m-1}\alpha^{-+}_{k,m}\Big] \\ (k+m)\Big[\alpha^{--}_{k,m}\alpha^{++}_{k-1,m} + \alpha^{-+}_{k,m}\alpha^{+-}_{k,m-1}\Big] + 2\lambda^2 \\ = (k+m+2)\Big[\alpha^{--}_{k+1,m}\alpha^{++}_{k,m} + \alpha^{-+}_{k,m+1}\alpha^{+-}_{k,m}\Big] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (k+m+2)\alpha^{-+}_{k+1,m}\alpha^{++}_{k,m} &= (k+m)\alpha^{-+}_{k,m}\alpha^{++}_{k,m-1} \\ (k-m+2)\alpha^{+-}_{k+1,m}\alpha^{++}_{k,m} &= (k-m)\alpha^{+-}_{k,m}\alpha^{++}_{k,m+1} \\ (k-m)\alpha^{--}_{k,m}\alpha^{-+}_{k-1,m} &= (k-m+2)\alpha^{--}_{k,m-1}\alpha^{-+}_{k,m} \\ (k+m)\alpha^{--}_{k,m}\alpha^{+-}_{k-1,m} &= (k+m+2)\alpha^{--}_{k,m+1}\alpha^{+-}_{k,m} \end{aligned} \tag{102}$$

Из этих уравнений получаются следующие выражения:

$$\alpha^{+-}_{k,m}\alpha^{-+}_{k,m+1} = \frac{A_m}{(k-m)(k-m+1)(k+m+1)(k+m+2)}$$
$$\alpha^{--}_{k+1,m}\alpha^{++}_{k,m} = \frac{A_{k+1}}{(k-m+1)(k-m+2)(k+m+1)(k+m+2)}$$
$$A_m = C_1 + C_2(m+1)m + (m+1)^2m^2\lambda^2 \tag{103}$$

Следует подчеркнуть, что в основном тексте для фермионов коэффициенты $\alpha^{ij}_{k,m}$ для упрощения переопределены как $\alpha^{ij}_{k-1/2,m-1/2}$. Произвол в нормировке коэффициентов устраняется дополнительными требованиями, зависящими от конкретной задачи. Отметим также, что полученные выражения не применимы при $m = \pm k$. Поэтому, в частности, выражения для $R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}$ и $R^{\alpha(2k)}$ существенно отличаются.

Теперь обсудим соотношения для кривизн. В случае свободной частицы кривизны линейны по полям, и каждая кривизна имеет вид:

$$R^A = DW^A + F^A(W^B)$$
$$F^A(W^B) = \sum_{B\in B(A)} f^A_B W^B \tag{104}$$

Внешняя производная кривизны R^A, таким образом, выражается через кривизны от полей $W^B, B\in B(A)$, входящие в это кривизну:

$$DR^A = \sum_{B\in B(A)} (-1)^{\deg f^A_B} f^A_B R(B) + G^A(W^B) \tag{105}$$

где $G^A(W^B)$ не содержит производных по полям. Множитель $(-1)^{\deg f^A_B}$ возникает из-за антикоммутативности внешнего произведения и внешнего дифференциала. Требование калибровочной инвариантности приводит к тому, что $G^A(W^B) \equiv 0$, в результате чего производная кривизны выражается через другие кривизны. И действительно, прямым вычислением проверяется, что:

$$\begin{aligned}
0 &= DR^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} + (k+m)(k-m)\alpha^{++}_{k,m}e^{\alpha\dot\alpha}R^{\alpha(k+m-1)\dot\alpha(k-m-1)} \\
&\quad + \alpha^{--}_{k,m}e_{\alpha\dot\alpha}R^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m+1)} + (k+m)\alpha^{-+}_{k,m}e^{\alpha}{}_{\dot\alpha}R^{\alpha(k+m-1)\dot\alpha(k-m+1)} \\
&\quad + (k-m)\alpha^{+-}_{k,m}e_{\alpha}{}^{\dot\alpha}R^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m-1)} \\
0 &= DR^{\alpha(2k)} + e_{\alpha\dot\alpha}R^{\alpha(2k+1)\dot\alpha} + 2k\alpha^{-+}_{k,k}e^{\alpha}{}_{\dot\alpha}R^{\alpha(2k-1)\dot\alpha} \\
&\quad + 4k(2k-1)\alpha^{-+}_{k,k}\alpha^{--}_{k,k-1}E^{\alpha(2)}C^{\alpha(2k-2)} + \alpha^{+-}_{k+1,k}E_{\alpha(2)}C^{\alpha(2k+2)} \\
0 &= DC^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} + R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} \\
&\quad + (k+m)(k-m)\alpha^{--}_{k,m}e^{\alpha\dot\alpha}C^{\alpha(k+m-1)\dot\alpha(k-m-1)} + \alpha^{++}_{k,m}e_{\alpha\dot\alpha}C^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m+1)} \\
&\quad + (k+m)e^{\alpha}{}_{\dot\alpha}C^{\alpha(k+m-1)\dot\alpha(k-m+1)} + (k-m)\alpha^{-+}_{k,m}e_{\alpha}{}^{\dot\alpha}C^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m-1)}
\end{aligned} \tag{106}$$

Здесь в последнем равенстве при $m = \pm k$ следует опустить слагаемые, содержащие множитель $(k \mp m)$ соответственно. Для младших бозонных кривизн выражения модифицируются:

$$
\begin{aligned}
0 &= DR^{\alpha(2)} + 2\beta_2 e^{\alpha}{}_{\dot\alpha} R^{\alpha\dot\alpha} + 3\mu_2 e_{\alpha\dot\alpha} R^{\alpha(3)\dot\alpha} + \mu_1^2 E^{\alpha}{}_{\beta} C^{\alpha\beta} + 2\beta_2\mu_1 E^{\alpha(2)} C \\
&\quad - 6\mu_2 E_{\alpha(2)} C^{\alpha(4)} \\
0 &= DC^{\alpha\dot\alpha} + R^{\alpha\dot\alpha} + e^{\alpha}{}_{\dot\beta} C^{\dot\alpha\dot\beta} + e_{\beta}{}^{\dot\alpha} C^{\alpha\beta} + \frac{\mu_1}{2} e^{\alpha\dot\alpha} C + \mu_2 e_{\alpha\dot\alpha} C^{\alpha(2)\dot\alpha(2)} \\
0 &= DC^{\alpha(2)} + R^{\alpha(2)} + 2\beta_2 e^{\alpha}{}_{\dot\alpha} C^{\alpha\dot\alpha} + 3\mu_2 e_{\alpha\dot\alpha} C^{\alpha(3)\dot\alpha} \\
0 &= DR + \mu_1 e_{\alpha\dot\alpha} R^{\alpha\dot\alpha} + 2\mu_1 E_{\alpha(2)} C^{\alpha(2)} + 2\mu_1 E_{\dot\alpha(2)} R^{\dot\alpha(2)} \\
0 &= DC + R + \mu_1 e_{\alpha\dot\alpha} C^{\alpha\dot\alpha}
\end{aligned}
\tag{107}
$$

Благодаря этим соотношениям, можно получить следующие отношения для полных производных от свертки двух кривизн:

$$
\begin{aligned}
&- D(R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} C_{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}) = R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} R_{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} \\
&+ (k+m)(k-m)\alpha^{--}_{k,m} [R^{\alpha(k+m-1)\dot\alpha(k-m-1)} e^{\alpha\dot\alpha} C_{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} \\
&+ R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} e_{\alpha\dot\alpha} C_{\alpha(k+m-1)\dot\alpha(k-m+1)}] \\
&+ (k+m)\alpha^{-+}_{k,m} \Big[R^{\alpha(k+m-1)\dot\alpha(k-m+1)} e^{\alpha}{}_{\dot\alpha} C_{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} \\
&- R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} e_{\alpha}{}^{\dot\alpha} C_{\alpha(k+m-1)\dot\alpha(k-m+1)} \Big] \\
&+ (k-m) \Big[R^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m-1)} e_{\alpha}{}^{\dot\alpha} C_{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} \\
&- R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} e^{\alpha}{}_{\dot\alpha} C_{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m-1)} \Big] \\
&+ \alpha^{++}_{k,m} \Big[R^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m+1)} e_{\alpha\dot\alpha} C_{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} \\
&+ R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} e^{\alpha\dot\alpha} C_{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m-1)} \Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- D(R^{\alpha(2k)} C_{\alpha(2k)}) \\
&= \alpha^{++}_{k,k} R^{\alpha(2k+1)\dot\alpha} e_{\alpha\dot\alpha} C_{\alpha(2k)} + 2k\alpha^{-+}_{k,k} R^{\alpha(2k-1)\dot\alpha} e^{\alpha}{}_{\dot\alpha} C_{\alpha(2k)} + 2\alpha^{++}_{k,k} C^{\alpha(2k+2)} E_{\alpha(2)} C_{\alpha(2k)} \\
&+ 4k(2k-1)\alpha^{-+}_{k,k}\alpha^{--}_{k,k-1} C^{\alpha(2k-2)} E^{\alpha(2)} C_{\alpha(2k)} + \frac{\alpha^{++}_{k-1}\alpha^{--}_{k}}{k+1} C^{\alpha(2k-1)\beta} E^{\alpha}{}_{\beta} C_{\alpha(2k)} \\
&+ R^{\alpha(2k)} R_{\alpha(2k)} + \alpha^{++}_{k,k} R^{\alpha(2k)} e^{\alpha\dot\alpha} C_{\alpha(2k+1)\dot\alpha} - 2k\alpha^{-+}_{k,k} R^{\alpha(2k)} e_{\alpha}{}^{\dot\alpha} C_{\alpha(2k-1)\dot\alpha}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- D\big(C^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} e^{\alpha}{}_{\dot\alpha} C_{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m-1)}\big)\\
&= R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} e^{\alpha}{}_{\dot\alpha} C_{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m-1)} + R^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m-1)} e_{\alpha}{}^{\dot\alpha} C_{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}\\
&+ (k+m)(k-m+1)\alpha^{--}_{k,m} C^{\alpha(k+m-1)\dot\alpha(k-m-1)} E^{\alpha(2)} C_{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m-1)}\\
&- (k+m+2)(k-m-1)\alpha^{--}_{k,m+1} C^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} E_{\dot\alpha(2)} C_{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m-2)}\\
&- \alpha^{++}_{k,m} C^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m+1)} E_{\dot\alpha(2)} C_{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m-1)}\\
&+ \alpha^{++}_{k,m+1} C^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} E^{\alpha(2)} C_{\alpha(k+m+2)\dot\alpha(k-m)}\\
&- (k-m-1) C^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m-2)\dot\beta} E_{\dot\beta}{}^{\dot\alpha} C_{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m-1)}\\
&+ (k-m+1) C^{\alpha(k+m)\beta\dot\alpha(k-m-1)} E^{\alpha}{}_{\beta} C_{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m-1)}\\
&- (k+m+2)\alpha^{-+}_{k,m+1} C^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} E_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} C_{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m-1)\dot\beta}\\
&+ (k+m)\alpha^{-+}_{k,m+1} C^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} E^{\beta}{}_{\alpha} C_{\alpha(k+m-1)\beta\dot\alpha(k-m)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- D\big(C^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} e^{\alpha\dot\alpha} C_{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m+1)}\big)\\
&= R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} e^{\alpha\dot\alpha} C_{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m+1)} - R^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m+1)} e_{\alpha\dot\alpha} C_{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)}\\
&- \alpha^{++}_{k,m}\big[C^{\alpha(k+m)\beta\dot\alpha(k-m+1)} E^{\alpha}{}_{\beta} C_{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m+1)}\\
&+ C^{\alpha(k+m+1)\dot\beta\dot\alpha(k-m)} E^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} C_{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m+1)}\big]\\
&- (k+m)\alpha^{-+}_{k,m} C^{\alpha(k+m-1)\dot\alpha(k-m+1)} E^{\alpha(2)} C_{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m+1)}\\
&+ (k+m+2)\alpha^{-+}_{k+1,m} C^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} E^{\dot\alpha(2)} C_{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m+2)}\\
&- (k-m) C^{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m-1)} E^{\dot\alpha(2)} C_{\alpha(k+m+1)\dot\alpha(k-m+1)}\\
&+ (k-m+2) C^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} E^{\alpha(2)} C_{\alpha(k+m+2)\dot\alpha(k-m)}\\
&- (k+m)(k-m+2)\alpha^{--}_{k+1,m} C^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} E^{\beta}{}_{\alpha} C_{\alpha(k+m-1)\beta\dot\alpha(k-m)}\\
&- (k+m+2)(k-m)\alpha^{--}_{k+1,m} C^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} E^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha} C_{\alpha(k+m)\dot\beta\dot\alpha(k-m+1)} \qquad (108)
\end{aligned}
$$

Для младших кривизн эти соотношения модифицируются:

$$
\begin{aligned}
&D(R^{\alpha(2)}C_{\alpha(2)}) = -R^{\alpha(2)}R_{\alpha(2)} + 2\beta_2 R^{\alpha(2)}e_\alpha{}^{\dot\alpha}C_{\alpha\dot\alpha} - 3\mu_2 R^{\alpha(2)}e^{\alpha\dot\alpha}C_{\alpha(3)\dot\alpha}\\
&- 2\beta_2 e^\alpha{}_{\dot\alpha}R^{\alpha\dot\alpha}C_{\alpha(2)} - 3\mu_2 e_{\alpha\dot\alpha}R^{\alpha(3)\dot\alpha}C_{\alpha(2)} - \mu_1^2 E^\alpha{}_\beta C^{\alpha\beta}C_{\alpha(2)}\\
&- 2\beta_2\mu_1 E^{\alpha(2)}CC_{\alpha(2)} - 6\mu_2 E_{\alpha(2)}C^{\alpha(4)}C_{\alpha(2)}\\
&D(R^{\alpha\dot\alpha}C_{\alpha\dot\alpha}) = -R^{\alpha\dot\alpha}R_{\alpha\dot\alpha} + R^{\alpha\dot\alpha}e_\alpha{}^{\dot\beta}C_{\dot\alpha\dot\beta} + R^{\alpha\dot\alpha}e^\beta{}_{\dot\alpha}C_{\alpha\beta} - \frac{\mu_2}{2}R^{\alpha\dot\alpha}e_{\alpha\dot\alpha}C\\
&- \mu_2 R^{\alpha\dot\alpha}e^{\alpha\dot\alpha}C_{\alpha(2)\dot\alpha(2)} - e_\alpha{}^{\dot\alpha}R^{\alpha(2)}C_{\alpha\dot\alpha} - e^\alpha{}_{\dot\alpha}R^{\dot\alpha(2)}C_{\alpha\dot\alpha}\\
&- \frac{\mu_1}{2}e^{\alpha\dot\alpha}RC_{\alpha\dot\alpha} - \mu_2 e_{\alpha\dot\alpha}R^{\alpha(2)\dot\alpha(2)}C_{\alpha\dot\alpha}\\
&D(RC) = -\mu_1 e_{\alpha\dot\alpha}C^{\alpha\dot\alpha}R - \mu_1 R^{\alpha\dot\alpha}e_{\alpha\dot\alpha}C - 2\mu_1 C^{\alpha(2)}E_{\alpha(2)}C - 2\mu_1 C^{\dot\alpha(2)}E_{\dot\alpha(2)}C\\
&D(C^{\alpha(2)}e_\alpha{}^{\dot\alpha}C_{\alpha\dot\alpha}) = -R^{\alpha(2)}e_\alpha{}^{\dot\alpha}C_{\alpha\dot\alpha} - 3\beta_2 C^{\alpha\dot\alpha}E_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}C_{\alpha\dot\beta} + \beta_2 C^{\beta\dot\alpha}E^\alpha{}_\beta C_{\alpha\dot\beta}\\
&+ 3\mu_2 C^{\alpha(3)\dot\alpha}E_{\alpha(2)}C_{\alpha\dot\alpha} - C^{\alpha(2)}e_\alpha{}^{\dot\alpha}R_{\alpha\dot\alpha} - 2C^{\alpha(2)}E_\alpha{}^\beta C_{\alpha\beta}\\
&+ \mu_1 C^{\alpha(2)}E_{\alpha(2)}C - \mu_2 C^{\alpha(2)}E^{\dot\alpha(2)}C_{\alpha(2)\dot\alpha(2)}\\
&D(C^{\alpha\dot\alpha}e_{\alpha\dot\alpha}C) = -R^{\alpha\dot\alpha}e_{\alpha\dot\alpha}C - 2C^{\dot\alpha\dot\beta}E_{\dot\beta\dot\alpha}C - 2C^{\alpha\beta}E_{\beta\alpha}C - C^{\alpha\dot\alpha}e_{\alpha\dot\alpha}R\\
&- \mu_1 C^{\alpha\dot\alpha}E_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}C_{\alpha\dot\beta} - \mu_1 C^{\alpha\dot\alpha}E_\alpha{}^\beta C_{\beta\dot\alpha}
\end{aligned}
\tag{109}
$$

Из-за этих соотношений возможен произвол в выражении лагранжиана через кривизны. А именно, так как лагранжиан определен с точностью до полной производной, то прибавляя соотношения (108),(109) с произвольными коэффициентами, можно изменить коэффициенты в выражении лагранжиана через кривизны, не меняя уравнений движения.