

В.В.Киселев

Нерелятивистская механика
частиц и полей:
ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И СИММЕТРИИ

QUAERITE TE IPSUM

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ТЕМА 1. ДИНАМИКА И ДЕЙСТВИЕ	4
Лекция № 1	4
1. Причинность и действие на траектории	4
1.1. Частица: вероятность достоверности траектории	4
1.2. Поле: локальный лагранжиан	8
2. Принцип наименьшего действия	9
3. Теорема Нётер	10
3.1. Однородность пространства	12
3.2. Однородность времени	12
3.3. Изотропность пространства	13
Лекция № 2	13
4. Инерциальные системы и функция Лагранжа свободной частицы	13
5. Амплитуда вероятности и постоянное действие	15
6. Гамильтонова механика	16
6.1. Уравнения Гамильтона–Якоби	16
6.2. Уравнения Гамильтона	17
6.3. Скобки Пуассона	17
6.4. Канонические преобразования	18
§а. Генераторы бесконечно малых канонических преобразований	18
§б. Метод решения уравнений Гамильтона–Якоби	19
6.5. Сферически симметричный потенциал	20
Лекция № 3	21
7. Замкнутые финитные орбиты	21
7.1. Замкнутость любой финитной орбиты	22
8. Движение в кулоновском поле	24
8.1. Финитное движение (задача Кеплера)	25
8.2. Резерфордское рассеяние	27
9. Изотропный гармонический осциллятор	30
10. Теорема вириала	31
ТЕМА 2. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ	33
Лекция № 4	33
11. Евклидово пространство	33
11.1. Векторы, ковекторы, тензоры	33
11.2. Изометрии евклидовой метрики	36
11.3. Тензор Леви-Чивита	37
11.4. Градиент, дивергенция, ротор	39
§а. Дифференцирование в сферических координатах	40
11.5. Дифференцирование в криволинейных координатах	41
§а. Производная Ли по направлению	42
§б. Ковариантная производная	43
§с. Векторы Киллинга	45
§д. Ковариантные уравнения Эйлера–Лагранжа	46
§е. Тензор Римана	47
Лекция № 5	48
11.6. Теорема Гаусса	48
11.7. Теорема Стокса	49
12. Дифференциальные формы и интегрирование	50
§а. Ориентированная площадь и внешнее произведение	50
§б. Внешнее дифференцирование	52
§с. Теоремы	54
13. Уравнения Максвелла	54
13.1. Сила Лоренца, суперпозиция полей	54
13.2. Закон Кулона	54
13.3. Закон сохранения заряда	56
13.4. Закон Био-Савара	56
13.5. Индукция	57

13.6. Магнитные заряды	57
13.7. Ток смещения	57
ТЕМА 3. ГРУППА ВРАЩЕНИЙ И СПИН	59
Лекция № 6	59
14. Генераторы инфинитезимальных преобразований	59
14.1. Сдвиги \equiv трансляции координат	59
14.2. Вращения	62
14.3. Группа вращений $O(3)$	64
14.4. Общий вид генераторов вращения и спин	65
Лекция № 7	67
15. Спин $s = 1$	67
16. Совместный базис двух эрмитовых матриц	69
17. Квантование спина	70
18. Тензорные поля	72
Лекция № 8	75
19. Разложение приводимых тензоров на неприводимые	75
20. Спин $s = \frac{1}{2}$	76
21. Спинорная метрика	78
22. Поперечные векторные и тензорные поля	79
ТЕМА 4. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА И ТОК	81
Лекция № 9	81
23. Тензор энергии-импульса нерелятивистских частиц	81
23.1. Баланс энергии	83
23.2. Баланс импульса	83
24. Тензор орбитального момента	84
25. Скалярное поле амплитуды вероятности траектории	85
25.1. Тензор энергии-импульса	86
25.2. Глобальная калибровочная инвариантность	87
25.3. Локальная калибровочная инвариантность и векторный бозон	88
25.4. Дискретные симметрии P и T	89
ТЕМА 5. СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В СЛУЧАЯХ ВЫРОЖДЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ	90
Лекция № 10	90
26. Вектор Рунге–Ленца–Лапласа	90
26.1. Скобки Пуассона и симметрия $SO(4)$	91
27. Тензор Фрадкина	93
27.1. Группа $SU(3)$	93
27.2. Дополнительные интегралы движения	95
28. Квазипериодическое движение в магнитном поле	96
28.1. Периодическое движение	97
28.2. Теорема Адемолло–Гатто	99
Дополнения 6. РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН	101
Лекция № 11	101
29. Квазиупругий диполь	102
29.1. Метод преобразования Фурье	102
29.2. Сечение рассеяния электромагнитной волны	104
30. Функция Грина классического осциллятора	107
ЛИТЕРАТУРА	110

Предисловие

Материал данного учебного пособия представляет собой вариант лекций, предлагаемых автором студентам второго курса Московского физико-технического института (Государственного университета) в весеннем семестре на кафедре физики высоких энергии в качестве курса по специализации в начале магистерской программы по физике элементарных частиц.

В основе курса — законы механики [1], сформулированные под таким ракурсом, который позволяет затем их наиболее просто и эффектно применять для описания частиц и полей в классической нерелятивистской механике и подготовить методический инструментарий для логически ясного перехода к релятивистской механике частиц и теории поля, а также к квантовой теории в качестве продолжения данного спецкурса. В такой постановке целей изложения особый упор сделан на обосновании и применении таких понятий как действие, теорема Нётер и сохраняющиеся величины, пространственно-временные симметрии, гамильтонова механика, движение в кулоновском или гравитационном поле и в поле изотропного осциллятора. Изложение пространственно-временных симметрий предусматривает обучение векторному анализу и, как следствие, введение генераторов пространственных трансляций и вращений для полей, понятия спина для поля, а значит, описание всей процедуры «квантования» собственных значений эрмитовых матриц для генераторов группы $SU(2)$. Рассмотрение матричного представления генераторов спинового вращения полей позволяет построить неприводимые тензорные представления для полей с собственным моментом вращения $s = 0, 1, 2$, а при рассмотрении неприводимых тензорных произведений единичного радиус-вектора вывести выражения для сферических гармоник скаляра, вектора и тензора второго ранга.

В качестве приложений изучения симметрий движений построены сохраняющиеся интегралы движения для траекторий в кулоновском поле и для изотропного осциллятора, а также фазовый инвариант периодического и квазипериодического движения с рассмотрением его физического смысла в случае движения в магнитном поле.

Наконец, рассмотрен метод решения уравнений движения с помощью преобразования Фурье с определением дельта-функции Дирака на примере квазиупругого диполя в поле электромагнитной волны, выведено сечение рассеяния Томсона для электрона и описан метод функции Грина для вынужденных колебаний классического осциллятора, подчеркнуты физические различия для разных прескрипций обхода полюсов в плоскости комплексной частоты и их роль при использовании запаздывающей и причинной функций Грина классического осциллятора.

Таким образом, изложение построено так, чтобы дать единый взгляд как на классическую нерелятивистскую механику частиц и полей, так и на классическую и квантовую механику с их общим генезисом в терминах действия и его симметрий.

Прошу читателей направлять свои замечания и отзывы о книге по электронному адресу Valery.Kiselev@ihep.ru с пометкой «Спецкурс по нерелятивистской механике».

Тема 1

Динамика и действие

Лекция № 1

Детерминизм классической механики и начальные данные, траектории с фиксированными концами, динамический функционал на траектории, погрешность измерений и неопределенность траектории, трубка эквивалентных траекторий, функционал вероятности для пучка траекторий и его экстремальность на трубке классической траектории физической системы, принцип запрета Паули и введение амплитуды вероятности, операция перестановки траекторий тождественных частиц, фермионы и бозоны, функционал действия как логарифм амплитуды вероятности, экстремальность действия на «прямой» траектории, переход от механики точки к механике поля, действие в локальной теории поля, принцип наименьшего действия в механике, уравнения Эйлера–Лагранжа для частицы и для поля, правило Эйнштейна для суммирования по индексам, теорема Нётер, интегралы движения из однородности пространства и времени и из изотропии пространства.

1. Причинность и действие на траектории

1.1. Частица: вероятность достоверности траектории

В механике частица представляет собой точку, которая движется в пространстве под воздействием сил. В качестве наблюдаемой величины измеряется положение частицы в пространстве, которое задается координатой q , а зависимость от времени траекторией $q(t)$.

Согласно принципу причинности это движение полностью детерминировано, если заданы координата и скорость частицы в начальный момент времени, а также силы во всех точках пространства на протяжении всего времени их действия. Силы, таким образом, определяют изменение скорости, т.е. ускорение. Из детерминированности следует, что уравнения движения по начальным данным в момент времени t_0 : координате и скорости, $\{q_0 = q(t_0), \dot{q}_0 = dq(t_0)/dt\}$, — задают единственную траекторию $q(t)$. Эта траектория в момент времени t' проходит через точку $q' = q(t')$. Это означает, что для данной траектории от начальных данных в виде $\{q_0, \dot{q}_0\}$ можно перейти к данным на концах траектории: парам $\{q_0, t_0\}$ и $\{q', t'\}$. Для свободной частицы, т.е. в отсутствие всяких сил, существуют инерциальные системы отсчета, в которых частица движется поступательно и равномерно, т.е. траектория является прямой линией. Для свободной частицы, таким образом, переход от начальных данных к данным на концах траектории является взаимно однозначным. При наличии сил переход к данным на концах траектории также будет взаимно однозначным, если рассматривать движение на бесконечно малом промежутке времени $t' - t_0 \mapsto dt \rightarrow 0$. На конечных промежутках времени задание конечных точек на траектории может отвечать множеству траекторий с разными значениями скорости в начальный момент времени. В этом случае говорят, что физическая система обладает симметрией или сингулярными точками. Например, от одного полюса на шаре можно прийти к другому полюсу за одинаковое время, если идти по разным меридианам с одной и той же угловой скоростью, что отвечает симметричной системе. В качестве случая наличия сингулярных точек можно указать систему линз с наличием, скажем, двух фокусов, так что траектории фотонов от фокуса до фокуса, по сути, охватывают все множество траекторий с началом в одном из фокусов.

Итак, для бесконечно малых сдвигов по времени траектория движения частицы однозначно задается данными на концах траектории. Все другие траектории, т.е. функции $q(t)$, с теми же данными на концах не будут удовлетворять уравнениям движения. Траектории, не являющиеся решением уравнений движения, можно трактовать как траектории с другим набором сил. В этом смысле, траектория, которая мало отличается от решения уравнений движения в заданной физической системе с фиксированными концами, получается за счет малой флуктуации сил.

Траектории с фиксированными концами можно поставить в соответствие число, равное единице, если эта траектория $q(t)$ — решение уравнений движения в заданной физической системе, и нулю, если она не является решением уравнений движения $\tilde{q}(t)$. Такое отображение траектории на множество чисел в общем случае называется *функционалом*. Сконструированное нами сейчас соответствие можно назвать динамическим функционалом достоверности траектории \mathcal{C} : если траектория соответствует динамике системы, то значение динамического функционала достоверности равно единице, $\mathcal{C}[q(t)] = 1$, если не

соответствует, то нулю, $\mathcal{C}[\tilde{q}(t)] = 0$:

$$\mathcal{C} = \begin{cases} 1, & \text{если траектория — решение уравнений движения,} \\ 0, & \text{если траектория не является решением уравнений движения.} \end{cases}$$

Ясно, что при наличии нескольких частиц, которые движутся под воздействием внешних сил¹, динамический функционал достоверности всей системы частиц является произведением динамических функционалов достоверности для отдельных частиц:

$$\mathcal{C}_{1\dots n} = \prod_{k=1}^n \mathcal{C}_k.$$

Аналогично, динамический функционал достоверности траектории частицы, разбитой на последовательные участки точками на достоверной траектории, является произведением динамических функционалов достоверности для отдельных участков траектории.

Мы рассматриваем координаты и скорости частицы как непрерывные функции времени. Непрерывные величины определяются как точки с малыми окрестностями. Эти окрестности имеют физический смысл погрешности измерения непрерывной величины. В идеале окрестность может быть бесконечно малой. Если начальные данные для координаты и скорости принимают центральные значения с конечной погрешностью, то траектории из такой малой области начальных данных могут на малых интервалах времени либо мало отличаться от центральной траектории, либо быстро расходятся. В последнем случае говорят, что система находится в состоянии динамической неустойчивости или хаоса. Мы ограничимся рассмотрением систем без хаоса. В этом случае вся описанная нами выше трубка траекторий из исходной области начальных данных является эквивалентной в рамках погрешности измерений, так что для всего пучка динамический функционал достоверности траекторий равен единице.

Неопределенность траектории связана не только с инструментальной погрешностью приборов измерения наблюдаемых величин, она имеет и казуальный характер. Так, например, в случае, когда свободная частица движется равномерно и поступательно и, при этом, никак не взаимодействует с окружающей средой, положение центра системы отсчета координат для такой частицы в окружающей среде не может быть определено, оно абсолютно произвольно: если частице дать задание указать точку отсчета, то она это сможет сделать так, что точки-метки двух независимых попыток такого опыта дадут совершенно никак причинно не связанные результаты. Если на частицу начинают действовать внешние силы, т.е. она взаимодействует с окружающей средой, то положение частицы уже может быть более определено, поскольку разным точкам пространства могут отвечать разные силы, но так как это положение еще имеет ненулевую определенность, то и значение сил задается неоднозначно, силы имеют флуктуации, что делает траекторию несколько неопределенной, а не абсолютно точной². Мы видим, что неопределенности в значениях скорости и координаты частицы связаны казуально, но эта связь в области применимости классической механики может быть пренебрежимо малой, она существенна в квантовой механике. Для нас же здесь важно, что неопределенность траектории частицы отвечает пучку траекторий или трубке траекторий возле центрального значения, эквивалентных с точки зрения динамического функционала достоверности траекторий.

Представим теперь себе ситуацию, когда центральное значение начальных данных немного сдвинуто так, чтобы при заданной погрешности новая область начальных данных лишь наполовину перекрывается с исходной областью начальных данных при той же погрешности. В этом случае динамический функционал достоверности траекторий в половине случаев принимает значение, равное единице, если траектория находится в пересечении двух областей данных, и равно нулю, если траектория находится вне исходной трубки траекторий. В этом случае естественно говорить уже не о динамическом функционале достоверности траектории, а о функционале вероятности достоверности траектории \mathcal{W} , а в приведенном примере можно положить эту вероятность равной $\mathcal{W} = \frac{1}{2}$. Конечно, определение вероятности достоверности пучка близких траекторий может быть не столь упрощенным и существенно более формализованным. Например, можно брать N_{in} траекторий в области погрешности определения начальной координаты и начальной скорости и вычислять, сколько из этих траекторий попали в область

¹ В этом случае из системы можно изъять любую из частиц без влияния на траектории оставшихся частиц, а значит, траектории являются независимыми друг от друга, они зависят только от внешних сил в системе. Напротив, если частицы влияют на траектории друг друга, т.е., как говорят, взаимодействуют, то очевидно, что имеет смысл рассматривать не траектории отдельных частиц, а совокупность траекторий всех взаимодействующих частиц, и в этом случае понятие изолированной траектории теряет смысл, адекватный самой задаче о движении системы.

² Забегая вперед, скажем, что согласно второму закону Ньютона изменение импульса частицы δp за характерное время δt связано с силой, в частности, с изменением потенциальной энергии δU при изменении координаты δx : $\delta p / \delta t \sim \delta U / \delta x$, откуда $\delta x \cdot \delta p \sim \delta U \cdot \delta t$. Это согласуется со случаем свободной частицы, когда в пределе постоянного импульса $\delta p \rightarrow 0$ и изменении энергии $\delta U \rightarrow 0$ неопределенность положения частицы относительно начала отсчета $\delta x \rightarrow \infty$ и время изменения энергии $\delta t \rightarrow \infty$. При этом, величина в виде произведения флуктуаций $\delta x \cdot \delta p \sim \delta U \cdot \delta t$ имеет неопределенность. Как мы увидим, это произведение не может быть бесконечно малым вследствие квантовых эффектов. Другими словами, при стремлении к абсолютной точности измерения непрерывных динамических величин остается неотличимый набор траекторий, отвечающий заданным граничным условиям для движения.

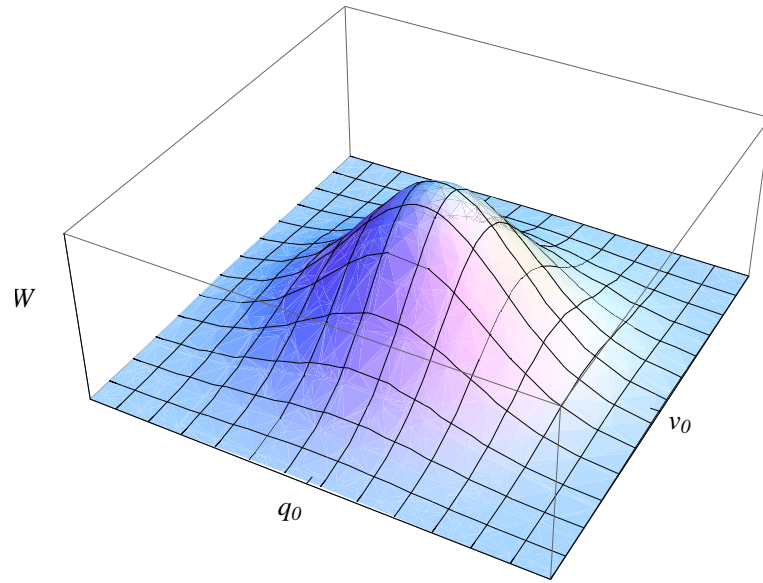


Рис. 1.1: Зависимость вероятности достоверности пучка траекторий при наличии погрешности в определении координат и скорости.

фиксированных значений координаты и скорости на конце траектории N_{out} за фиксированный интервал времени, и определять вероятность в зависимости от отношения $N_{\text{out}}/N_{\text{in}}$.

Таким образом, в общем случае при наличии ненулевой погрешности измерений координат и скорости следует ввести функционал вероятности достоверности траектории со значениями во всем спектре от нуля до единицы: $W \in [0, 1]$. Эта вероятность достоверности достигает своего максимума на решении уравнений движения с фиксированными концами траектории в заданной физической системе, т.е. W имеет экстремум на «истинной» или, как говорят, «прямой» траектории (см. рис. 1.1).

Траекторию можно описывать в разных системах координат, в разных системах отсчета. Значение вероятности достоверности от перехода от одних таких систем к другим не меняется, т.е. остается *инвариантным*.

По построению, функционал вероятности достоверности траекторий вычисляется как произведение вероятностей для независимых подсистем и подтраекторий:

$$\mathcal{W}_{1\dots n} = \prod_{k=1}^n \mathcal{W}_k. \quad (1.1)$$

Рассмотрим, в частности, систему из двух тождественных частиц. Тождественность означает, что частицы имеют *одинаковый спектр траекторий во всех физических системах*. Если на частицы действуют лишь внешние силы, то для каждой из них можно установить вероятность достоверности \mathcal{W}_1 и \mathcal{W}_2 для траекторий «1» и «2», соответственно. При этом можно было бы предположить, что совместная вероятность достоверности двух траекторий $\mathcal{W}_{(1,2)} = \mathcal{W}_1 \cdot \mathcal{W}_2$. При этом для тождественных частиц можно перейти к пределу «2» \rightarrow «1», так что $\mathcal{W}_{(1,1)} = \mathcal{W}_1^2$. Однако такое построение противоречит принципу запрета Паули: тождественные траектории для тождественных фермионов запрещены, т.е. для фермионов $\mathcal{W}_{(1,1)} = 0$, что приводило бы к условию отсутствия прямой траектории и для единственного фермиона.

Это противоречие можно устранить, если ввести вероятность достоверности траектории как интенсивность амплитуды вероятности: $W = |\Psi|^2$, где амплитуда вероятности может быть, вообще говоря, уже комплексным числом в отличие от вероятности, $\Psi \in \mathbb{C}$. При этом для тождественных фермионов вводится суперпозиция амплитуд траекторий

$$\Psi_{(1,2)} = \mathcal{A}_{(1,2)} (\Psi_1[q'_1]\Psi_2[q'_2] - \Psi_2[q'_1]\Psi_1[q'_2]), \quad \mathcal{A}_{(1,2)} \neq 0, \quad |\mathcal{A}_{(1,2)}| < \infty, \quad (1.2)$$

где для простоты записи мы указали лишь координаты траектории в момент времени t' , считая, что исходные точки траекторий и интервалы времени эволюции совпадают, а в число координат включили и одинаковые векторы поляризации фермионов. Тогда, конечно, $\mathcal{W}_{(1,1)} = |\Psi_{(1,1)}|^2 \equiv 0$ для фермионов. В случае, когда траектории удовлетворяют уравнениям движения и $|\Psi_{(1,2)}|^2 \neq 0$, коэффициент нормировки $\mathcal{A}_{(1,2)}$ подбирается так, чтобы вероятность достоверности экстремальных траекторий была равна единице.

В общем случае рассмотрим теперь операцию перестановок траекторий тождественных частиц \mathcal{S}_{12} :

$$\mathcal{S}_{12}\Psi_{(1,2)} = \Psi_{(2,1)}.$$

Вероятности достоверности траекторий для тождественных частиц $\mathcal{W}_{(1,2)} = \mathcal{W}_{(2,1)}$, а следовательно, $\Psi_{(2,1)} = \lambda \Psi_{(1,2)}$, где $|\lambda| = 1$. Применяя операцию перестановок повторно, найдем $\lambda^2 = 1$, а значит,

$$\lambda = \pm 1.$$

Таким образом, поскольку физические наблюдаемые для системы тождественных частиц не изменяются при перестановке траекторий тождественных частиц³, мир тождественных частиц делится на две части, а именно, траектории бозонов с $\lambda = 1$ и фермионов с $\lambda = -1$: амплитуды вероятности тождественных бозонов симметричны относительно перестановок траекторий бозонов, а амплитуды вероятности тождественных фермионов антисимметричны относительно перестановок траекторий фермионов. Связь статистики, т.е. собственного значения оператора перестановок тождественных частиц, со спином устанавливается в релятивистской квантовой механике свободных частиц: фермионы имеют полуцелый спин, а бозоны — целый. Это обусловлено требованием положительного значения энергии свободной частицы или требованием принципа причинности для релятивистских частиц, т.е. условием, что следствие по сравнению с причиной находится в будущем и возникает не раньше, чем сигнал от точки причины достигнет точки следствия не быстрее максимальной скорости распространения взаимодействий, которая совпадает со скоростью движения безмассовых частиц, в частности, со скоростью света.

Заметим, что введение амплитуды для функционала вероятности достоверности траекторий частиц было подтверждено эмпирически путем исследования неравенств Белла, которые мы здесь не описываем (см. учебники по квантовой механике, например, [2]).

Итак, амплитуда вероятности достоверности траектории, как и сама вероятность, имеет экстремум на «прямой» траектории. Значит, и логарифм амплитуды имеет экстремум на «прямой» траектории. Разбивая «прямую» траекторию на подтраектории, в силу (1.1) найдем, что

$$\ln \Psi_{1\dots n} = \sum_{k=1}^n \ln \Psi_k.$$

Введем понятие действия как функционала на траектории, пропорционального логарифму амплитуды вероятности:

$$S = \kappa \ln \Psi, \quad S_{1\dots n} = \sum_{k=1}^n S_k. \quad (1.3)$$

Если амплитуда вероятности — это безразмерная величина, то действие может иметь размерность. В этом случае размерность коэффициента κ совпадает с размерностью действия S :

$$[\kappa] = [S].$$

При этом значение κ является универсальным, оно не зависит от физической системы, κ — универсальная постоянная. Её значение мы установим позже, когда проведем описание действия для свободной частицы:

$$\kappa = -i\hbar, \quad (1.4)$$

где i — мнимая единица, а \hbar — постоянная Планка с чертой. Как видим, комплексное значение амплитуды вероятности достоверности классической траектории отражается и в комплексном значении постоянной κ .

Разбивая бесконечно малый интервал эволюции на два отрезка эволюции $dt_{12} = dt_1 + dt_2$, из (1.3) найдем

$$dS_{12} = dS_1 + dS_2. \quad (1.5)$$

На бесконечно малом интервале действие зависит от одних и тех же значений координаты и скорости $\{q(t), \dot{q}(t)\}$, так что при произвольном разбиении интервала условие (1.5) может быть удовлетворено, только если

$$dS = L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (1.6)$$

где функция Лагранжа $L(q, \dot{q}, t)$ зависит от определения динамических свойств физической системы. В итоге, функционал действия на траектории задается в виде интеграла

$$S[q] = \int_{t_0, q_0}^{t', q'} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (1.7)$$

Мы установили, что на траектории, удовлетворяющей уравнениям движения, действие экстремально.

³В противном случае можно было бы отличить «первую» частицу от «второй».

1.2. Поле: локальный лагранжиан

В механике точки измеряется координата частицы q в зависимости от времени, т.е. траектория $q(t)$. В теории поля измеряют локальные характеристики, например, электрического \mathcal{E} или магнитного \mathcal{H} полей, которые мы для общности изложения обозначим символом Φ . Локальность означает введение зависимости поля от его позиции в пространстве $\Phi(\mathbf{r})$, а также производных поля по координатам в точке, т.е. $\partial\Phi/\partial x$ и т.п. Определим стандартное короткое обозначение для производных по независимым переменным согласно правилу $\partial\Phi/\partial x = \partial_x\Phi$ с нижним индексом, что в матричных обозначениях отвечает строке

$$(\partial_x\Phi, \partial_y\Phi, \partial_z\Phi),$$

причем символом $\partial\Phi$ без индекса будем обозначать производные по какой-либо координате пространства. «Траекторией» поля является набор полевых конфигураций $\Phi(\mathbf{r}, t)$, $\partial\Phi(\mathbf{r}, t)$ и, возможно, производных более высокого порядка, которые мы будем упускать для краткости записи в дальнейшем.

Согласно принципу причинности траектория частицы однозначно определяется начальными данными для координаты $q(t_0)$ и ее производной по времени⁴ $\partial_t q(0) \equiv \dot{q}(t_0)$ при решении уравнений движения, а сами эти уравнения могут быть получены из принципа экстремального действия S , которое вычисляется по траектории (1.7). Аналогично, действие для поля в бесконечно малой окрестности точки \mathbf{r} будет иметь вид

$$dS[\Phi] = \int dt dL[\Phi, \partial_t\Phi, \partial\Phi, \dots],$$

со своей, полевой функцией Лагранжа dL . В *локальной* теории полагают, что действие поля в заданной точке зависит только от значений всех полей физической системы в этой же точке, т.е. траектория поля в точке не зависит от траекторий поля в другой точке. Такая зависимость полей друг от друга называется взаимодействием полей, и в локальной теории поля взаимодействуют только в общих точках, локально. В механике независимость траекторий отвечает набору не взаимодействующих друг с другом частиц q_k с действием в виде суммы независимых вкладов

$$S = \sum_k S[q_k],$$

что по аналогии дает для локального поля действие в виде суммы по малым областям пространства возле бесконечного дискретного набора точек

$$S = \sum_{\mathbf{r}} dS[\Phi(\mathbf{r})].$$

Рассмотрим теперь бесконечно малый объем dV_{12} возле точки $\mathbf{r} \in dV_{12}$ для поля с действием

$$dS_{12} = \int dt dL_{12}[\Phi(\mathbf{r}, t), \partial\Phi(\mathbf{r}, t)].$$

Разобьем этот объем на две произвольных части $dV_{12} = dV_1 + dV_2$. Действия поля в точках, размещенных в объемах dV_1 и dV_2 будут независимы, т.е. $dS_{12} = dS_1 + dS_2$, но с точностью до малых поправок по размеру области они будут зависеть от значения поля все в той же точке \mathbf{r} , т.е. на одной и той же траектории поля:

$$dS_1 \approx \int dt dL_1[\Phi(\mathbf{r}, t), \partial\Phi(\mathbf{r}, t)], \quad dS_2 \approx \int dt dL_2[\Phi(\mathbf{r}, t), \partial\Phi(\mathbf{r}, t)].$$

Из аддитивности действия в локальной теории поля следует условие для функции Лагранжа $dL_{12} = dL_1 + dL_2$, которое для произвольного разбиения объема может быть выполнено только, если положить

$$dL = \mathcal{L}(\Phi(\mathbf{r}, t), \partial\Phi(\mathbf{r}, t)) dV,$$

где \mathcal{L} — локальная функция поля и его частных производных, которую называют лагранжианом, так как он является плотностью функции Лагранжа поля. Тогда суммирование по разбиению всего пространства на бесконечно малые объемы приводит к действию поля в виде интеграла

$$S[\Phi] = \int dt dV \mathcal{L}(\Phi(\mathbf{r}, t), \partial\Phi(\mathbf{r}, t)).$$

⁴В дальнейшем символ производной по времени ∂_t мы используем для дифференцирования физических величин по времени, причем, если есть зависимость какой-либо функции от времени как явно так и в виде сложной функции от физических величин, то берется как частная производная явной зависимости, так и производная по времени сложной функции, т.е. полная производная по времени.

В декартовых координатах $dV = dx dy dz = d^3r$. Мы полагаем, что лагранжиан в явном виде не зависит от координат и времени, т.е. физическая система не содержит внешних источников энергии и импульса, а зависит только от динамических полей, т.е. полей, которые являются решениями уравнений движения, а не заданы в произвольном виде.

Итак, для изучения теории поля нам необходимо знать общие свойства механики в формализме действия.

2. Принцип наименьшего действия

Вариация действия для частицы в первом порядке по отклонению траектории $\delta q(t) = \tilde{q}(t) - q(t)$ с фиксированными концами (см. рис. 1.2), т.е. при $\delta q(t_0) = \delta q(t') = 0$, имеет вид

$$\delta S = S[q + \delta q] - S[q] = \int_{t_0, q_0}^{t', q'} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right).$$

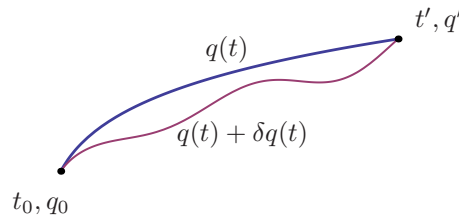


Рис. 1.2: Траектория с фиксированными концами и ее вариация.

Поскольку

$$\delta \dot{q} = \dot{\tilde{q}}(t) - \dot{q}(t) = \frac{d}{dt} \tilde{q}(t) - \frac{d}{dt} q(t) = \frac{d}{dt} \delta q,$$

можно проинтегрировать второй член под интегралом по частям, приняв во внимание нулевой вклад граничных членов в силу условия фиксированных концов траектории. Тогда

$$\delta S = \int_{t_0, q_0}^{t', q'} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q(t).$$

Согласно принципу экстремального действия на траектории частицы $\delta S = 0$ при любых малых δq : $\delta S / \delta q = 0$, $\forall \delta q$, т.е. подинтегральное выражение тождественно равно нулю, а значит, имеет место уравнение Эйлера–Лагранжа

$$\partial_t \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}. \quad (1.8)$$

Тогда из вида действия для локального поля Φ сразу получаем полевые уравнения Эйлера–Лагранжа, если учесть, что интегрирование производится не только по времени, но и по координатам пространства, и положить, что порядок частных производных по пространственным координатам не превышает единицы, как это имеет место для производной по времени,

$$\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \Phi} + \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_x \Phi} + \partial_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_y \Phi} + \partial_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_z \Phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}.$$

Введем четырехкомпонентные обозначения для величины с размерностью длины с *верхним индексом*, что в матричных обозначениях отвечает столбцу,

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x_0 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

где $\mu = \overline{0, 3} = \{0, 1, 2, 3\}$ в декартовых координатах, а c имеет размерность скорости. Эта скорость сокращается при записи полевого уравнения Эйлера–Лагранжа, которое теперь можно переписать в виде

$$\sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}.$$

Определим *правило Эйнштейна для суммирования по индексам*: в выражении может быть пара одинаковых индексов, которые называются немymi, тогда подразумевается, что по немому индексу производится суммирование, а знак суммы опускается. Например, имеет место следующее преобразование записи произведения строки на столбец по этому правилу: $\sum_{\mu} A_{\mu} B^{\mu} \mapsto A_{\mu} B^{\mu}$. В итоге, приходим к полевому уравнению движения Эйлера–Лагранжа

$$\partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}. \quad (1.9)$$

Решение этого уравнение задает экстремум действия относительно вариации поля $\Phi(\mathbf{r}, t)$ с фиксированными значениями поля во всем пространстве во времена t_0 и t' .

3. Теорема Нётер

Если задать траекторию $q(t)$ — решение уравнения движения для физической системы с функцией Лагранжа L и ее преобразование в другое решение уравнений с той же функцией Лагранжа, зависящее от непрерывного параметра a ,

$$q_a(t_a) = q_a(a, q(t), t), \quad t_a = t_a(a, q(t), t), \quad (1.10)$$

то можно рассмотреть изменение экстремума действия в зависимости от параметра a с учетом изменения граничных точек траектории. Эту задачу решает теорема Нётер:

$$\frac{dS}{da} = \int dt \partial_t \left\{ \frac{\partial L}{\partial \partial_t q} \left(\frac{\partial q_a}{\partial a} - \frac{\partial t_a}{\partial a} \partial_t q \right) + L \frac{\partial t_a}{\partial a} \right\}. \quad (1.11)$$

Доказательство. Рассмотрим параметрическое преобразование координат и времени, переводящее «прямую» траекторию $q(t)$ в «прямую» траекторию $q_a(t_a)$ согласно (1.10). При этом, $q = q(t)$ — решение уравнений движения в непреобразованных координатах.

Траектория $q_a(t_a)$ также является экстремальной для действия с той же функцией Лагранжа

$$S[q_a(t_a)] = \int_{t_a^{(1)}(a, q_1, t_1)}^{t_a^{(2)}(a, q_2, t_2)} dt_a L(q_a(t_a), \dot{q}_a(t_a), t_a),$$

в котором от параметра a явно зависят граничные точки траектории, а t_a является независимой переменной интегрирования, и значит, $dt_a/da \equiv 0$.

Вычислим производную действия по параметру a на траектории

$$\frac{dS}{da} = \frac{d}{da} \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} L(q_a, \dot{q}_a, t_a) dt_a,$$

где необходимо варьировать, во-первых, пределы интегрирования, а во-вторых, подынтегральную функцию от q_a и \dot{q}_a , которые сами зависят от параметра, в отличие от переменной эволюции на траектории t_a , так что

$$\frac{dS}{da} = L \frac{\partial t_a}{\partial a} \Big|_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} + \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_a} \frac{dq_a}{da} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \frac{d\dot{q}_a}{da} \right\} dt_a.$$

Далее, во-первых,

$$L \frac{\partial t_a}{\partial a} \Big|_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} = \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \frac{d}{dt_a} \left(L \frac{\partial t_a}{\partial a} \right) dt_a,$$

во-вторых, уравнения движения, так как по условию они удовлетворяются,

$$\frac{d}{dt_a} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial L}{\partial q_a}$$

дают

$$\int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \frac{\partial L}{\partial q_a} \frac{dq_a}{da} dt_a = \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \left(\frac{d}{dt_a} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) \frac{dq_a}{da} dt_a.$$

Получим сначала

$$\int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_a} \frac{dq_a}{da} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \frac{d\dot{q}_a}{da} \right\} dt_a = \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \left(\frac{d}{dt_a} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) \frac{dq_a}{da} dt_a + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \frac{d\dot{q}_a}{da} dt_a.$$

Перестановочность дифференцирования по параметру и переменной эволюции приводит к

$$\frac{d\dot{q}_a}{da} = \frac{d}{dt_a} \frac{dq_a}{da},$$

и следовательно,

$$\int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_a} \frac{dq_a}{da} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \frac{d\dot{q}_a}{da} \right\} dt_a = \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \frac{d}{dt_a} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \frac{dq_a}{da} \right) dt_a,$$

так что, собирая все члены, получаем

$$\frac{dS}{da} = \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \frac{d}{dt_a} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \frac{dq_a}{da} + L \frac{\partial t_a}{\partial a} \right\} dt_a. \quad (1.12)$$

“На траектории” дифференциалы равны

$$\begin{aligned} dq_a &= \frac{\partial q_a}{\partial a} da + \frac{dq_a}{dt} dt, \\ dt_a &= \frac{\partial t_a}{\partial a} da + \frac{dt_a}{dt} dt. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Следовательно, в силу независимости переменной эволюции от параметра преобразования

$$\frac{dt_a}{da} = \frac{\partial t_a}{\partial a} + \frac{dt_a}{dt} \frac{dt}{da} \equiv 0, \quad (1.14)$$

откуда с помощью понятия о неявной обратной функции следует

$$\frac{dt_a}{dt} \frac{dt}{da} = -\frac{\partial t_a}{\partial a}. \quad (1.15)$$

Независимость переменной интегрирования t_a , выраженная в виде (1.15), означает, что при фиксированной значении t_a зависимость от параметра a в функции замены переменных неявно переносится на зависимость t от a . Тогда согласно (1.14) полная производная координаты равна

$$\frac{dq_a}{da} = \frac{\partial q_a}{\partial a} + \frac{dq_a}{dt} \frac{dt}{da} = \frac{dq_a}{da} = \frac{\partial q_a}{\partial a} + \frac{dq_a}{dt_a} \frac{dt_a}{dt} \frac{dt}{da} = \frac{\partial q_a}{\partial a} - \dot{q}_a \frac{\partial t_a}{\partial a}, \quad (1.16)$$

где мы ввели обычное обозначение для полной производной по времени посредством точки

$$\frac{dq_a}{dt_a} \equiv \dot{q}_a.$$

В итоге,

$$\frac{dS}{da} = \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \frac{d}{dt_a} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \left(\frac{\partial q_a}{\partial a} - \dot{q}_a \frac{\partial t_a}{\partial a} \right) + L \frac{\partial t_a}{\partial a} \right\} dt_a, \quad (1.17)$$

что и составляет содержание *теоремы Нётер*.

Непрерывное преобразование называется *симметрией*, если экстремум не зависит от параметра, т.е. $dS/da \equiv 0$, а значит, одному и тому же экстремуму отвечает целое семейство решений уравнений движения. Из наличия симметрии $dS/da = 0$ следует сохранение во времени величины⁵

$$\mathcal{I} = \frac{\partial L}{\partial \partial_t q} \left(\frac{\partial q}{\partial a} - \frac{\partial t}{\partial a} \partial_t q \right) + L \frac{\partial t}{\partial a}, \quad (1.18)$$

которую называют интегралом движения: $\mathcal{I}(t') = \mathcal{I}(t_0)$.

Легко написать аналог теоремы Нётер в теории поля, просто проводя подстановку переменных интегрирования и дифференцирования в (1.17):

$$dt \mapsto dt d^3r = \frac{1}{c} d^4x, \quad \partial_t \mapsto \partial_\nu, \quad \partial t \mapsto \partial x^\nu, \quad L \mapsto \mathcal{L}, \quad q \mapsto \Phi,$$

так что

$$\frac{dS}{da} = \frac{1}{c} \int d^4x \partial_\nu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \Phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a} - \frac{\partial x^\lambda}{\partial a} \partial_\lambda \Phi \right) + \mathcal{L} \frac{\partial x^\nu}{\partial a} \right\}. \quad (1.19)$$

Полевые законы сохранения мы исследуем позже с использованием тензорных обозначений из векторного анализа. Сейчас же приведем примеры в механике.

3.1. Однородность пространства

Если сдвиг начала отсчета координат не влияет на законы движения в физической системе, т.е. перенос этой системы целиком вместе с источниками сил невозможно установить по движению внутри системы, то говорят, что пространство обладает однородностью или трансляционно инвариантно. Трансляция вдоль оси x задает преобразование траектории

$$x_a = x + a, \quad t_a = t,$$

так что инвариантность действия в однородном пространстве согласно теореме Нётер (1.17) дает инвариант согласно (1.18)

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

который называют импульсом. Однородность пространства по каждому направлению означает сохранение вектора импульса

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}. \quad (1.20)$$

Импульс сохраняется, если функция Лагранжа не зависит от координат системы явно.

Для пространственных координат вводят столбец с тремя индексами из начала греческого алфавита:

$$r^\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \alpha = \overline{1, 3},$$

так что вектор скорости $v^\alpha = \dot{r}^\alpha$ — тоже столбец, а импульс, как частная производная по компонентам столбца, является строкой $p_\alpha = \partial_{v^\alpha} L$.

3.2. Однородность времени

Однородность времени означает, что начало отсчета времени никак не сказывается на динамике физической системы, так что преобразования

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}, \quad t_a = t - a,$$

оставляют инвариантным действие, и по теореме Нётер (1.17) сохраняется следующий интеграл движения согласно (1.18)

$$E = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} - L, \quad (1.21)$$

который называют энергией.

Энергия сохраняется, если функция Лагранжа не зависит от времени явно.

⁵В дальнейшем будем опускать индекс a у величины при записи ее частных производных по этому параметру, чтобы не загромождать и без того сложные выражения.

3.3. Изотропность пространства

Изотропность пространства означает эквивалентность всех направлений в пространстве, а значит действие системы инвариантно относительно вращений в пространстве:

$$r_a^\alpha = \mathcal{R}_\beta^\alpha(\mathbf{a}) r^\beta, \quad t_a = t,$$

где матрица \mathcal{R} размерностью 3×3 зависит от угла вращения a вокруг некоей оси, заданной единичным вектором \mathcal{O} , что определяет вектор $\mathbf{a} = a\mathcal{O}$. Например, при вращении вокруг оси z декартовы координаты преобразуются как

$$x_a = x \cos a - y \sin a, \quad y_a = y \cos a + x \sin a,$$

так что при бесконечно малом угле поворота $a \rightarrow 0$, имеют место преобразования

$$x_a = x - ya, \quad y_a = y + xa, \quad t_a = t,$$

задающие инвариант согласно (1.18)

$$\ell_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(-y) + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}x = xp_y - yp_x,$$

т.е. не что иное, как проекцию на ось z момента количества движения

$$\ell_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z.$$

Из изотропности пространства следует сохранение вектора момента количества движения ℓ .

Орбитальный момент импульса сохраняется, если функция Лагранжа не зависит от направлений координат системы явно.

В теории поля возникают полные аналоги рассмотренных законов сохранения, следующих из однородности пространства, времени и изотропии пространства.

Лекция № 2

Инерциальные системы, преобразования Галилея и вывод импульса и энергии свободной частицы из теоремы Нётер, единичная вероятность достоверности пучка экстремальных траекторий и вещественность действия, постоянная Планка, связь эйконала геометрической оптики с действием. Гамильтонова механика, скобки Пуассона, производящая функция канонических преобразований, метод решения уравнений Гамильтона–Якоби при помощи канонического преобразования и интегралов движения, центробежный потенциал в сферически симметричных полях, инкремент угла вращения при повороте от перигентра к апоцентру.

4. Инерциальные системы и функция Лагранжа свободной частицы

В инерциальных системах свободная частица движется по инерции поступательно, равномерно и прямолинейно. В ньютоновой механике переход из одной инерциальной системы в другую описывается преобразованием Галилея:

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r} + \mathbf{v}_a t, \quad t_a = t, \quad (1.22)$$

где \mathbf{v}_a — скорость движения одной инерциальной системы относительно другой. Законы движения не меняются при переходе от одной инерциальной системы к другой.

Рассмотрим свободную частицу. В силу однородности пространства импульс частицы сохраняется и согласно уравнениям Эйлера–Лагранжа функция Лагранжа свободной частицы не зависит от координат. Аналогично из однородности времени следует, что сохраняется энергия, а функция Лагранжа не зависит явно от времени, т.е. для свободной частицы $L_0 = L(\mathbf{v})$. Из изотропности пространства следует, что вид функции Лагранжа не зависит от направления скорости, т.е. функция Лагранжа свободной частицы зависит только от квадрата скорости $L(\mathbf{v}) \mapsto \tilde{L}(v^2)$. Более того, для определения явного вида этой функции можно без ограничения общности считать, что частица движется вдоль оси x и преобразование Галилея выполняется также вдоль той же оси.

Тогда по теореме Нётер (1.17) изменение действия при переходе к другой инерциальной системе примет вид

$$\frac{dS}{dv_a^x} = \int dt \frac{d}{dt} \{p_x t\} = \int dt p_x,$$

где мы учли закон сохранения импульса свободной частицы: $dp_x/dt = 0$.

Уравнения движения при переходе в другую инерциальную систему не меняются. Эти уравнения получаются при вариации действия при фиксированных концах, а значит, уравнения после преобразования Галилея останутся прежними, если только изменение dS/dv_a^x сведется к значениям динамических переменных на концах траектории. Это возможно, если подинтегральное выражение есть полная производная по времени, т.е.

$$p_x = \frac{df_x}{dt}.$$

Однако, поскольку импульс свободной частицы является только функцией скорости, как это следует из определения $p_x = \partial L/\partial v^x$ с учетом того, что функция Лагранжа свободной частицы зависит только от квадрата скорости, то функция f_x может зависеть только от координат, так как

$$\frac{df_x}{dt} = \frac{\partial f_x}{\partial t} + \frac{\partial f_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial f_x}{\partial v_x} \dot{v}_x + \dots$$

В этом разложении ненулевыми могут быть только два первых члена, потому что остальные вклады зависят от высших производных скорости, что исключено, так что f_x может зависеть только от координаты и времени. Величину $\partial f_x/\partial t$ полагают тождественно равной нулю, так как ее ненулевое значение отвечало бы величине импульса частицы при нулевой скорости самой частицы, так что ненулевой вектор импульса при нулевой скорости нарушал бы принцип изотропности пространства из-за наличия выделенного направления в изотропном пространстве⁶. Тогда частная производная $\partial f_x/\partial x$ зависит от координат, но это может быть согласовано с условием зависимости импульса свободной частицы только от скорости, только если эта частная производная — постоянное число, $\partial f_x/\partial x = \text{const}$. Эту постоянную называют инерциальной массой частицы, m , и, при этом, полагают, что эта величина является вещественной и положительной: выбор положительного, а не отрицательного знака массы является условным и он считается удобным при описании других динамических свойств (см. ниже), а вот вещественность массы имеет принципиальное значение, которое мы подчеркнем при обсуждении вероятности достоверности траектории частицы.

Итак, однородность пространства и времени вместе с изотропией пространства и явным видом преобразований Галилея при переходе от одной инерциальной системы к другой по теореме Нётер однозначно определяют явный вид импульса частицы

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad (1.23)$$

а значит, и явный вид функции Лагранжа свободной частицы

$$L_0 = \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2, \quad (1.24)$$

как решения уравнения⁷ $\partial L_0/\partial \mathbf{v} = \mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

При введении взаимодействия эквивалентность инерциальных систем требует в простейшем случае, чтобы к функции Лагранжа добавлялись вклады, зависящие только от относительных расстояний и времени в системе, $L_0 \mapsto L = L_0 - U(\mathbf{r} - \mathbf{r}_*, t - t_*)$, где звездочкой помечены параметры источника сил. Функцию U называют потенциалом.

Заметим, что в частном случае масса может быть равной нулю. Тогда мы видим, что принцип относительности Галилея для инерциальных систем приводил бы к значениям импульса и энергии, тождественно равным нулю для частиц с нулевой массой, т.е. к отсутствию всякого движения безмассовых частиц. Однако в природе существует движение частиц с нулевой массой, например, движение частиц света и переносчиков гравитационного взаимодействия — гравитонов. Это означает, что необходимо ввести принцип относительности, отличный от принципа относительности Галилея, так, чтобы принцип относительности Галилея являлся бы предельным случаем для массивных частиц, т.е. когда вклад в кинетическую энергию и импульс, получаемых из принципа относительности Галилея, являлся бы доминирующим в кинетической энергии и импульсе свободных частиц, значения которых получаются из более общего принципа относительности, имеющего силу и для массивных, и для безмассовых частиц. Этот принцип — постулат релятивистской теории относительности, который находится вне рамок излагаемого сейчас материала.

⁶ Изотропный вектор тождественно равен нулю.

⁷ Константа интегрирования C_L приведет к изменению действия $\Delta S = C_L \int dt$, что сводится к члену, зависящему только от концов траектории $\Delta S = C_L(t' - t_0)$, и при выводе уравнений движения при вариации траектории с фиксированными концами дает нулевой вклад. Из определения энергии (1.21) следует, что C_L дает сдвиг начала отсчета энергии E , а значит, прескрипция для начала отсчета энергии никак не влияет на уравнения движения в классической нерелятивистской механике.

5. Амплитуда вероятности и постоянная действия

Рассмотрим пучок n траекторий в малой окрестности «истинной» траектории, т.е. траектории, удовлетворяющие уравнениям движения с фиксированными концами, заданными с бесконечно малой погрешностью. Для этого узкого пучка траекторий действие экстремально. Определим вероятность достоверности для траектории из этого пучка, как интенсивность средней амплитуды вероятности:

$$\mathcal{W} = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Psi_k \right|^2 = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp \left\{ \frac{1}{\kappa} S_k \right\} \right|^2,$$

где мы использовали определение действия как логарифма амплитуды вероятности достоверности классической траектории. В силу экстремальности действия и бесконечно малой неопределенности пучка траекторий, действие на каждой такой траектории принимает значение в экстремуме, т.е.

$$S_k = S_{\text{ext.}},$$

а значит,

$$\mathcal{W} = \left| \exp \left\{ \frac{1}{\kappa} S_{\text{ext.}} \right\} \right|^2.$$

По построению, вероятность «прямой» классической траектории равна единице,

$$\mathcal{W} = 1,$$

откуда следует, что аргумент экспоненты в формуле для вероятности является *чисто мнимым*. В частности, для свободных частиц действие зависит от одного параметра – массы частицы, так что если принять универсальное условие, что все массы являются вещественными и положительными, то само действие будет вещественным, а экстремальное условие для действия будет означать, что экстремум — это **минимум** действия⁸. При этом постоянная κ будет чисто мнимой величиной. Ясно, что в амплитуду вероятности входит лишь отношение массы к постоянной κ , так что комплексная фаза в определении массы должна быть в точности компенсирована ровно такой же фазой постоянной κ . В итоге, условились считать, что

$$\kappa = -i\hbar, \quad (1.4)$$

где \hbar — положительная постоянная Планка $h/2\pi$.

При включении взаимодействий вероятность достоверности «истинной» классической траектории останется равной единице, а следовательно, действие должно всегда оставаться *вещественным*, $S \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим теперь узкий пучок из n траекторий вблизи центральной траектории, которая не удовлетворяет принципу наименьшего действия. Это значит, что при усреднении амплитуды вероятности в пучке

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp \left\{ \frac{1}{\kappa} S_k \right\}$$

происходит суммирование комплексных чисел с единичным модулем и хаотически меняющейся фазой, поскольку действие существенно меняется от траектории к траектории в таком пучке, а так как средние значения синуса и косинуса равны нулю и $\exp\{i\alpha\} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, мы найдем, что и средняя амплитуда для такого пучка траекторий обращается в нуль, чего и следовало ожидать. Это утверждение справедливо, конечно, если изменение фазы с необходимостью охватывает хотя бы период в 2π , что заведомо будет иметь место, если $|S_k|/\hbar \gg 2\pi$, что и составляет критерий применимости классической механики в приведенном рассмотрении. Кроме того, в общем случае нужно еще рассмотреть ширину трубки траекторий при вариации действия второго порядка малости в сравнении с фазой «квантовой» амплитуды: если квантовые флуктуации существенно меньше ширины трубки за счет погрешности измерений приборов, то динамика вполне может описываться классическими траекториями.

Итак, мы установили, что на узких пучках «прямых» траекториях вероятность достоверности классической траектории равна единице, а на пучках не «экстремальных» траекторий вероятность достоверности обращается в нуль.

⁸Первая вариация действия на экстремальной траектории равна нулю, в то время как вторая вариация в случае свободной частицы сводится к виду

$$\delta^2 S = \int \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 L_0}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} \delta v^\alpha \delta v^\beta dt = \frac{1}{2} m \int (\delta v)^2 dt > 0.$$

так что малые вариации возле экстремума увеличивают значение действия, и экстремум действительно является минимумом.

В оптике электромагнитное излучение характеризуется частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k} = \mathbf{e}2\pi/\lambda$, где λ — длина волны, и $\omega = c|\mathbf{k}|$, где c — скорость света. В пределе геометрической оптики интенсивность электромагнитной волны, например, квадрат электрического поля с вектором поляризации \mathbf{e} , принимает вид

$$|\mathcal{E}|^2 = \varepsilon^2 \left| \exp \left\{ i \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} - \omega dt \right\} \right|^2,$$

где эйконал

$$\varphi = \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} - \omega dt$$

удовлетворяет условию экстремальности луча: $\delta\varphi/\delta\mathbf{r}(t) = 0$, и при этом, лучи в геометрической оптике имеют физический смысл траекторий корпускул света, т.е. фотонов, для которых можно записать вероятность достоверности траектории в терминах действия

$$|\Psi|^2 = \left| \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} - E dt \right\} \right|^2.$$

Естественно положить, что интенсивность волны в пределе геометрической оптики и вероятность достоверности траекторий пропорциональны друг другу (гипотеза де Бройля: $\varphi = S/\hbar$), откуда сразу следует связь частоты и волнового вектора с энергией и импульсом фотона,

$$E = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}, \quad (1.25)$$

так что из данных фотоэффекта устанавливается, что \hbar действительно постоянная Планка с чертой.

Заметим, что свободные фотоны обладают ненулевыми значениями кинетической энергии и импульса, закон дисперсии которых, т.е. связь энергии с импульсом, $E^2 = c^2\mathbf{p}^2$, отличается от закона дисперсии свободных нерелятивистских частиц с массой, $E = \mathbf{p}^2/2m$. Это — пример закона дисперсии для частиц с нулевой массой: такие частицы не удовлетворяют принципу относительности Галилея для инерциальных систем.

6. Гамильтонова механика

6.1. Уравнения Гамильтона–Якоби

Принимая во внимание интегралы движения, которые получаются из теоремы Нётер согласно однородности пространства и времени, т.е. импульс p и энергию E , перейдем от пары лагранжевых переменных $\{q, \dot{q}\}$ к гамильтоновым $\{q, p\}$, а также совершим преобразование Лежандра и введем функцию Гамильтона

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \Big|_{\dot{q} \rightarrow p}, \quad (1.26)$$

или в многомерном случае, когда $p_\alpha = \partial L / \partial \dot{r}^\alpha$,

$$H = p_\alpha \dot{r}^\alpha - L. \quad (1.27)$$

В частности, при

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - U(\mathbf{r}) \quad (1.28)$$

находим

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{r}). \quad (1.29)$$

При нулевом потенциале имеется только вклад свободной частицы, который называют кинетической энергией $K = L_0 = \mathbf{p}^2/2m$.

Действие можно теперь переписать в виде

$$S = \int L dt = \int \{p \dot{q} dt - H dt\} = \int_{t_0, q_0}^{t, q} p' dq' - H dt',$$

откуда сразу получаем уравнения Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H,$$

или в многомерном случае, когда

$$S = \int_{t_0, \mathbf{r}_0}^{t, \mathbf{r}} p_\alpha dr^\alpha - H dt,$$

установим

$$\partial_\alpha S = p_\alpha, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H. \quad (1.30)$$

6.2. Уравнения Гамильтона

Прямое вычисление производных функции Гамильтона дает, во-первых,

$$\partial_\beta H = \partial_\beta \{p_\alpha \dot{r}^\alpha - L\} = -\partial_\beta L = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^\alpha} = -\dot{p}_\beta,$$

а во-вторых,

$$\frac{\partial H}{\partial p_\beta} = \frac{\partial}{\partial p_\beta} \{p_\alpha \dot{r}^\alpha - L\} = \dot{r}^\beta + p_\alpha \frac{\partial \dot{r}^\alpha}{\partial p_\beta} - \frac{\partial L}{\partial p_\beta},$$

и в силу определения импульса,

$$\frac{\partial L}{\partial p_\beta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^\alpha} \frac{\partial \dot{r}^\alpha}{\partial p_\beta} = p_\alpha \frac{\partial \dot{r}^\alpha}{\partial p_\beta}$$

что приводит к уравнениям Гамильтона

$$\frac{\partial H}{\partial p_\beta} = \dot{r}^\beta, \quad \partial_\beta H = -\dot{p}_\beta. \quad (1.31)$$

В случае нерелятивистской функции Лагранжа вида (1.28) получаем

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\partial U(\mathbf{r}). \quad (1.32)$$

6.3. Скобки Пуассона

На «фазовой плоскости» (\mathbf{p}, \mathbf{r}) динамические уравнения для произвольной наблюдаемой $F(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial r^\alpha} \dot{r}^\alpha + \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha,$$

можно преобразовать с помощью уравнений Гамильтона (1.31) к виду

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial r^\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial r^\alpha},$$

так что, если ввести определение скобки Пуассона для двух величин на фазовой плоскости

$$\{F, H\}_P = \frac{\partial F}{\partial r^\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial r^\alpha}, \quad (1.33)$$

то уравнение движение примет вид

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}_P. \quad (1.34)$$

Скобка Пуассона координаты и сопряженного к ней импульса $p = \partial L / \partial \dot{q}$ как независимых переменных легко вычисляется и дает единицу:

$$\{q, p\}_P = \frac{\partial q}{\partial q} \frac{\partial p}{\partial p} - \frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial q} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1. \quad (1.35)$$

Такая пара, как говорят, обладает каноническими скобками Пуассона, а потому и саму пару называют канонически сопряженными переменными на фазовой плоскости.

Задача 1. С помощью скобок Пуассона на фазовой плоскости (p, q) найдите уравнение движения для величины $x = q - t \cdot p/m$. Какой физический смысл имеет этот интеграл движения?

6.4. Канонические преобразования

Совершим преобразование координат от переменных q к переменным $Q = Q(q, t)$ так, чтобы в новых переменных можно было сформулировать гамильтонову механику на фазовой плоскости канонически сопряженных переменных (P, Q) вместо канонически сопряженных переменных (p, q) с прежними траекториями. Это означает, что в новых переменных также имеет место принцип наименьшего действия $S'(t, Q)$, которое связано со старым действием $S(t, q)$ и может отличаться от него лишь граничными членами, которые не дают вклада в уравнения движения, поскольку вариация действия происходит при фиксированных концах, т.е.

$$S(t, q) = S'(t, Q) + \int^{t, q, Q} dF(t, q, Q),$$

или, что то же,

$$\int^{t, q} p dq - H dt = \int^{t, Q} P dQ - H' dt + \int^{t, q, Q} dF(t, q, Q). \quad (1.36)$$

Производящая функция канонического преобразования F должна удовлетворять тождеству (1.36), а следовательно,

$$dF = p dq - P dQ + \frac{\partial F}{\partial t} dt, \quad (1.37)$$

и, значит,

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad p = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q}. \quad (1.38)$$

Эти соотношения позволяют неявно исключить старые канонически сопряженные переменные (p, q) и перейти к новым (P, Q) .

Действительно, вычислим скобку Пуассона новых переменных на фазовой плоскости старых переменных,

$$\{Q, P\}_P = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q}.$$

Из (1.38) следует, что

$$dp = \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial q} dq + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} dQ + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial t} dt, \quad dP = -\frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q} dq - \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial Q} dQ - \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial t} dt,$$

откуда находим

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = -\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial q} \cdot \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} \right)^{-1}, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} \right)^{-1}, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = -\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q}, \quad \frac{\partial P}{\partial p} = 0,$$

что, в итоге, дает каноническое значение скобок Пуассона

$$\{Q, P\}_P = 1.$$

Таким образом, новые переменные являются канонически сопряженными и, действительно, задают фазовую плоскость.

§а. Генераторы бесконечно малых канонических преобразований

В качестве производящей функции канонических преобразований наряду с $F(q, Q, t)$ можно выбрать и функцию от двух других канонических переменных, например, $G(q, P, t)$. Тогда требование отличия действия в разных координатах в виде полного дифференциала совершенно аналогично проведенному нами выше рассмотрению приведет к условиям:

$$S(t, q) = S'(t, Q) + \int^{t, q, P} dG(t, q, P) - \int d(QP),$$

а стало быть,

$$dG = p dq + Q dP + \frac{\partial G}{\partial t} dt, \quad (1.39)$$

и, значит,

$$H' = H + \frac{\partial G}{\partial t}, \quad p = \frac{\partial G}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial G}{\partial P}. \quad (1.40)$$

Если

$$G \mapsto G_I = qP,$$

то имеет место тождественное преобразование: $q \mapsto Q = q$, $p \mapsto P = p$.

Рассмотрим бесконечно малое каноническое преобразование, $\epsilon \rightarrow 0$,

$$G(q, P, t) \approx qP + \epsilon \Gamma(q, p, t), \quad (1.41)$$

где *генератор канонического преобразования* $\Gamma(q, p, t)$ в линейном приближении по $\epsilon \rightarrow 0$ можно считать зависящим уже от прежнего импульса, так как согласно каноническому преобразованию

$$p \approx P + \epsilon \frac{\partial \Gamma}{\partial q}, \quad Q \approx q + \epsilon \frac{\partial \Gamma}{\partial p}.$$

Значит, бесконечно малые изменения выражаются в виде скобок Пуассона

$$\delta q = Q - q \approx \epsilon \{q, \Gamma\}_P, \quad \delta p = P - p \approx \epsilon \{p, \Gamma\}_P. \quad (1.42)$$

Отсюда следует, что и любая физическая величина на фазовой плоскости изменяется согласно скобке Пуассона с генератором бесконечно малых канонических преобразований:

$$\delta f(q, p) = \epsilon \{f, \Gamma\}_P. \quad (1.43)$$

В частности, канонический импульс — генератор бесконечно малых сдвигов координаты: $\Gamma = p$ дает $P = p$, $Q = q + \epsilon$. Выбор $\Gamma = H(q, p, t)$ при $\epsilon = \delta t$ дает $\delta f = \delta t \{f, H\}_P$, т.е. функция Гамильтона — генератор сдвигов физических величин по времени, другими словами, генератор эволюции.

Мы установили, что если генератор канонических преобразований — сохраняющаяся величина, то сами эти преобразования образуют симметрию физической системы. Более того, скобки Пуассона сохраняющихся величин определяют алгебру генераторов симметрии физической системы.

Задача 2. Рассмотреть в качестве генератора канонического преобразования проекцию вектора орбитального момента импульса $\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, скажем, на ось z и найти вид бесконечно малых канонических преобразований — вращения координат и импульса вокруг оси z на угол ϵ .

§b. Метод решения уравнений Гамильтона–Якоби

В качестве примера применения канонического преобразования приведем метод решения уравнений Гамильтона–Якоби (1.30). Основной объект этих уравнений — действие — зависит от концов траектории: $S = S(t, q; q_0)$. При изменении интервала эволюции, т.е. t , и конца траектории q , начальные данные, т.е. $q_0 = q(t_0)$ остаются неизменными, а значит, начальное положение траектории эквивалентно набору интегралов движения $I_0 \leftrightarrow q_0$. Следовательно, решение уравнений Гамильтона–Якоби может быть представлено в виде $S = S_I(t, q; I_0)$, а значит, по-прежнему

$$\frac{\partial S_I}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial S_I}{\partial t} = -H.$$

Используем S_I в качестве производящей функции канонического преобразования $F = F(q, I_0, t)$ от координат q к координатам I_0 (их число заведомо совпадает по построению). Тогда гамильтониан в координатах I_0 и канонически сопряженных к ним импульсах по общей схеме равен

$$H' = H + \frac{\partial S_I}{\partial t} \equiv 0,$$

т.е. он тождественно равен нулю. Отсюда следует, что импульсы, канонически сопряженные к I_0 , также являются постоянными в силу уравнений Гамильтона,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial I_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial I_0} = \text{const.}$$

В проведенном изложении ясно, что если интеграл движения совпадает с начальным значением одной из координат частиц, то каноническое преобразование становится тривиальным для этой координаты: оно не содержит в себе никакой новой информации. Поэтому сам метод становится эффективным, если известны интегралы движения, отличные от начальных значений координат частиц.

Проиллюстрируем этот метод решения уравнений Гамильтона–Якоби на движении в сферически симметричном потенциале.

6.5. Сферически симметричный потенциал

Для консервативной системы сферически симметричный потенциал зависит только от модуля расстояния от центра до частицы и не зависит ни от направления радиус-вектора, ни от времени: $U = U(r)$. Это значит, что функция Гамильтона

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(r)$$

обладает симметрией относительно сдвигов по времени и вращений вокруг центра потенциала. Этой же симметрией обладает и функция Лагранжа, и следовательно, действие. Как мы уже установили ранее, согласно теореме Нётер в такой системе сохраняются энергия E и момент количества движения $\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$.

В терминах момента количества движения кинетическую энергию можно в базисе сферических координат разложить на вращение, ортогонально радиус-вектору \mathbf{r} , и движение по радиус-вектору:

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} = \frac{mv_{\perp}^2}{2} + \frac{m\dot{r}^2}{2} = \frac{\ell^2}{2mr^2} + \frac{p_r^2}{2m},$$

поскольку $\ell^2 = m^2 r^2 v_{\perp}^2$. Для определенности направим вектор ℓ вдоль оси z . Тогда при $\ell \neq 0$ движение происходит в плоскости, ортогональной вектору ℓ , т.е. зависят от времени только r и угол ϕ в сферических координатах, так что

$$v_{\perp} = r\dot{\phi}, \quad \ell_z = mr^2\dot{\phi}, \quad \ell_z = \frac{1}{2mr^2} \frac{\partial \ell_z^2}{\partial \dot{\phi}},$$

угол $\theta = \text{const.}$, и мы считаем, что для простоты он принимает значение $\theta = \frac{\pi}{2}$, т.е. все движение происходит в плоскости координат (x, y) . Тогда уравнения Гамильтона–Якоби дают законы сохранения, т.е. интегралы движения:

$$\frac{\partial S}{\partial \phi} = \ell_z = \ell, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -E,$$

а также $\partial S / \partial r = p_r$, откуда

$$H = \frac{\ell^2}{2mr^2} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + U(r) = E.$$

Потенциал движения по радиусу $V(r)$ включает в себя центробежный потенциал $U_l(r)$,

$$V(r) = U(r) + U_l(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}. \quad (1.44)$$

В итоге, действие как функция времени, угла, радиуса и интегралов движения примет вид

$$S = -Et + \ell\phi + \tilde{S}(r) + S_0, \quad (1.45)$$

где производная $\tilde{S}' = d\tilde{S}/dr$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\tilde{S}' \right)^2 = 2m \left(E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right), \quad (1.46)$$

откуда

$$\tilde{S} = \pm \int^r dr \sqrt{2m \left(E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}. \quad (1.47)$$

Дифференцирование действия по интегралам движения дает константы,

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \text{const.}, \quad \frac{\partial S}{\partial \ell} = \text{const.},$$

откуда из (1.45)–(1.47)

$$-t \pm \int^r dr \frac{m}{\sqrt{2m \left(E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}} = \text{const.}, \quad \phi \mp \int^r dr \frac{\ell}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m \left(E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}} = \text{const.}$$

Производная этих равенств по времени дает скорости

$$1 = \pm \dot{r} \frac{m}{\sqrt{2m \left(E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}}, \quad \dot{\phi} = \pm \dot{r} \frac{\ell}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m \left(E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}}. \quad (1.48)$$

Точки поворота для радиального движения задаются условием $p_r = 0$,

$$E = U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}.$$

За время движения от одной точки поворота до другой ($r_+ > r_-$, апоцентр орбиты отвечает r_+ , а перигецентр — r_-) инкремент угла вращения составляет

$$\Delta\phi = \int_{r_-}^{r_+} dr \frac{\ell}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m \left(E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}}. \quad (1.49)$$

Лекция № 3

Инкремент угла вращения от перигецентра до апоцентра для замкнутой орбиты, бесконечно близкой к круговой, исследование критерия замкнутости любой финитной орбиты, инкремент угла поворота орбиты для бесконечно большой и нулевой энергии, траектория в кулоновском потенциале при ненулевом моменте импульса, эксцентриситет и его значения для эллипса, гиперболы и параболы, задача Кеплера, дифференциальное сечение Резерфордского рассеяния и зеркального рассеяния на непроницаемом шаре, параметры эллипса при движении в поле изотропного гармонического осциллятора, среднее значение наблюдаемой по времени и ее производной по времени для финитного движения, теорема вириала.

7. Замкнутые финитные орбиты

Финитная орбита замкнута, если после счетного числа поворотов от перигецентра до перигецентра получится конечное число полных оборотов, т.е. при

$$2\Delta\phi \cdot n = 2\pi \cdot n', \quad n, n' \in \mathbb{N}, \quad (1.50)$$

где инкремент угла поворота при движении от перигецентра к апоцентру (см. рис. 1.3) $\Delta\phi$ составляет, согласно (1.49), величину

$$\Delta\phi = \int_{r_-}^{r_+} dr \frac{\ell}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m(E - V(r))}}, \quad V(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}. \quad (1.51)$$

Для круговой орбиты точки поворота становятся идентичными, $r_{\pm} \rightarrow r_0$, где r_0 — радиус круговой орбиты, для которого потенциал $V(r)$, включающий в себя потенциал центробежных сил, имеет экстремум в виде минимума,

$$V'(r_0) = 0 \Rightarrow U'(r_0) - \frac{\ell^2}{mr_0^3} = 0, \quad (1.52)$$

$$V''(r_0) > 0 \Rightarrow U''(r_0) + 3\frac{\ell^2}{mr_0^4} = U''(r_0) + \frac{3}{r_0} U'(r_0) > 0. \quad (1.53)$$

Для орбиты, бесконечно близкой к круговой, движение по радиусу происходит в параболическом потенциале, который получается при разложении $V(r)$ возле точки минимума потенциала r_0 с точностью до членов второго порядка малости отклонения от положения минимума,

$$\Delta\phi_{\text{circ}} = \lim_{r_{\pm} \rightarrow r_0} \int_{r_-}^{r_+} dr \frac{\ell}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m \left(E - V(r_0) - \frac{1}{2} V''(r_0)(r - r_0)^2 \right)}}, \quad E > V(r_0).$$

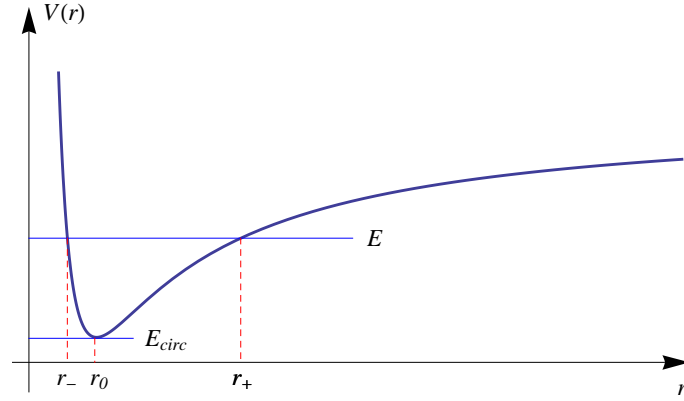


Рис. 1.3: Потенциал радиального движения при фиксированном значении орбитального момента импульса: показаны точки поворота r_{\pm} и радиус круговой орбиты r_0 .

В пределе можно считать $\ell/r^2 \rightarrow \ell/r_0^2$, так что

$$\Delta\phi_{\text{circ}} = \frac{\ell}{r_0^2} \frac{1}{\sqrt{2m(E - V(r_0))}} \lim_{r_{\pm} \rightarrow r_0} \int_{r_-}^{r_+} dr \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{V''(r_0)}{2(E - V(r_0))}(r - r_0)^2\right)}},$$

и подстановка

$$r - r_0 = \sqrt{\frac{2(E - V(r_0))}{V''(r_0)}} \sin x, \quad x \in [0, \pi],$$

дает

$$\Delta\phi_{\text{circ}} = \frac{\ell}{r_0^2} \frac{1}{\sqrt{mV''(r_0)}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}},$$

и в итоге,

$$\Delta\phi_{\text{circ}} = \frac{\ell}{r_0^2} \frac{\pi}{\sqrt{mV''(r_0)}} = \pi \sqrt{\frac{U'(r_0)}{r_0 U''(r_0) + 3U'(r_0)}}, \quad (1.54)$$

где мы воспользовались тождествами (1.52), (1.53). Последнее выражение не зависит явно от орбитального момента ℓ .

7.1. Замкнутость любой финитной орбиты

Рассмотрим центральные потенциалы консервативных систем, в которых существуют финитные орбиты и *все они замкнуты*⁹. В этом случае, в частности, круговая орбита как предел бесконечно близкой к ней орбите тоже замкнута, так что

$$\Delta\phi_{\text{circ}} = \pi \frac{n'}{n} = \text{const.},$$

и эта величина не зависит от радиуса, так как в противном случае малое изменение радиуса вращения приводило бы к скачку в значениях натуральных чисел n и n' , что означало бы наличие хаоса: бесконечно малое изменение траектории приводило бы к существенному изменению параметров орбиты. Найдем все такие потенциалы с $\Delta\phi_{\text{circ}} = \text{const.}$ Из (1.54) следует

$$U' = C(rU'' + 3U'), \quad C \geq 0,$$

откуда

$$C \frac{dU'}{U'} = (1 - 3C) \frac{dr}{r},$$

⁹В этом разделе мы, по сути, следуем изложению в курсе классической механики В.И. Арнольда [3].

а значит,

$$U' = C_0 r^{1/C-3},$$

так что при $C = \frac{1}{2}$

$$U(r) = C_l \ln r, \quad C_l > 0, \quad (1.55)$$

а при $C \neq \frac{1}{2}$

$$U(r) = U_C r^{1/C-2} = U_C r^\varkappa \quad \varkappa \in [-2, +\infty) \cap \varkappa \neq 0. \quad (1.56)$$

Здесь $U_C > 0$ при $\varkappa > 0$ и $U_C < 0$ при $\varkappa < 0$. Поэтому к искомым потенциалам относятся только однородные функции радиуса степени \varkappa , включая нулевую степень однородности, $\varkappa \rightarrow 0$, что отвечает логарифмическому потенциалу. Для таких потенциалов

$$\frac{U'(r_0)}{r_0 U''(r_0) + 3U'(r_0)} = \frac{1}{\varkappa + 2},$$

и согласно (1.54),

$$\Delta\phi_{\text{circ}} = \pi \frac{1}{\sqrt{\varkappa + 2}}, \quad (1.57)$$

что уже сильно ограничивает значения степени однородности потенциала,

$$\varkappa = \left(\frac{n}{n'}\right)^2 - 2,$$

в частности, выпадает $\varkappa = 0$, т.е. логарифмический потенциал.

При $\varkappa > 0$ потенциал растет до бесконечности, так что имеет смысл предел $E \rightarrow \infty$. Произведем замену переменных

$$\frac{\ell}{r} = y \frac{\ell}{r_-}, \quad y_- = 1, \quad y_+ = \frac{r_-}{r_+} < 1,$$

так что, согласно (1.49),

$$\Delta\phi = \int_{y_+}^1 dy \frac{\ell}{r_-} \frac{1}{\sqrt{2m \left(E - U(r) - y^2 \frac{\ell^2}{2mr_-^2} \right)}} = \int_{y_+}^1 dy \frac{1}{\sqrt{W(1) - W(y)}}, \quad (1.58)$$

где

$$W(y) = y^2 + 2m \frac{r_-^2}{\ell^2} U\left(\frac{r_-}{y}\right), \quad W(1) = 2mE \frac{r_-^2}{\ell^2}.$$

При $E \rightarrow \infty$ радиус перицентра стремится к нулю, $r_- \rightarrow 0$, так что

$$W(1) \rightarrow 1, \quad W(y) \rightarrow y^2,$$

и следовательно,

$$\Delta\phi = \lim_{y_+ \rightarrow 0} \int_{y_+}^1 dy \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Это означает, что среди однородных растущих потенциалов, условию замкнутости всех финитных орбит удовлетворяет только тот, для которого

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa + 2}},$$

т.е. только $\varkappa = 2$. Это потенциал гармонического осциллятора.

При $\varkappa < 0$ замкнутые орбиты возникают только в потенциале $U = -|U_C| r^\varkappa$, для которого реализуются орбиты с $E \rightarrow 0$. В этом случае (1.58) при $r_- \neq 0$ дает

$$\Delta\phi = \int_0^1 dy \frac{1}{\sqrt{W(1) - W(y)}}, \quad (1.59)$$

где

$$W(1) = 0 = 1 - 2m \frac{r^2}{\ell^2} |U_C| \left(\frac{r_-}{y} \right)^\varkappa \Rightarrow W(y) = y^2 - y^{-\varkappa},$$

так что

$$\Delta\phi = \int_0^1 dy \frac{1}{\sqrt{y^{-\varkappa} - y^2}}. \quad (1.60)$$

При $\varkappa = -2$ орбита падает на центр. Если же $-2 < \varkappa < 0$, то (1.60) дает¹⁰

$$\Delta\phi = \frac{\pi}{2 + \varkappa},$$

что следует сравнить со значением инкремента угла для орбит, бесконечно близких к круговым:

$$\frac{\pi}{2 + \varkappa} = \frac{\pi}{\sqrt{2 + \varkappa}},$$

откуда $\varkappa = -1$, что отвечает притяжению в поле кулоновского типа.

Таким образом, мы установили, что сферически симметричными потенциалами, для которых все финитные орбиты замкнуты, являются только потенциалы гармонического осциллятора и кулоновский или гравитационный потенциал.

Задача 3. Покажите, что в потенциале притяжения вида $U \sim -1/r^2$ частица падает на центр. При каком условии?

8. Движение в кулоновском поле

В кулоновском поле заряда Ze частица с зарядом e имеет потенциальную энергию

$$U(r) = \frac{Ze^2}{r},$$

так что при ненулевом орбитальном моменте импульса¹¹, $\ell \neq 0$, общее выражение для связи полярного угла на плоскости с радиусом на траектории принимает вид

$$\phi(r) = \int^r dr \frac{\ell}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m \left(E - \frac{Ze^2}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}}, \quad (1.61)$$

что после замены переменных

$$u = \frac{\ell}{r} \frac{1}{\sqrt{2mE + Z^2 m^2 e^4 / \ell^2}},$$

сводится к виду

$$\phi(r) = - \int^u du \frac{1}{\sqrt{1 - (u - u_0)^2}} = \arccos(u - u_0), \quad u_0 = -\frac{1}{\epsilon} \text{sign}(Z),$$

где

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2mE\ell^2}{Z^2 m^2 e^4}} \quad (1.62)$$

называют эксцентриситетом: в поле отталкивания, $Z > 0$, энергия на траектории положительна и $\epsilon > 1$, а в поле притяжения, $Z < 0$, энергия на траектории может принимать и отрицательные значения, но при этом она ограничена снизу

$$E \geq -\frac{Z^2 m^2 e^4}{2m\ell^2},$$

¹⁰ Интеграл (1.60) берется с использованием подстановки $y^{2+\varkappa} = \sin^2 \bar{y}$.

¹¹ При $\ell = 0$ частица движется только по радиусу.

так что минимальное значение отвечает минимуму эффективного потенциала радиального движения с учетом центробежного потенциала с заданным значением ℓ , т.е. круговой орбите.

В итоге, в общем случае как притяжения так и отталкивания найдем

$$\cos \phi = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\ell^2}{r} \frac{1}{me^2|Z|} + \text{sign}(Z) \right). \quad (1.63)$$

Обычно вводят параметр орбиты размерности расстояния

$$p_{\text{orb}} = \frac{\ell^2}{me^2|Z|} > 0, \quad (1.64)$$

и траектория записывается как

$$r = \frac{p_{\text{orb}}}{\epsilon \cos \phi - \text{sign}(Z)}, \quad (1.65)$$

откуда сразу видно, что траектория симметрична относительно замены знака угла $\phi \leftrightarrow -\phi$, а параметр орбиты имеет смысл расстояния от центра потенциала до частицы, когда $\phi = \pm\pi/2$.

С учетом того, что в плоскости траектории $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, кривую (1.65) можно записать в виде

$$x \frac{\epsilon}{p_{\text{orb}}} - \frac{r}{p_{\text{orb}}} \text{sign } Z = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(x \frac{\epsilon}{p_{\text{orb}}} - 1 \right)^2 = \frac{r^2}{p_{\text{orb}}^2} = \frac{x^2 + y^2}{p_{\text{orb}}^2},$$

что сводится к

$$\frac{1 - \epsilon^2}{p_{\text{orb}}^2} \left(x + \frac{\epsilon p_{\text{orb}}}{1 - \epsilon^2} \right)^2 + \frac{y^2}{p_{\text{orb}}^2} - \frac{\epsilon^2}{1 - \epsilon^2} = 1,$$

т.е.

$$\frac{(1 - \epsilon^2)^2}{p_{\text{orb}}^2} \left(x + \frac{\epsilon p_{\text{orb}}}{1 - \epsilon^2} \right)^2 + y^2 \frac{1 - \epsilon^2}{p_{\text{orb}}^2} = 1. \quad (1.66)$$

В итоге, в координатах

$$\bar{x} = x + \frac{\epsilon p_{\text{orb}}}{1 - \epsilon^2}, \quad \bar{y} = y, \quad (1.67)$$

с центром в точке \bar{O} с $\bar{x} = \bar{y} = 0$ траектория лежит на решениях уравнения (1.66), симметричного относительно зеркальных отражений $\bar{x} \leftrightarrow -\bar{x}$, $\bar{y} \leftrightarrow -\bar{y}$:

$$\bar{x}^2 \frac{(1 - \epsilon^2)^2}{p_{\text{orb}}^2} + \bar{y}^2 \frac{1 - \epsilon^2}{p_{\text{orb}}^2} = 1. \quad (1.68)$$

Решения квадратичного уравнения (1.66) являются коническими сечениями, т.е. множеством пересечения кругового конуса с плоскостью. Это следует из того, что конус в декартовых координатах представляет собой квадратичную поверхность,

$$\hat{a}^2 \hat{z}^2 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2,$$

где $\hat{a} = \text{tg} \theta_0$ — тангенс угла раствора конуса с осью вдоль оси \hat{z} , а плоскость — линейная поверхность. Если плоскость пересекает лишь одну из двух полостей конуса и все ее образующие, то коническое сечение — эллипс ($\epsilon < 1$), если плоскость пересекает одну из полостей параллельно касательной к полости, то сечение — парабола ($\epsilon = 1$), а если плоскость пересекает обе полости, то сечение — гипербола ($\epsilon > 1$). В вырожденных случаях получаются точка, луч и пара прямых.

8.1. Финитное движение (задача Кеплера)

В потенциале притяжения $\text{sign}(Z) = -1$ при $E < 0$, а значит, при $\epsilon < 1$

$$r = \frac{p_{\text{orb}}}{\epsilon \cos \phi + 1}, \quad (1.69)$$

и траектория является финитной.

Введем большую полуось как среднее максимального ($\cos \phi = -1$) и минимального ($\cos \phi = 1$) расстояния от центра до частицы

$$a = \frac{1}{2}(r_+ + r_-) = \frac{p_{\text{orb}}}{1 - \epsilon^2},$$

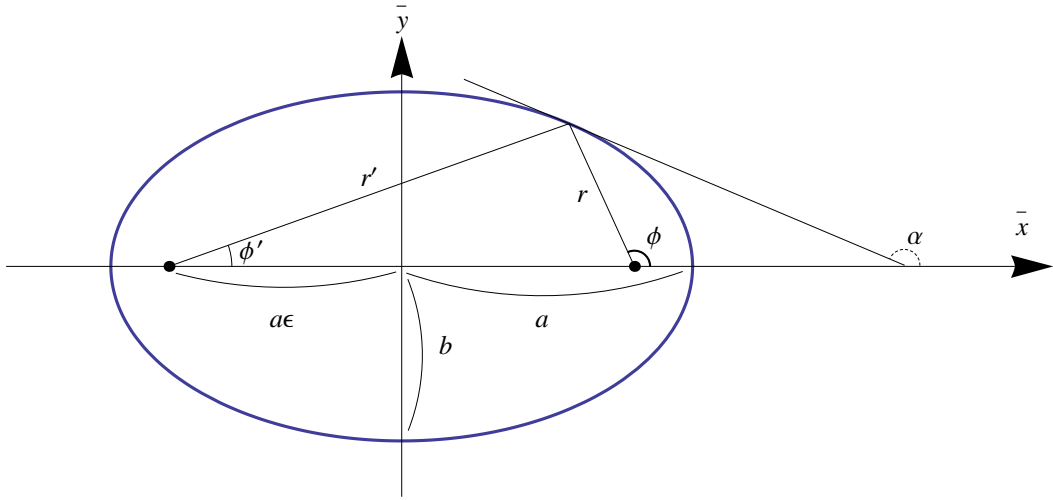


Рис. 1.4: Эллипс: фокусы обозначены точками, показаны касательная под углом α , полуоси a и b , расстояние сдвига фокуса от центра эллипса $a\epsilon$, а также полярные углы в фокусах ϕ и ϕ' .

а малую полуось как максимальное удаление по оси $y = r \sin \phi$ (экстремум достигается при $\cos \phi = -\epsilon$)

$$b = r \sin \phi|_{\max} = \frac{p_{\text{orb}}}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}.$$

Центр притяжения \mathcal{O} находится на плоскости с координатами $x = y = 0$. Произведем сдвиг по координате x , так чтобы новый центр координат $\bar{\mathcal{O}}$ находился на одном удалении от точек максимального и минимального удаления от центра притяжения:

$$\bar{x} = x - r_- + a = x + a\epsilon,$$

что в точности совпадает с введением симметричной координаты \bar{x} в предыдущем разделе. Тогда на плоскости с центром в $\bar{\mathcal{O}}$

$$\frac{\bar{x}}{a} = \frac{r \cos \phi}{a} + \epsilon = \frac{\cos \phi + \epsilon}{\epsilon \cos \phi + 1}, \quad \frac{y}{b} = \frac{r \sin \phi}{b} = \frac{\sin \phi}{\epsilon \cos \phi + 1} \sqrt{1 - \epsilon^2},$$

откуда легко находим уравнение эллипса с полуосями a и b ,

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1.70)$$

симметричное относительно отражений $\bar{x} \leftrightarrow -\bar{x}$, $y \leftrightarrow -y$. Это, между прочим, означает, что наряду с центром притяжения \mathcal{O} с координатами $(\bar{x} = a\epsilon, y = 0)$ у эллипса есть второй такой же центр \mathcal{O}' с координатами $(\bar{x} = -a\epsilon, y = 0)$, движение частицы вокруг которого совершенно идентично движению вокруг центра притяжения (см. рис. 1.4). Более того, эти центры притяжения являются фокусами эллипса: любой луч, исходящий из фокуса, после отражения от эллипса проходит через второй фокус¹².

Кроме того, сумма расстояний от точки на траектории до фокусов эллипса остается постоянной величиной:

$$r = \frac{p_{\text{orb}}}{\epsilon \cos \phi + 1}, \quad r' = \sqrt{(x + 2a\epsilon)^2 + y^2} \Rightarrow r + r' = 2a.$$

¹²В этом можно убедиться, если вычислить наклон касательной к эллипсу в точке $(r \cos \phi, r \sin \phi)$:

$$\text{tg } \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\phi} \sin \phi + r \cos \phi}{\frac{dr}{d\phi} \cos \phi - r \sin \phi} = -\frac{\cos \phi + \epsilon}{\sin \phi},$$

так что отраженный луч составит с осью x угол $\phi' = 2\alpha - \phi - \pi$. Вычисляя тангенс этого угла, убеждаемся, что он совпадает с тангенсом угла луча, который исходит из второго фокуса в ту же точку на эллипсе:

$$\text{tg } \phi' = \frac{y}{x + 2a\epsilon},$$

что и доказывает сделанное утверждение: все лучи из одного фокуса сходятся после зеркального отражения от эллипса во втором фокусе.

Это означает, что эллипс представляет собой фигуру, которая получается, если концы нити длиной $2a$ зафиксировать на расстоянии $2ae$ и объединить положение всех точек единственного излома на этой нити в натянутом состоянии.

Задача 4. Докажите, что любой луч, исходящий из фокуса эллипса, после зеркального отражения от эллипса проходит через второй фокус.

Задача 5. Докажите, что сумма расстояний от точки на траектории до фокусов эллипса остается постоянной величиной. Чему равна эта величина?

В случае гравитационного притяжения получаем законы Кеплера:

I. Планеты движутся вокруг центра притяжения по эллипсам.

II. Радиус траектории планеты «заметает площадь» с постоянной скоростью $\dot{S} = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$, что является следствием закона сохранения момента импульса $\ell = 2m\dot{S}$. \dot{S} называют секторальной скоростью.

III. Квадраты периодов обращения планет T соотносятся как кубы больших полуосей орбит a : $T^2/a^3 = \text{const}$.

В самом деле, площадь эллипса $S = \pi ab$, что проще всего вывести, взяв интеграл $S = \int d\bar{x}d\bar{y} = \frac{b}{a} \int d\bar{x}d\frac{a\bar{y}}{b} = \frac{b}{a} \pi a^2$, поскольку после смены масштаба переменной $\bar{y} \mapsto \bar{y}b/a$ уравнение для эллипса переходит в уравнение для окружности радиуса a , внутренняя площадь которого πa^2 . С другой стороны, в силу постоянства секторальной скорости $S = T\dot{S} = T\ell/2m$. Значит, $T = 2\pi ab/\ell$. По построению, в поле гравитации объекта с массой M параметр потенциала $Ze^2 = -GMm$, где G постоянная Ньютона, и $a = p_{\text{orb}}/(1 - \epsilon^2) = -GMm/2E$, откуда $mb/\ell = \sqrt{a/GM}$, так что

$$T = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Как видим, в механике достаточно знать первый закон Кеплера, чтобы вывести два других.

В вырожденном случае при $E \rightarrow 0$ эксцентриситет $\epsilon = 1$, и полуоси принимают бесконечные значения, второй фокус также уходит на бесконечность, а исходное выражение для траектории (1.65) принимает вид

$$x - r \text{sign}(Z) = p_{\text{orb}} \Rightarrow (x - p_{\text{orb}})^2 = r^2 = x^2 + y^2,$$

откуда находим уравнение для параболы,

$$y^2 = p_{\text{orb}}^2 - 2p_{\text{orb}}x. \tag{1.71}$$

8.2. Резерфордское рассеяние

При положительном значении энергии $E > 0$ эксцентриситет $\epsilon > 1$ и общее уравнение для траектории (1.66) преобразуется к виду

$$\frac{(1 - \epsilon^2)^2}{p_{\text{orb}}^2} \left(x + \frac{\epsilon p_{\text{orb}}}{1 - \epsilon^2} \right)^2 - y^2 \left| \frac{\epsilon^2 - 1}{p_{\text{orb}}^2} \right| = 1$$

и имеет решение в виде двух ветвей гиперболы: одна из ветвей отвечает притяжению

$$r = \frac{p_{\text{orb}}}{\epsilon \cos \phi + 1}, \quad \cos \phi \geq -\frac{1}{\epsilon} \tag{1.72}$$

и фокусом в точке $r = r_- = p_{\text{orb}}/(\epsilon + 1)$ при $\cos \phi = 1$, а другая ветвь — отталкиванию,

$$r = \frac{p_{\text{orb}}}{\epsilon \cos \phi - 1}, \quad \cos \phi \geq \frac{1}{\epsilon} \tag{1.73}$$

и фокусом в точке $r = r_+ = p_{\text{orb}}/(\epsilon - 1) > r_-$ при $\cos \phi = 1$.

Лучи, исходящие из фокуса, после зеркального отражения от гиперболы расходятся так, как если бы они исходили из второго фокуса, т.е. их продолжения за линию гиперболы сходятся во втором фокусе (см. рис. 1.5).

Частица, рассеивающаяся на кулоновском поле, приходит из бесконечности к центру потенциала под углом

$$\phi_{\text{in}} = \arccos \left(\frac{1}{\epsilon} \text{sign}(Z) \right).$$

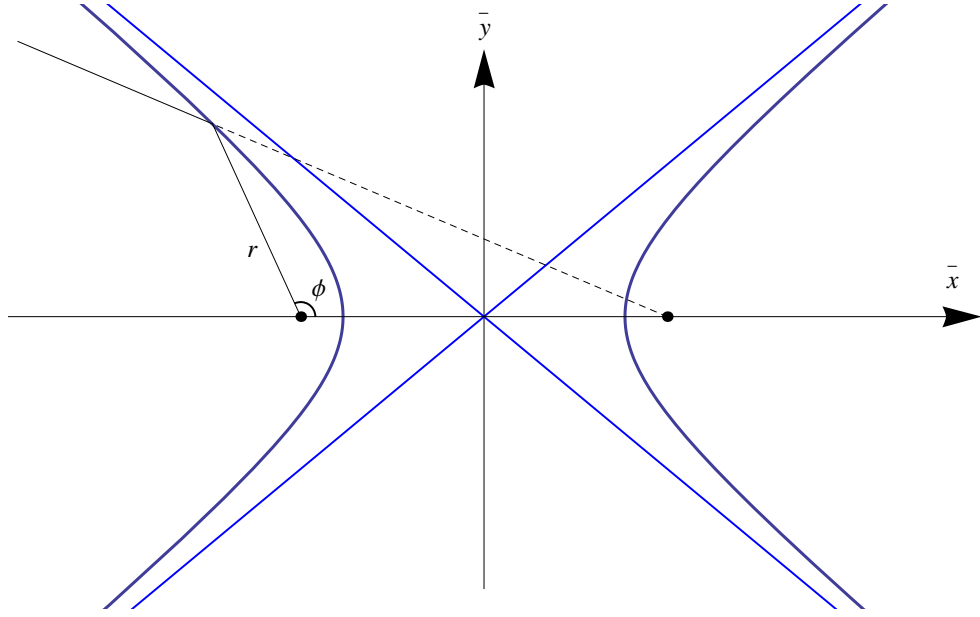


Рис. 1.5: Гиперболы кулоновского рассеяния: фокусы обозначены точками, показаны асимптотики гипербол на бесконечности, полярный угол в фокусе потенциала притяжения ϕ и расстояние до точки на орбите r , а также отраженный от гиперболы луч, продолжение которого исходит из фокуса отталкивания.

Если бы взаимодействия не было, то частица ушла бы на бесконечность в противоположном направлении, т.е. под углом

$$\phi_{\text{out}}^{(0)} = \pi + \phi_{\text{in}}.$$

Наличие кулоновского потенциала приводит в действительности к уходу частицы на бесконечность под углом

$$\phi_{\text{out}} = -\phi_{\text{in}},$$

так как $\cos \phi_{\text{in}} = \cos \phi_{\text{out}}$ и при притяжении, и при отталкивании. Значит, угол рассеяния

$$\theta = \phi_{\text{out}}^{(0)} - \phi_{\text{out}} = \pi + 2\phi_{\text{in}}. \quad (1.74)$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = -\operatorname{ctg} \phi_{\text{in}} = -\operatorname{sign}(Z) \frac{1}{\epsilon} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{\epsilon^2}} \right)^{-1} = -\frac{\operatorname{sign}(Z)}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} = -\frac{Zme^2}{\sqrt{2mE}\ell^2}.$$

Введем импульс p для энергии частицы на бесконечности $E = p^2/2m$ и прицельный параметр \mathbf{b} для орбитального момента на бесконечности $\ell = p \mathbf{b}$. Тогда

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = -\frac{p^2 \mathbf{b}}{Zme^2}. \quad (1.75)$$

Для сферически симметричного потенциала поток N частиц на кольцо радиуса $|\mathbf{b}|$ и толщиной $|\mathrm{d}\mathbf{b}|$ составляет

$$j = \frac{N}{2\pi|\mathbf{b}||\mathrm{d}\mathbf{b}|}$$

Все эти частицы рассеются в телесный угол $\mathrm{d}\Omega = 2\pi \mathrm{d}\cos\theta$, так что дифференциальное сечение рассеяния, определяемое как отношение числа рассеянных частиц в данный телесный угол к падающему на мишень потоку, равно

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{N}{j} = 2\pi|\mathbf{b}||\mathrm{d}\mathbf{b}| = \frac{2\pi Zme^2}{p^2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \frac{Zme^2}{2p^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \mathrm{d}\theta = 2\pi \mathrm{d}\cos\theta \frac{Z^2 m^2 e^4}{4p^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (1.76)$$

т.е. дифференциальное сечение Резерфордского рассеяния равно

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{16E^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (1.77)$$

Оно расходится при малом угле рассеяния $\theta \rightarrow 0$.

Для сравнения рассмотрим упругое рассеяние точечной частицы на нейтральном неподвижном шаре радиуса R : в этом случае происходит зеркальное отражение то поверхности шара, т.е. угол падения равен углу отражения, если прицельное расстояние меньше радиуса шара $b \leq R$, в противном случае частица движется свободно без какого-либо рассеяния (см. рис. 1.6).

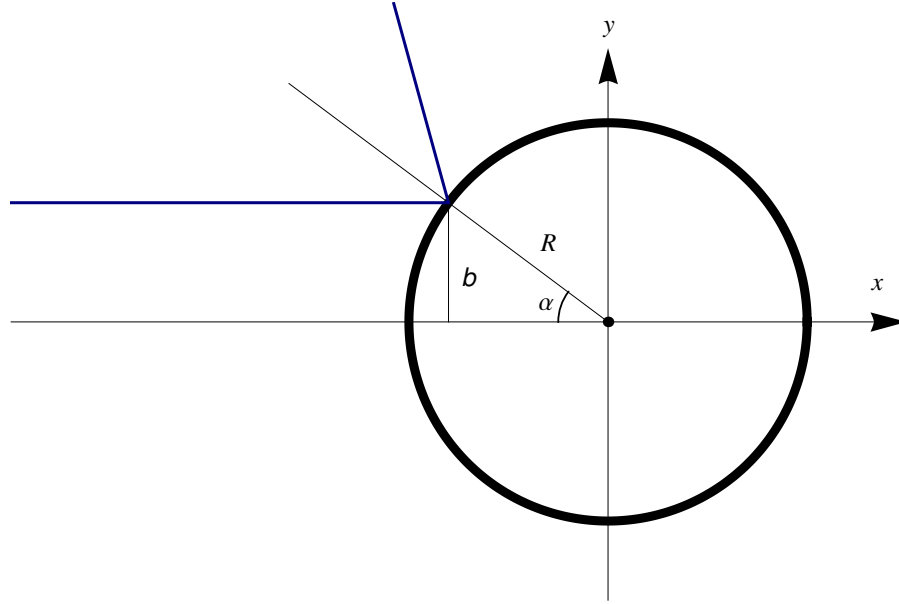


Рис. 1.6: Зеркальное рассеяние на шаре радиуса R : показаны траектория частицы с прицельным параметром b и угол в точке отражения от шара α .

Угол рассеяния при таком упругом отражении

$$\theta_{\text{el}} = \pi - 2\alpha, \quad \sin \alpha = \frac{b}{R} \Rightarrow b = R \cos \frac{\theta}{2},$$

так что дифференциальное сечение

$$d\sigma_{\text{el}} = 2\pi \frac{1}{2} R^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta,$$

т.е.

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega} = \frac{1}{4} R^2. \quad (1.78)$$

Итак, дифференциальное сечение упругого рассеяния частицы на шаре является постоянным как функция энергии и изотропным, т.е. не зависит от углов, в отличие от дифференциального сечения кулоновского рассеяния, которое падает с ростом энергии и увеличивается с уменьшением угла рассеяния. Кроме того, у кулоновского рассеяния имеется квадратичная зависимость от заряда рассеивающего центра Z .

Для исследования атомарной структуры, т.е. для обнаружения ядра атома, к примеру, в опытах Резерфорда по рассеянию альфа-частиц веществом необходимо иметь малые фокусные расстояния r_{\pm} при кулоновском рассеянии, но $r_+ r_- = \ell^2 / 2mE = \ell^2 / p^2 = b^2$, а значит, чтобы иметь возможность проникнуть внутрь атома, необходимо иметь большие энергии и малые прицельные параметры, для которых угол рассеяния становится большим как в случае зеркального рассеяния на шаре, так и в случае кулоновского рассеяния. Однако измерение потока рассеянных частиц под разными большими углами рассеяния, скажем, в один интервал телесного угла возле $\theta = \pi$ и $\theta = \pi/2$ в кулоновском случае даст четырехкратный рост детектируемых частиц при таком уменьшении угла рассеяния в отличие от постоянного числа рассеянных частиц в случае нейтрального шара.

При малых углах рассеяния дифференциальное сечение кулоновского рассеяния может быть сравнимо с площадью поперечного сечения атома, так что из данных о рассеянии на малые углы сделать вывода о структуре атома невозможно. Но падение измеренного сечения существенно ниже площади поперечного сечения атома при больших углах рассеяния может свидетельствовать лишь о том, что внутри атома находится заряженный центр, если, при этом, сечение рассеяния назад остается ненулевым.

Опыты Резерфорда показали, что атом имеет заряженное ядро.

Задача 6. В гравитационном поле Солнца вычислите малое отклонение луча света, проходящего возле края Солнца (указание: гравитационное ускорение не зависит от массы). Сравните результат с углом отклонения, рассчитанным в общей теории относительности, т.е. с учетом искривления пространства-времени,

$$\delta\phi = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}}.$$

9. Изотропный гармонический осциллятор

Потенциал изотропного осциллятора с частотой ω имеет сферически симметричный вид

$$U = \frac{m\omega^2}{2} r^2,$$

так что уравнение для орбиты при $\ell \neq 0$

$$\phi(r) = \int^r dr \frac{\ell}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m \left(E - \frac{m\omega^2}{2} r^2 - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}} \quad (1.79)$$

после замены переменных

$$u = \frac{1}{r^2} \frac{\ell^2}{mE} u_0, \quad u_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 \ell^2}{E^2}}},$$

дает

$$\phi(r) = -\frac{1}{2} \int^u du \frac{1}{\sqrt{1 - (u - u_0)^2}} = \frac{1}{2} \arccos(u - u_0).$$

Значит,

$$\cos 2\phi = \frac{u_0}{r^2} \left(\frac{\ell^2}{mE} - r^2 \right), \quad (1.80)$$

откуда, используя $r^2 \cos 2\phi = r^2(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) = x^2 - y^2$, найдем

$$x^2 - y^2 = u_0 \left(\frac{\ell^2}{mE} - x^2 - y^2 \right),$$

а следовательно,

$$x^2 \frac{u_0 + 1}{u_0} + y^2 \frac{u_0 - 1}{u_0} = \frac{\ell^2}{mE}. \quad (1.81)$$

В итоге, мы получили уравнение для эллипса с полуосями a и b ,

$$a^2 = \frac{\ell^2}{mE} \frac{u_0}{u_0 + 1}, \quad b^2 = \frac{\ell^2}{mE} \frac{u_0}{u_0 - 1}, \quad (1.82)$$

с эксцентриситетом ϵ :

$$1 - \epsilon^2 = \frac{a^2}{b^2} = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} \Rightarrow \epsilon^2 = \frac{2}{u_0 + 1}. \quad (1.83)$$

Центр притяжения находится в центре эллипса.

Круговая орбита отвечает $\epsilon = 0$ и минимуму потенциала радиального движения при фиксированном моменте импульса

$$V(r) = \frac{m\omega^2}{2} r^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2},$$

так что

$$V'(r) = m\omega^2 r - \frac{\ell^2}{mr^3},$$

и

$$V'(r_0) = 0 \Rightarrow r_0^2 = \frac{\ell}{m\omega},$$

что достигается как раз при $E = V(r_0) = \omega\ell$.

При $\omega\ell < E < \infty$ значение $1 < u_0 < \infty$, а значит, $0 < \epsilon < 1$.

Как легко убедиться, период обращения T связан стандартным образом с частотой осциллятора ω ,

$$T = 2\pi ab \frac{m}{\ell} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

10. Теорема вириала

Для финитных и, в частности, периодических движений имеет смысл рассматривать средние значения наблюдаемых величин за долгий интервал эволюции или за период T :

$$\int_0^T dt F(t) = T \cdot \langle F \rangle \Rightarrow \langle F \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt F(t). \quad (1.84)$$

Тогда для произвольной наблюдаемой среднее значение ее производной по времени

$$\left\langle \frac{dF}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{dF}{dt} = \frac{1}{T} \{F(T) - F(0)\}.$$

Для периодического движения $F(T) = F(0)$, а для финитного движения значения наблюдаемой ограничены в том случае, если она построена как функция координат и импульсов и явно не зависит от времени: $F = F(p(t), q(t))$, так что при больших временах $\{F(T) - F(0)\}/T \rightarrow 0$, а значит, имеет место утверждение

$$\left\langle \frac{dF(p, q)}{dt} \right\rangle = 0. \quad (1.85)$$

В частности,

$$\left\langle \frac{d}{dt} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \right\rangle = 0. \quad (1.86)$$

Вспользуемся уравнениями Гамильтона (1.32) и найдем

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\partial U \cdot \mathbf{r} + \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{p}}{m} = -\mathbf{r} \cdot \partial U + 2 \frac{\mathbf{p}^2}{2m}.$$

Значит, согласно уравнениям движения из (1.86) следует теорема вириала¹³ для финитных движений: удвоенное среднее значение кинетической энергии равно среднему значению скалярного произведения силы на радиус-вектор со знаком минус:

$$2 \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right\rangle = \langle \mathbf{r} \cdot \partial U \rangle, \Leftrightarrow 2 \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right\rangle = -\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{F} \rangle. \quad (1.87)$$

Для сферически симметричных потенциалов

$$\mathbf{r} \cdot \partial U(r) = r \frac{\partial U}{\partial r},$$

а для однородных $U(r) = U_0 r^\kappa$,

$$r \frac{\partial U(r)}{\partial r} = \kappa U(r),$$

так что по теореме вириала среднее значение кинетической энергии связано со средним значением потенциальной

$$\left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right\rangle = \frac{\kappa}{2} \langle U \rangle. \quad (1.88)$$

¹³От латинского слова, означающего «силовой».

Для кулоновского потенциала ($\varkappa = -1$) и потенциала гармонического осциллятора ($\varkappa = 2$) получаем

$$\left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right\rangle_{\text{Coul}} = -\frac{1}{2} \langle U \rangle_{\text{Coul}}, \quad \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right\rangle_{\text{osc}} = \langle U \rangle_{\text{osc}}.$$

Отсюда, между прочим, для энергии как суммы кинетической и потенциальной энергий находим

$$E_{\text{Coul}} = \frac{1}{2} \langle U \rangle_{\text{Coul}}, \quad E_{\text{osc}} = 2 \langle U \rangle_{\text{osc}}.$$

Тема 2

Векторный анализ

Лекция № 4

Длина и однородность и изотропность евклидова пространства, метрика, векторы, базис, декартовы и сферические координаты, инвариантные линейные функции на векторах и ковекторы, инвариантные полилинейные функции на векторах и тензоры, дифференциал инвариантной функции и законы преобразования векторов и ковекторов, символ Кронекера как инвариантный тензор второго ранга, метрика как ковариантный тензор второго ранга, обратная метрика, поднимание и опускание индексов, изометрии евклидова пространства, ортогональные, собственные преобразования, смешанное произведение трех векторов, ориентированный объем, тензор Леви-Чивита, векторное произведение в тензорных обозначениях, детерминант, минор, обратная матрица, дифференциал детерминанта, вектор и тензор площади, ковектор ∇ , градиент, производная по направлению, дивергенция, ротор, лапласиан в декартовых и сферических координатах, наглядное вычисление изменения базиса сферических координат при малом смещении, аналитический метод дифференцирования в криволинейных координатах, производная Ли и параллельный перенос, связь базисов контр- и ковариантного пространства и производная Ли по направлению базисного вектора, тензор кручения и координатная сетка в пространстве, ковариантная производная с метрической связностью, символы Кристоффеля, ковариантная дивергенция, оператор Бельтрами-Лапласа, коэффициенты Ламе, векторы Киллинга как бесконечно малые сдвиги изометрий, уравнения Эйлера-Лагранжа в ковариантном виде, тензор кривизны Римана, параллельный перенос вектора по бесконечно малому замкнутому контуру, тензор Риччи, скалярная кривизна.

11. Евклидово пространство

11.1. Векторы, ковекторы, тензоры

Механика частиц формулируется в евклидовом пространстве. Инструментом для описания в этом случае является векторный анализ.

Векторное пространство определяется как множество, в котором заданы сложение двух элементов и умножение элементов на число [4]. Числа могут быть вещественными или комплексными, а векторное пространство, соответственно, является тоже вещественным или комплексным. Далее будем строить изложение для вещественного векторного пространства.

Векторное пространство конечной размерности можно представить себе как линейную оболочку, натянутую на конечное число независимых базисных векторов. В трехмерном случае в декартовом базисе произвольный вектор координатного пространства

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z.$$

Поскольку базис в разных точках пространства можно выбирать различным способом, принято запи-

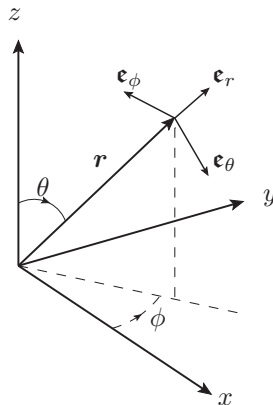


Рис. 2.1: Базис в сферических координатах.

сывать разложение векторов в бесконечно малой окрестности точки пространства. Поэтому, согласно правилу Эйнштейна, запись для бесконечно малых векторов принимает вид

$$d\mathbf{r} = dr^\alpha \mathbf{e}_\alpha,$$

где dr^α — трехмерный столбец:

$$dr^\alpha = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}.$$

В сферических координатах (см. рис. 2.1) базис зависит от точки в пространстве,

$$d\mathbf{r} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{e}_\phi. \quad (2.1)$$

В (2.1) мы разложили вектор по единичным векторам базиса, умноженным на длину бесконечно малого вектора, который получается при малом сдвиге по координатам сферического базиса:

$$\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix}.$$

Векторное пространство называется евклидовым, если

- пространство является *метрическим*, т.е. для него определен квадрат *длины* вектора — инвариантная, т.е. не зависящая от выбора базиса в векторном пространстве, положительно определенная квадратичная функция вектора,
- оно *однородно* и
- *изотропно*.

Квадрат длины, в частности, в декартовых координатах задается выражением

$$dC^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \mapsto g_{\alpha\beta} dr^\alpha dr^\beta = g(d\mathbf{r}, d\mathbf{r}),$$

где в общем случае положительно определенная симметричная квадратичная форма $g_{\alpha\beta}$, которую называют метрикой, может зависеть от положения точки в пространстве, что приведет, вообще говоря, к метрическому пространству Римана [5]. Однородность и изотропность евклидова пространства означает, что эта квадратичная форма в некотором базисе, который называют декартовым, может быть приведена к главным осям $\|g\| = \text{diag}(1, 1, 1)$ во всем пространстве. А значит, в декартовых координатах метрика — единичная матрица 3×3 :

$$g_{\alpha\beta} = \mathbb{1}_{\alpha\beta}.$$

Метрика задает скалярное произведение двух векторов, поскольку по построению квадрат длины — линейная симметричная функция по каждому из аргументов:

$$g(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) = g(\mathbf{a}, \mathbf{a}) + 2g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + g(\mathbf{b}, \mathbf{b}),$$

откуда всегда можно найти $g(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ по заданным длинам векторов. По построению декартов базис является ортонормированным:

$$g(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) = g_{\alpha\beta} = \mathbb{1}_{\alpha,\beta}.$$

В сферических координатах базис также ортонормированный, и квадрат длины легко вычисляется в виде

$$dC^2 = d\mathbf{r}^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.2)$$

т.е. метрика по-прежнему диагональна, как во всяком ортонормированном базисе, с ненулевыми элементами¹

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta.$$

Пусть функция f в векторном пространстве задает вещественное число $f(\mathbf{r})$. Это число зависит от вектора, но не зависит от того, в каком базисе мы запишем сам этот вектор, т.е. значение функции инвариантно относительно замен базиса в векторном пространстве. Такая функция называется скаляром.

¹Условие приводимости тензора метрики к единичному сразу во всем пространстве сводится к тождественному нулю тензора Римана, что означает перестановочность дифференцирования по двум направлениям любого вектора, зависящего от точки в пространстве.

Примером скаляра служит действие на траектории, которое зависит от конечной точки траектории, но не зависит от того, в какой системе координат описывается эта точка. Время как величина, вообще не зависящая от системы координат в нерелятивистской физике, также является скаляром в евклидовом пространстве.

Среди скаляров выделяют линейные функции:

- $f(c\mathbf{a}) = cf(\mathbf{a}), \quad c \in \mathbb{R},$
- $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}).$

Линейная функция полностью задается значениями на базисных векторах векторного пространства

$$f(\mathbf{a}) = f(a^\alpha \mathbf{e}_\alpha) = a^\alpha f(\mathbf{e}_\alpha).$$

Поскольку значение скалярной функции — инвариант, а a^α — трехмерный столбец, то удобно ввести обозначения $f(\mathbf{e}_\alpha) = f_\alpha$ — трехмерная строка, так что $f_\alpha a^\alpha = f(\mathbf{a})$ — число, не зависящее от выбора базиса.

Дифференциал скалярной функции $df = f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - f(\mathbf{r})$ является линейной скалярной функцией,

$$df = \frac{\partial f}{\partial r^\alpha} dr^\alpha = \partial_\alpha f dr^\alpha \Rightarrow df(\mathbf{e}_\alpha) = \partial_\alpha f.$$

При замене координат $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(\mathbf{r})$ имеет место замена базиса в каждой точке пространства, причем дифференциалы dr^α преобразуются как столбец согласно

$$dr'^\alpha = \frac{\partial r'^\alpha}{\partial r^\beta} dr^\beta,$$

т.е. матрицей 3×3 : $\Lambda_\beta^\alpha = \partial r'^\alpha / \partial r^\beta$, так что имеет место *закон преобразования векторов*²

$$a'^\alpha = \frac{\partial r'^\alpha}{\partial r^\beta} a^\beta. \quad (2.3)$$

А частные производные скалярной функции преобразуются как строка согласно

$$\partial'_\alpha f = \frac{\partial r^\beta}{\partial r'^\alpha} \partial_\beta f,$$

т.е. обратной матрицей $(\Lambda^{-1})_\alpha^\beta = \partial r^\beta / \partial r'^\alpha$. Действительно,

$$(\Lambda^{-1} \cdot \Lambda)_\alpha^\beta = (\Lambda^{-1})_\gamma^\beta \Lambda_\alpha^\gamma = \frac{\partial r^\beta}{\partial r'^\gamma} \frac{\partial r'^\gamma}{\partial r^\alpha} = \frac{\partial r^\beta}{\partial r^\alpha}.$$

Производная $\partial r^\beta / \partial r^\alpha$ называется символом Кронекера

$$\frac{\partial r^\beta}{\partial r^\alpha} = \partial_\alpha r^\beta = \delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (2.4)$$

Это не что иное, как элементы единичной матрицы $\delta_\alpha^\beta = \mathbb{1}_\alpha^\beta$, так что $\Lambda^{-1} \cdot \Lambda = \mathbb{1}$.

Итак, частные производные скалярной функции преобразуются при замене координат как строки. В общем случае говорят, что линейные скалярные функции на векторном пространстве образуют ко-векторное пространство, а их значения на базисных векторах преобразуются по *закону преобразования ко-векторов*³, т.е. как частные производные скалярной функции:

$$b'_\alpha = \frac{\partial r^\beta}{\partial r'^\alpha} b_\beta. \quad (2.5)$$

Мнемоническое правило для запоминания законов преобразования простое: вектор — верхний индекс, в матрице преобразований штрих у координат сверху, ко-вектор — нижний индекс, в матрице преобразований штрих у координат снизу.

²Говорят также о законе преобразования контрвариантных векторов.

³Говорят также о законе преобразования ковариантных векторов.

Ковариантным тензором ранга k называется функция от k векторов, линейная по каждому из аргументов. Тогда в индексных обозначениях тензор задается своими значениями на базисных векторах:

$$T(\mathbf{e}_{\alpha_1}, \dots, \mathbf{e}_{\alpha_k}) = T_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$$

Смешанные тензоры ранга $k_1 + k_2$ определяются как линейные функции на k_1 векторах и k_2 ковекторах и имеют k_1 нижних и k_2 верхних индексов. По каждому нижнему индексу тензор преобразуется по закону ковектора, а по верхнему — по закону вектора.

Символ Кронекера смешанный тензор второго ранга. Он является инвариантным тензором, поскольку в любых новых координатах принимает те же значения единичной матрицы.

Метрика является ковариантным тензором второго ранга. Она совпадает, как мы видели на примере сферических координат, с единичной матрицей только в декартовых координатах. Для метрики определяют обратную метрику g^{-1} согласно матричному представлению $g^{-1} \cdot g = \mathbb{1}$, записывая индексы обратной матрицы сверху:

$$\|g^{-1}\|^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}, \quad g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta_{\gamma}^{\alpha}.$$

Из инвариантности единичного тензора Кронекера относительно преобразований координат матрицей Λ , ввиду $\Lambda \cdot \mathbb{1} \cdot \Lambda^{-1} = \mathbb{1}$, следует, что обратная метрика действительно является тензором второго ранга:

$$\Lambda_{\alpha'}^{\alpha} \Lambda_{\beta'}^{\beta} g^{\alpha'\beta'} = g'^{\alpha\beta}, \quad g_{\beta''\gamma''} (\Lambda^{-1})_{\beta}^{\beta''} (\Lambda^{-1})_{\gamma}^{\gamma''} = g'_{\beta\gamma},$$

$$g'^{\alpha\beta} g'_{\beta\gamma} = \Lambda_{\alpha'}^{\alpha} \Lambda_{\beta'}^{\beta} g^{\alpha'\beta'} g_{\beta''\gamma''} (\Lambda^{-1})_{\beta}^{\beta''} (\Lambda^{-1})_{\gamma}^{\gamma''},$$

но поскольку $\Lambda_{\beta'}^{\beta} (\Lambda^{-1})_{\beta}^{\beta''} = \delta_{\beta'}^{\beta''}$, а значит,

$$\Lambda_{\beta'}^{\beta} g^{\alpha'\beta'} g_{\beta''\gamma''} (\Lambda^{-1})_{\beta}^{\beta''} = g^{\alpha'\beta'} g_{\beta'\gamma''} = \delta_{\gamma''}^{\alpha'},$$

получим

$$g'^{\alpha\beta} g'_{\beta\gamma} = \Lambda_{\alpha'}^{\alpha} \delta_{\gamma''}^{\alpha'} (\Lambda^{-1})_{\gamma}^{\gamma''} = \Lambda_{\alpha'}^{\alpha} (\Lambda^{-1})_{\gamma}^{\alpha'} = \delta_{\gamma}^{\alpha},$$

как это и должно быть.

Метрика используется для получения новых тензорных величин путем *поднимания и опускания индексов*: поднимание индекса с помощью обратной метрики переводит ковекторную величину в векторную, $a_{\alpha} \mapsto a^{\alpha} = g^{\alpha\beta} a_{\beta}$, а опускание индекса метрикой переводит вектор в ковектор, $a^{\alpha} \mapsto a_{\alpha} = g_{\alpha\beta} a^{\beta}$. В силу определения тензора метрики как обратной матрицы для ковариантного тензора метрики последовательное поднимание и опускание индекса не меняет тензорную величину.

В декартовых координатах метрика евклидова пространства — единичная матрица, так что поднимание или опускание индекса тензорной величины не меняет эту тензорную величину. Поэтому в декартовых координатах евклидова пространства не различают верхние и нижние индексы. Однако это различие существенно как в криволинейных координатах евклидова пространства (см. пример сферических координат выше), так и в случае специальной теории относительности (пространство Минковского).

11.2. Изометрии евклидовой метрики

Найдем преобразования координат, которые не меняют вид метрики, — изометрии. Для этого сначала запишем закон преобразования метрики при произвольных (обратимых) заменах координат:

$$d\mathcal{C}^2 = g'_{\alpha'\beta'} dr'^{\alpha'} dr'^{\beta'} = g'_{\alpha'\beta'} \Lambda_{\alpha}^{\alpha'} \Lambda_{\beta}^{\beta'} dr^{\alpha} dr^{\beta} = g_{\alpha\beta} dr^{\alpha} dr^{\beta},$$

где матрица преобразований координат задается частными производными $\Lambda_{\beta}^{\alpha} = \partial_{\beta} r'^{\alpha}$. Значит,

$$g_{\alpha\beta} = g'_{\alpha'\beta'} \Lambda_{\alpha}^{\alpha'} \Lambda_{\beta}^{\beta'}.$$

Определим квадратную матрицу \hat{g} с элементами $\|\hat{g}\|_{\beta}^{\alpha} = g_{\alpha\beta}$. Тогда преобразование метрики запишется в виде

$$\hat{g}_{\beta}^{\alpha} = \hat{g}'_{\beta'}^{\alpha'} \Lambda_{\alpha}^{\alpha'} \Lambda_{\beta}^{\beta'},$$

так что с помощью транспонированной матрицы $(\Lambda^T)_{\alpha'}^{\alpha} = \Lambda_{\alpha}^{\alpha'}$ получим матричное умножение

$$\hat{g}_{\beta}^{\alpha} = (\Lambda^T)_{\alpha'}^{\alpha} \hat{g}'_{\beta'}^{\alpha'} \Lambda_{\beta}^{\beta'} = (\Lambda^T \cdot \hat{g}' \cdot \Lambda)_{\beta}^{\alpha},$$

т.е. преобразование имеет вид перемножения матриц

$$\hat{g} = \Lambda^T \cdot \hat{g}' \cdot \Lambda.$$

При изометрии вид метрики не меняется: $\hat{g} = \hat{g}'$, а значит,

$$\text{изометрия: } \hat{g} = \Lambda^T \cdot \hat{g} \cdot \Lambda. \quad (2.6)$$

В декартовых координатах метрика — единичная матрица: $\hat{g} = \mathbb{1}$, а изометрия удовлетворяет условию

$$\Lambda^T \cdot \Lambda = \mathbb{1}, \quad (2.7)$$

откуда, взяв детерминант, находим

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det \Lambda = \pm 1. \quad (2.8)$$

Преобразования, удовлетворяющие условию (2.7) называются ортогональными (символ O), а условию $\det \Lambda = 1$ — специальными (собственными, символ S). Специальные изометрии — это вращения пространства, группа вращений 3-мерного евклидова пространства $SO(3)$, $r'^\alpha = \mathcal{R}_\beta^\alpha(\phi)r^\beta$, т.е. в случае бесконечно малого поворота $r' \approx r + \phi \times r$ при $\phi \rightarrow 0$, и пространственные сдвиги $r' = r + a$, когда соответственно, $\Lambda_\beta^\alpha = \mathcal{R}_\beta^\alpha$ с углом поворота ϕ и $\Lambda_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha$ при a , которое не зависит от координат. Зеркальное отражение пространства $r \mapsto -r$ (символ \mathbb{P}) или нечетного числа его осей приводит, очевидно, к $\det \Lambda = -1$, а в общем случае подобные (несобственные) преобразования являются комбинацией вращения с отражением. В итоге, изометрии трехмерного евклидова пространства задаются шестью непрерывными параметрами: три угла поворота вокруг трех независимых осей и три сдвига координат при трансляции вдоль трех независимых осей, неоднородная (inhomogeneous, символ I) группа $ISO(3)$, — а также дискретным преобразованием зеркального отражения \mathbb{P} . Преобразования $SO(3)$ вместе с \mathbb{P} образуют группу $O(3)$.

В частности, преобразование Галилея — это трансляция с $a = v_a t$, и оно является, следовательно, изометрией евклидовой метрики. Поскольку законы механики записываются в евклидовом пространстве во всех инерциальных системах отсчета одинаково, преобразование координат при переходе из одной инерциальной системы в другую должно быть изометрией евклидовой метрики пространства, а действие должно быть евклидовым скаляром, т.е. инвариантом, также как и время, течение которого не зависит от координат. Отсюда следует, что функции Лагранжа и Гамильтона — евклидовы скаляры, и следовательно, импульс как частная производная скалярной функции по компонентам вектора, $p_\alpha = \partial L / \partial v^\alpha$, — евклидов ковектор, поскольку r^α — вектор, а значит, и его производная по скалярной величине — времени, скорость тоже вектор $\dot{r}^\alpha = v^\alpha$. Преобразования евклидовой метрики импульсного пространства (пространства скоростей) также должны быть изометриями.

Линейная зависимость сдвига координат от времени, как и независимость угла поворота от времени являются, конечно, следствиями постулата об инерциальных системах: уравнения движения инвариантны только при линейной зависимости трансляции от времени.

В специальной теории относительности, во-первых, зависимость параметра трансляции от времени становится недопустимой, что исключает из числа сдвигов преобразования Галилея, но оставляет в силе, конечно, все другие перечисленные нами изометрии евклидова пространства как преобразования, не изменяющие уравнения движения, а во-вторых, само евклидово пространство становится подмножеством более общей структуры — пространства Минковского с более широкой группой изометрий, включающей в себя преобразования Лоренца, которые не только сохраняют уравнения движения, но оставляют инвариантным действие релятивистской частицы и полей.

11.3. Тензор Леви-Чивита

Рассмотрим ортонормированную правую тройку базисных векторов евклидова пространства, например, $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z \equiv \mathbf{e}_\alpha$, $\alpha = \overline{1, 3}$. Смешанное произведение $(\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{e}_z = 1$ — объем единичного куба. Линейная по каждому из аргументов величина

$$(\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta) \cdot \mathbf{e}_\gamma \equiv \epsilon_{\alpha\beta\gamma}$$

задает компоненты тензора третьего ранга — символа Леви-Чивиты, полностью антисимметричного по перестановкам каждого из двух его аргументов. Как следствие, если хотя бы пара векторов в смешанном произведении совпадает, его значение равно нулю. Физический смысл символа Леви-Чивита — ориентированный объем куба, натянутого на тройку единичных векторов: на правой тройке объем положительный «+1», на левой — отрицательный «-1», а для плоской фигуры равен нулю.

Разложение векторов по базису задает смешанное произведение в виде

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (a^\alpha \mathbf{e}_\alpha \times b^\beta \mathbf{e}_\beta) \cdot c^\gamma \mathbf{e}_\gamma = a^\alpha b^\beta c^\gamma (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta) \cdot \mathbf{e}_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} a^\alpha b^\beta c^\gamma.$$

Аналогично векторное произведение с компонентой γ

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_\gamma = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e}_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} a^\alpha b^\beta,$$

откуда заодно заключаем, что компоненты единичного вектора $(\mathbf{e}_\gamma)^\gamma = \delta_\gamma^\gamma$, т.е. единственная единица у столбца \mathbf{e}_γ находится на месте, номер которого равен γ .

Стандартное определение детерминанта квадратной матрицы A размерности 3×3

$$\det A = \sum (-1)^{\sigma(\alpha\beta\gamma)} A_{1\alpha} A_{2\beta} A_{3\gamma},$$

где $\sigma(\alpha\beta\gamma)$ — число перестановок отличных друг от друга индексов в упорядоченную последовательность 123, с помощью тензора Леви-Чивиты принимает вид

$$\det A = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_{1\alpha} A_{2\beta} A_{3\gamma}. \quad (2.9)$$

Запишем это же выражение для детерминанта в виде

$$\det A = \epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} A_{1\alpha_1} A_{2\alpha_2} A_{3\alpha_3} = \frac{1}{3!} \epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \epsilon_{\beta_1\beta_2\beta_3} A_{\beta_1\alpha_1} A_{\beta_2\alpha_2} A_{\beta_3\alpha_3}.$$

Здесь мы заметили, что и для первого индекса матрицы в произведении необходимо записать упорядоченную правую тройку, причем, при перестановке порядка любых двух бета-индексов смена знака слагаемого компенсируется сменой знака у бета-символа Леви-Чивиты, а число одинаковых членов равно числу перестановок последовательности 123, т.е. $3!$. Из приведенного выше выражения сразу следует, что детерминант квадратной матрицы и транспонированной к ней матрицы совпадают, поскольку перестановка альфа- и бета-символов Леви-Чивиты не изменяет результат и, как раз, отвечает перестановке альфа- и бета-индексов матрицы, т.е. транспонированию.

Более того, справедливо равенство

$$\epsilon_{\beta_1\beta_2\beta_3} A_{\beta_1\alpha_1} A_{\beta_2\alpha_2} A_{\beta_3\alpha_3} = \det A \cdot \epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \quad (2.10)$$

поскольку слева в (2.10) стоит тензор антисимметричный по перестановке любых двух альфа-индексов: перестановка двух альфа-индексов и соответствующих бета-индексов даст тождество, а дополнительная перестановка бета-индексов приведет к знаку «минус».

Равенство (2.10) позволяет сразу вычислить детерминант произведения двух матриц,

$$\begin{aligned} \det(A \cdot B) &= \frac{1}{3!} \epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \epsilon_{\beta_1\beta_2\beta_3} (A_{\alpha_1\gamma_1} B_{\gamma_1\beta_1}) (A_{\alpha_2\gamma_2} B_{\gamma_2\beta_2}) (A_{\alpha_3\gamma_3} B_{\gamma_3\beta_3}) \\ &= \frac{1}{3!} \epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} A_{\alpha_1\gamma_1} A_{\alpha_2\gamma_2} A_{\alpha_3\gamma_3} \epsilon_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3} \det B = \\ &= \det A \cdot \det B. \end{aligned}$$

Для нахождения обратной матрицы, введем понятие минора

$$M_{\alpha\beta} = \frac{1}{2!} \epsilon_{\alpha\alpha_2\alpha_3} \epsilon_{\beta\beta_2\beta_3} A_{\beta_2\alpha_2} A_{\beta_3\alpha_3}. \quad (2.11)$$

Вычислим

$$M_{\alpha\beta} A_{\beta\alpha'} = \frac{1}{2!} \epsilon_{\alpha\alpha_2\alpha_3} \epsilon_{\beta\beta_2\beta_3} A_{\beta\alpha'} A_{\beta_2\alpha_2} A_{\beta_3\alpha_3} = \frac{1}{2!} \epsilon_{\alpha\alpha_2\alpha_3} \epsilon_{\alpha'\beta_2\beta_3} \det A = \frac{1}{2!} 2! \delta_{\alpha\alpha'} \det A.$$

Значит, элементы обратной матрицы —

$$(A^{-1})_{\alpha\beta} = \frac{1}{\det A} M_{\alpha\beta} = \frac{1}{2! \det A} \epsilon_{\alpha\alpha_2\alpha_3} \epsilon_{\beta\beta_2\beta_3} A_{\beta_2\alpha_2} A_{\beta_3\alpha_3}. \quad (2.12)$$

Тогда можно легко записать дифференциал детерминанта

$$d \det A = dA_{\beta\alpha} \cdot 3 \frac{1}{3!} \epsilon_{\alpha\alpha_2\alpha_3} \epsilon_{\beta\beta_2\beta_3} A_{\beta_2\alpha_2} A_{\beta_3\alpha_3} = dA_{\beta\alpha} M_{\alpha\beta} = \det A \cdot (A^{-1})_{\alpha\beta} dA_{\beta\alpha}. \quad (2.13)$$

В частности, для тензора метрики

$$d \det g = \det g \cdot g^{\alpha\beta} dg_{\beta\alpha}. \quad (2.14)$$

Из (2.9), полагая $A_{1\alpha} \mapsto a^\alpha$, $A_{2\beta} \mapsto b^\beta$, $A_{3\gamma} \mapsto c^\gamma$, сразу получаем

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det \begin{pmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & a^{(3)} \\ b^{(1)} & b^{(2)} & b^{(3)} \\ c^{(1)} & c^{(2)} & c^{(3)} \end{pmatrix},$$

и в частности,

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta) \cdot \mathbf{e}_\gamma = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\alpha^{(1)} & \mathbf{e}_\alpha^{(2)} & \mathbf{e}_\alpha^{(3)} \\ \mathbf{e}_\beta^{(1)} & \mathbf{e}_\beta^{(2)} & \mathbf{e}_\beta^{(3)} \\ \mathbf{e}_\gamma^{(1)} & \mathbf{e}_\gamma^{(2)} & \mathbf{e}_\gamma^{(3)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \delta_\alpha^1 & \delta_\alpha^2 & \delta_\alpha^3 \\ \delta_\beta^1 & \delta_\beta^2 & \delta_\beta^3 \\ \delta_\gamma^1 & \delta_\gamma^2 & \delta_\gamma^3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда можно получить, что произведение тензоров Леви-Чивита сводится к произведению детерминантов

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha'\beta'\gamma'} = \det \begin{pmatrix} \delta_\alpha^1 & \delta_\alpha^2 & \delta_\alpha^3 \\ \delta_\beta^1 & \delta_\beta^2 & \delta_\beta^3 \\ \delta_\gamma^1 & \delta_\gamma^2 & \delta_\gamma^3 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \delta_{\alpha'}^1 & \delta_{\beta'}^1 & \delta_{\gamma'}^1 \\ \delta_{\alpha'}^2 & \delta_{\beta'}^2 & \delta_{\gamma'}^2 \\ \delta_{\alpha'}^3 & \delta_{\beta'}^3 & \delta_{\gamma'}^3 \end{pmatrix},$$

где во втором множителе мы использовали транспонированную матрицу. Легко заметить, что сумма

$$\delta_\alpha^1 \delta_{\alpha'}^1 + \delta_\alpha^2 \delta_{\alpha'}^2 + \delta_\alpha^3 \delta_{\alpha'}^3 = \delta_{\alpha\alpha'}$$

т.е. отлична от нуля и равна единице, если индексы совпадают. Тогда произведение двух полностью антисимметричных символов сводится к детерминанту

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha'\beta'\gamma'} = \det \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\alpha'} & \delta_{\alpha\beta'} & \delta_{\alpha\gamma'} \\ \delta_{\beta\alpha'} & \delta_{\beta\beta'} & \delta_{\beta\gamma'} \\ \delta_{\gamma\alpha'} & \delta_{\gamma\beta'} & \delta_{\gamma\gamma'} \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Из этого выражения в качестве упражнения следует получить формулы свертки произведения символов Леви-Чивиты по одному, двум и трем индексам:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha'\beta'\gamma} &= \det \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\alpha'} & \delta_{\alpha\beta'} \\ \delta_{\beta\alpha'} & \delta_{\beta\beta'} \end{pmatrix}, \\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha'\beta\gamma} &= 2\delta_{\alpha\alpha'}, \\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} &= 3! = 6. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Элемент площади $d^2\boldsymbol{\sigma}$ с образующими $d\mathbf{a}$ и $d\mathbf{b}$ — это вектор, направленный ортогонально плоскости образующих, с длиной, равной площади параллелограмма с образующими ребрами:

$$d^2\boldsymbol{\sigma} = d\mathbf{a} \times d\mathbf{b}.$$

Наряду с таким вектором площади часто вводят антисимметричный тензор

$$d^2\sigma_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} ds_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha'\beta'\gamma} da^{\alpha'} db^{\beta'} = da^\alpha db^\beta - da^\beta db^\alpha,$$

для которого используют обозначение

$$da^\alpha \wedge db^\beta = \frac{1}{2} (da^\alpha db^\beta - da^\beta db^\alpha).$$

11.4. Градиент, дивергенция, ротор

Наконец, дадим определения ковариантного вектора «набла» в ортонормированном базисе⁴ $d\mathbf{r} = dC^\alpha \mathbf{e}_\alpha$:

$$\nabla = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial C^\alpha}. \quad (2.17)$$

⁴ Речь идет об ортонормированном базисе, когда базисные наборы в контрвариантном и ковариантном векторном пространстве, \mathbf{e}_α и \mathbf{h}^α , соответственно, совпадают: $\mathbf{h}^\alpha = \mathbf{e}_\alpha$. Если нормированный базис векторного пространства не ортогонален, то базис в ковариантном пространстве \mathbf{h}^α строится по закону $\mathbf{h}^\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_\beta^\alpha$, и разложение для «набла» принимает вид $\nabla = \mathbf{h}^\alpha \frac{\partial}{\partial C^\alpha}$.

В декартовых координатах $dC^\alpha = dr^\alpha = (dx, dy, dz)$ и $\nabla_\alpha = \partial/\partial r^\alpha$, но, скажем, в базисе сферических координат (2.1) инфинитезимальный вектор длины $dC^\alpha = (dr, r d\theta, r \sin \theta d\phi)$, так что

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi}.$$

Действие ковектора набла переводит скаляр f в вектор, который называют градиентом f :

$$\nabla f = \text{grad} f, \quad (\nabla f)_\alpha = \nabla_\alpha f. \quad (2.18)$$

Градиент связан с производной функции по направлению \mathbf{u} ($\mathbf{u}^2 = 1$)

$$d_{\mathbf{u}} f = f(\mathbf{r} + dC \mathbf{u}) - f(\mathbf{r}) = dC \mathbf{u} \cdot \nabla f,$$

так что этот дифференциал максимален в некотором направлении \mathbf{u}_* , и следовательно, градиент указывает направление и скорость максимального роста функции в точке. Направление градиента ортогонально к касательной линии уровня функции \mathbf{u}_\parallel , т.е. постоянного значения функции, когда $d_{\mathbf{u}_\parallel} f = 0$.

Скалярное произведение ковектора набла с вектором называется дивергенцией

$$\text{div } \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \nabla_\alpha a^\alpha. \quad (2.19)$$

В евклидовом пространстве векторное произведение набла с вектором \mathbf{a} образует вектор ротора

$$\text{rot } \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a}, \quad (\text{rot } \mathbf{a})_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\beta a_\gamma. \quad (2.20)$$

Отсюда, например,

$$\text{div rot } \mathbf{a} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \mathbf{a} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\alpha \nabla_\beta a_\gamma = 0,$$

поскольку свертка антисимметричного тензора с симметричным тождественно равна нулю.

Лапласианом называют скаляр

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla, \quad (2.21)$$

который в декартовых координатах сводится к $\Delta = \partial_\alpha \partial_\alpha$.

§а. Дифференцирование в сферических координатах

В сферических координатах базис зависит от точки пространства, так что необходимо учитывать его изменения, которые легко установить графически, вычисляя проекции вариации базисных векторов на сами базисные орты:

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\theta d\theta + \mathbf{e}_\phi \sin \theta d\phi, \\ d\mathbf{e}_\theta &= -\mathbf{e}_r d\theta + \mathbf{e}_\phi \cos \theta d\phi, \\ d\mathbf{e}_\phi &= -\mathbf{e}_r \sin^2 \theta d\phi - \mathbf{e}_\theta \sin \theta \cos \theta d\phi. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \nabla &= \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi} \right\} = \mathbf{e}_r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}, \\ \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} \nabla &= \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} \left\{ \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi} \right\} = \\ &= \mathbf{e}_\theta^2 \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r \partial \theta^2} \right\} = \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2}, \\ \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi} \nabla &= \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi} \left\{ \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi} \right\} = \\ &= \mathbf{e}_\phi^2 \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + \frac{\partial^2}{r \sin \theta \partial \phi^2} \right\} \\ &= \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{r^2 \partial \theta} + \frac{\partial^2}{r^2 \sin^2 \theta \partial \phi^2}, \end{aligned}$$

и в итоге,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} \quad (2.23)$$

или

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right\}. \quad (2.24)$$

Вводят также оператор сдвига по модулю радиус-вектора

$$\hat{k}_r = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r},$$

для которого

$$\hat{k}_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

а также угловую часть оператора Лапласа

$$\Delta_{\theta, \phi} f = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2},$$

так что

$$\Delta f = \hat{k}_r^2 f + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \phi} f. \quad (2.25)$$

Оператор сдвига по радиуса определяется на функция вида

$$\hat{k}_r \left\{ \frac{1}{r} f(r) \right\} = \frac{1}{r} f'(r).$$

Поэтому

$$e^{\hat{k}_r a} \frac{1}{r} f(r) = \sum_n \frac{1}{n!} a^n \frac{1}{r} f^{(n)}(r) = \frac{1}{r} f(r+a).$$

В частности, функции

$$\Phi_{k_r}(r) = \frac{1}{r} e^{ik_r r}$$

являются собственными для генератора сдвига по радиусу $p_r = -i\hat{k}_r$:

$$i\hat{k}_r \Phi_{k_r}(r) = k_r \Phi_{k_r}(r).$$

Если собственное значение вещественное, $k_r \in \mathbb{R}$, то собственная функция является ограниченной.

В сферических координатах тем же способом легко вычислить

$$\text{grad } r = \nabla r = \mathbf{e}_r \frac{\partial r}{\partial r} = \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r},$$

$$\text{div } \mathbf{r} = \nabla \cdot (r\mathbf{e}_r) = \mathbf{e}_r^2 \frac{\partial r}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta^2 \frac{1}{r} r + \mathbf{e}_\phi^2 \frac{1}{r \sin \theta} r \sin \theta = 3,$$

$$\text{rot } \mathbf{r} = \nabla \times (r\mathbf{e}_r) = \frac{\partial r}{\partial r} \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \times (r\mathbf{e}_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \times (r \sin \theta \mathbf{e}_\phi) = 0.$$

Полезные упражнения по векторному анализу можно найти в сборнике задач по теоретический физике из заданий МФТИ [6].

Кроме того, здесь уместно заметить, что для более глубокого понимания векторного анализа следует ознакомиться с современным языком рассмотрения интегралов по контурам и поверхностям на языке дифференциальных форм (см. §12.) [5].

11.5. Дифференцирование в криволинейных координатах

В криволинейных координатах базисные векторы и метрика зависят от точки пространства. При этом, изменение базисных векторов при бесконечно малом сдвиге для сферических координат мы установили при помощи наглядных геометрических построений в евклидовом пространстве. В общем случае такая наглядность может быть довольно затруднительна, так что имеется необходимость в получении универсального, аналитического инструментария для дифференцирования тензорных величин в криволинейных координатах — дифференциальной геометрии.

Как мы видели на примере преобразования метрики при смене координат, аналитический метод подразумевает введение полилинейных скалярных функций в векторном пространстве, что и позволяет получать величины с тензорными свойствами.

§а. Производная Ли по направлению

Рассмотрим инфинитезимальный сдвиг координат векторного пространства

$$r'^{\alpha} = r^{\alpha} + \xi^{\alpha}, \quad \xi^{\alpha} \rightarrow 0. \quad (2.26)$$

Изменение скаляра по направлению ξ с помощью разложения в ряд Тейлора с точностью до членов первого порядка по ξ запишется в виде

$$L_{\xi}f = f(\mathbf{r}') - f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r} + \xi) - f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) + \xi^{\alpha} \partial_{\alpha} f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = \xi^{\alpha} \partial_{\alpha} f(\mathbf{r}). \quad (2.27)$$

В таком случае говорят о производной Ли скаляра по направлению вектора ξ : $L_{\xi}f$.

Рассмотрим ковекторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ и построим инвариант первого порядка малости

$$dF(\mathbf{r}') = a_{\alpha}(\mathbf{r}') dr'^{\alpha}.$$

Используя разложение в ряд Тейлора по ξ и преобразование дифференциалов координат согласно (2.26)

$$\frac{\partial r'^{\alpha}}{\partial r^{\beta}} = \delta_{\beta}^{\alpha} + \partial_{\beta} \xi^{\alpha}, \quad (2.28)$$

найдем

$$dF(\mathbf{r}') = (a_{\alpha}(\mathbf{r}) + \xi^{\gamma} \partial_{\gamma} a_{\alpha}) (\delta_{\beta}^{\alpha} + \partial_{\beta} \xi^{\alpha}) dr^{\beta} = a_{\alpha}(\mathbf{r}) dr^{\alpha} + dr^{\alpha} \xi^{\gamma} \partial_{\gamma} a_{\alpha} + dr^{\beta} a_{\alpha}(\mathbf{r}) \partial_{\beta} \xi^{\alpha}, \quad (2.29)$$

где есть вклад скаляра

$$dF(\mathbf{r}) = a_{\alpha}(\mathbf{r}) dr^{\alpha}.$$

Разность скаляров

$$dF(\mathbf{r}') - dF(\mathbf{r}) = (\xi^{\gamma} \partial_{\gamma} a_{\alpha} + a_{\gamma} \partial_{\alpha} \xi^{\gamma}) dr^{\alpha}$$

является скаляром, а значит, ковектором является величина

$$L_{\xi}a_{\alpha} = \xi^{\gamma} \partial_{\gamma} a_{\alpha} + a_{\gamma} \partial_{\alpha} \xi^{\gamma}, \quad (2.30)$$

которую называют производной Ли ковектора \mathbf{a} по направлению ξ , поскольку

$$a_{\alpha}(\mathbf{r}') dr'^{\alpha} = a_{\alpha}(\mathbf{r}) dr^{\alpha} + L_{\xi}a_{\alpha} dr^{\alpha}.$$

Совершенно аналогично, производная Ли вектора \mathbf{a} по направлению ξ может быть получена при рассмотрении инварианта

$$dG(\mathbf{r}) = a^{\alpha}(\mathbf{r}) \partial_{\alpha},$$

так что

$$a^{\alpha}(\mathbf{r}') \partial'_{\alpha} = a^{\alpha}(\mathbf{r}) \partial_{\alpha} + L_{\xi}a^{\alpha} \partial_{\alpha},$$

где, с учетом преобразования частных производных при $\xi \rightarrow 0$

$$\partial'_{\beta} = \left(\frac{\partial r^{\alpha}}{\partial r'^{\beta}} \right) \partial_{\alpha} = (\delta_{\beta}^{\alpha} - \partial_{\beta} \xi^{\alpha}) \partial_{\alpha}, \quad (2.31)$$

находим

$$L_{\xi}a^{\alpha} = \xi^{\gamma} \partial_{\gamma} a^{\alpha} - a^{\gamma} \partial_{\gamma} \xi^{\alpha}. \quad (2.32)$$

Заметим, что производная Ли вектора ξ по направлению ξ тождественно равна нулю.

Наглядное представление о производной Ли вектора по направлению состоит в следующем: вектор в точке \mathbf{r}' и в точке \mathbf{r} записывается в разных базисах, штрихованном и нештрихованном, соответственно, а значит, он в этих точках при замене базиса преобразуется совершенно разными матрицами, заданными в разных точках, т.е. из векторов в штрихованной и нештрихованной точках посредством операции сложения (вычитания) невозможно составить объект, являющийся тензорной величиной с соответствующим законом преобразования в заданной точке, и поэтому для сравнения векторов необходимо разложить штрихованный базис по исходному, нештрихованному и получить таким образом компоненты вектора в нештрихованном базисе. Такое разложение по исходному базису называют параллельным переносом вектора из штрихованной точки в не штрихованную. Тогда перенесенный параллельно в нештрихованную точку вектор преобразуется по закону вектора в этой точке, но, при этом, результат параллельного переноса не совпадает с исходным вектором в этой точке, и различие определяется производной Ли.

Для тензоров вычисление производных Ли сводится к правилам (2.30) и (2.32) по каждому индексу. Так, например, для ковариантного тензора второго ранга, скажем, метрики эта производная имеет вид

$$L_{\xi}g_{\alpha\beta} = \xi^{\gamma} \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta} + g_{\gamma\beta} \partial_{\alpha} \xi^{\gamma} + g_{\alpha\gamma} \partial_{\beta} \xi^{\gamma}. \quad (2.33)$$

§b. Ковариантная производная

Рассмотрим производную Ли вектора a^α по направлению базисного вектора ϵ_μ , т.е. в выражении (2.32) проведем подстановку $\xi \mapsto \epsilon_\mu$:

$$L_\mu a^\alpha = \epsilon_\mu^\gamma \partial_\gamma a^\alpha - a^\gamma \partial_\gamma \epsilon_\mu^\alpha. \quad (2.34)$$

Как мы видели на примере базиса в сферических координатах, производные базисных векторов при смещении координат $\partial_\gamma \epsilon_\mu^\alpha$, вообще говоря, не равны нулю. Для аналитического вычисления таких производных, введем базис в пространстве ковекторов, \mathfrak{h}^ν , согласно условию ортонормированности

$$\epsilon_\mu^\alpha \mathfrak{h}_\alpha^\nu = \epsilon_\mu \cdot \mathfrak{h}^\nu = \delta_\mu^\nu. \quad (2.35)$$

Смысл величин ϵ_μ^α и \mathfrak{h}_α^ν ясен: это — «альфты» координаты «мютого» базисного вектора в самом базисе векторов и «нютого» базисного ковектора в самом базисе ковекторов, соответственно, т.е. это — просто единичные матрицы по указанным индексам. Отсюда следует еще одно тождество:

$$\epsilon_\mu^\alpha \mathfrak{h}_\beta^\mu = \delta_\beta^\alpha. \quad (2.36)$$

Тогда производную Ли (2.34) можно записать в виде

$$L_\mu a^\alpha = \epsilon_\mu^\gamma \partial_\gamma a^\alpha - \epsilon_\mu^\gamma \mathfrak{h}_\gamma^\nu a^\beta \partial_\beta \epsilon_\nu^\alpha = \epsilon_\mu^\gamma (\partial_\gamma a^\alpha - \mathfrak{h}_\gamma^\nu a^\beta \partial_\beta \epsilon_\nu^\alpha). \quad (2.37)$$

В итоге, мы получили разложение по базису ϵ_μ вектора производной Ли по направлению базисного вектора, и следовательно, можно ввести понятие о тензоре ковариантной производной вектора:

$$\nabla_\gamma a^\alpha = \partial_\gamma a^\alpha - a^\beta \mathfrak{h}_\gamma^\nu \partial_\beta \epsilon_\nu^\alpha. \quad (2.38)$$

Поскольку

$$\mathfrak{h}_\gamma^\nu \partial_\beta \epsilon_\nu^\alpha = \partial_\beta (\mathfrak{h}_\gamma^\nu \epsilon_\nu^\alpha) - \epsilon_\nu^\alpha \partial_\beta \mathfrak{h}_\gamma^\nu = \partial_\beta (\delta_\gamma^\alpha) - \epsilon_\nu^\alpha \partial_\beta \mathfrak{h}_\gamma^\nu = -\epsilon_\nu^\alpha \partial_\beta \mathfrak{h}_\gamma^\nu,$$

можно записать, что

$$-\mathfrak{h}_\gamma^\nu \partial_\beta \epsilon_\nu^\alpha = \frac{1}{2} \{ \epsilon_\nu^\alpha \partial_\beta \mathfrak{h}_\gamma^\nu + \epsilon_\nu^\alpha \partial_\gamma \mathfrak{h}_\beta^\nu \} + \frac{1}{2} \{ \epsilon_\nu^\alpha \partial_\beta \mathfrak{h}_\gamma^\nu - \epsilon_\nu^\alpha \partial_\gamma \mathfrak{h}_\beta^\nu \} = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + T_{\beta\gamma}^\alpha, \quad (2.39)$$

где мы выделили симметричную по перестановкам ковариантных индексов часть $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$ и антисимметричную часть $T_{\beta\gamma}^\alpha = -T_{\gamma\beta}^\alpha$, которые называются симметричной связностью и кручением (торсионной связностью), соответственно.

Наглядный смысл кручения

$$T_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} \{ \epsilon_\nu^\alpha \partial_\beta \mathfrak{h}_\gamma^\nu - \epsilon_\nu^\alpha \partial_\gamma \mathfrak{h}_\beta^\nu \}. \quad (2.40)$$

можно выяснить, если ввести в пространстве координатную сетку, так что в ковариантном пространстве базис задается градиентами к линиям координатной сетки с постоянной координатой:

$$\mathfrak{h}_\beta^\nu = \partial_\beta X^\nu,$$

где X^ν — это «нютая» функция линии координатной сетки $X^\nu = \text{const.}$, в которой все аргументы, кроме «нютого», принимают значения на поверхности с фиксированным значением «нютой» координаты, а константа может зависеть от точки в пространстве. Величина

$$\epsilon_1 \epsilon_2 \partial_\beta \mathfrak{h}_\gamma^\nu$$

задает сдвиг координатной сетки сначала по направлению «гамма» базисного вектора с номером «ню» на бесконечно малый шаг ϵ_1 , а затем сдвиг координатной сетки в направлении «бета» на бесконечно малый шаг ϵ_2 . Величина

$$\epsilon_1 \epsilon_2 \partial_\gamma \mathfrak{h}_\beta^\nu$$

задает сдвиг координатной сетки сначала по направлению «бета» базисного вектора с номером «ню» на бесконечно малый шаг ϵ_2 , а затем сдвиг координатной сетки в направлении «гамма» на бесконечно малый шаг ϵ_1 . Если в пространстве действительно можно ввести не только базис в каждой точке, но и координатную сетку, то разность указанных выше величин, равна

$$\epsilon_1 \epsilon_2 (\partial_\beta \partial_\gamma - \partial_\gamma \partial_\beta) X^\nu \equiv 0,$$

так как частное дифференцирование перестановочно. Таким образом, кручение тождественно равно нулю в пространствах, в которых можно ввести координатную сетку. Если кручение не равно нулю, то базисные векторы не являются градиентами линий постоянных координат, т.е. градиентами к линиям координатной сетки, а значит, саму эту координатную сетку невозможно ввести: такие геометрические пространства называются неинтегрируемыми, или неголономными.

Задача 7. На евклидовой плоскости найдите базис $\mathfrak{h}^{1,2}$ ковариантного пространства, выразив его через базис векторного пространства, который задан в виде

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{e}_x + \frac{1}{2} \mathbf{e}_y.$$

Запишите метрику в заданном базисе векторного пространства. Используйте метод определения ковариантного базиса соотношениями ортонормировки и метод градиента к линии постоянной координаты.

Мы будем исследовать голономные пространства, т.е. пространства с координатной сеткой, а значит, с нулевым кручением. Тогда ковариантная производная вектора может быть записана в терминах симметричной связности:

$$\nabla_\gamma a^\alpha = \partial_\gamma a^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha a^\beta, \quad \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} \{ \mathbf{e}_\nu^\alpha \partial_\beta \mathfrak{h}_\gamma^\nu + \mathbf{e}_\nu^\alpha \partial_\gamma \mathfrak{h}_\beta^\nu \}. \quad (2.41)$$

Связность можно выразить через метрику пространства. Для этого опустим индекс $\Gamma_{\alpha|\beta\gamma} = g_{\alpha\alpha'} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha'}$ и запишем тождество

$$\Gamma_{\alpha|\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \mathfrak{h}_\gamma^\nu \partial_\beta (g_{\alpha\alpha'} \mathbf{e}_\nu^{\alpha'}) + \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \mathfrak{h}_\beta^\nu \partial_\gamma (g_{\alpha\alpha'} \mathbf{e}_\nu^{\alpha'}) \right\}, \quad (2.42)$$

поскольку, согласно (2.36),

$$g_{\alpha\alpha'} \mathbf{e}_\mu^{\alpha'} \mathfrak{h}_\beta^\mu = g_{\alpha\alpha'} \delta_\beta^{\alpha'} = g_{\alpha\beta}.$$

Для вычисления производных вида

$$\partial_\gamma (g_{\alpha\alpha'} \mathbf{e}_\nu^{\alpha'}) = \partial_\gamma \mathbf{e}_{\alpha\nu},$$

воспользуемся тем, что базисы в векторном и ковариантном пространствах относятся к одной и той же координатной сетке, а значит,

$$\mathbf{e}_{\alpha\nu}(\mathbf{r}) = g_{\nu\nu'}^{(0)} \mathfrak{h}_\alpha^{\nu'}(\mathbf{r}), \quad (2.43)$$

где $g_{\nu\nu'}^{(0)}$ — метрика в фиксированной точке, рассматриваемого пространства, которую можно считать началом отсчета координатной сетки, в отличие от базисных контр- и ко-векторов, которые изменяются при сдвиге координат и имеют ненулевые частные производные⁵. Независимость $g_{\nu\nu'}^{(0)}$ от сдвигов отвечает тому, что мы разлагаем векторы по фиксированному базису в заданной точке: коэффициенты разложения зависят от сдвига, а базис разложения зафиксирован. Тогда, в силу равенства нулю кручения, можно переставить индексы частной производной и частного дифференцирования:

$$\partial_\gamma \mathbf{e}_{\alpha\nu} = \partial_\gamma \left\{ g_{\nu\nu'}^{(0)} \mathfrak{h}_\alpha^{\nu'}(\mathbf{r}) \right\} = g_{\nu\nu'}^{(0)} \partial_\gamma \left\{ \mathfrak{h}_\alpha^{\nu'}(\mathbf{r}) \right\} = g_{\nu\nu'}^{(0)} \partial_\alpha \left\{ \mathfrak{h}_\gamma^{\nu'}(\mathbf{r}) \right\} = \partial_\alpha \mathbf{e}_{\gamma\nu},$$

так что кручение обращается в нуль и для базиса $\mathbf{e}_{\alpha\nu}$:

$$g_{\nu\nu'}^{(0)} T_{\gamma\alpha}^{\nu'} = \partial_\gamma \mathbf{e}_{\alpha\nu} - \partial_\alpha \mathbf{e}_{\gamma\nu} = 0,$$

и связность запишется в виде

$$\Gamma_{\alpha|\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_\beta g_{\alpha\gamma} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \mathfrak{h}_\gamma^\nu \partial_\alpha \mathbf{e}_{\beta\nu} - \mathfrak{h}_\beta^\nu \partial_\alpha \mathbf{e}_{\gamma\nu} \right\}. \quad (2.44)$$

Поскольку

$$\mathfrak{h}_\gamma^\nu \mathbf{e}_{\beta\nu} = g_{\gamma\beta},$$

⁵ Компоненты «нютового» базисного вектора преобразуются стандартно согласно закону $\mathbf{e}_\nu^\alpha(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\nu^\beta(\mathbf{r}_0) \cdot \partial r^\alpha / \partial r_0^\beta$, где в исходной фиксированной точке \mathbf{r}_0 компоненты базисного вектора, как мы уже говорили выше, $\mathbf{e}_\nu^\beta(\mathbf{r}_0) = \delta_\nu^\beta$, так что в пространстве с координатной сеткой $\mathbf{e}_\nu^\alpha(\mathbf{r}) = \partial r^\alpha / \partial r_0^\nu$, откуда для ковариантного тензора второго ранга $g_{\mu\nu}^{(0)} \equiv g_{\mu\nu}(\mathbf{r}_0) = g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_0) \mathbf{e}_\mu^\alpha(\mathbf{r}_0) \mathbf{e}_\nu^\beta(\mathbf{r}_0)$. Аналогично $\mathfrak{h}_\nu^\alpha(\mathbf{r}) = \partial r_0^\alpha / \partial r^\nu$, так что $g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = g_{\mu\nu}(\mathbf{r}_0) \mathfrak{h}_\alpha^\mu(\mathbf{r}) \mathfrak{h}_\beta^\nu(\mathbf{r})$. И мы констатируем, что индексы типа «альфа» опускаются и поднимаются метрическим тензором в точке \mathbf{r} , а индексы типа «ню» опускаются и поднимаются метрическим тензором в фиксированной точке \mathbf{r}_0 .

найдем

$$\Gamma_{\alpha|\beta\gamma} = \frac{1}{2} \{ \partial_\beta g_{\alpha\gamma} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \epsilon_{\beta\nu} \partial_\alpha h_\gamma^\nu - h_\beta^\nu \partial_\alpha \epsilon_{\gamma\nu} \}. \quad (2.45)$$

Так как базисы связаны согласно (2.43),

$$\epsilon_{\beta\nu} \partial_\alpha h_\gamma^\nu - h_\beta^\nu \partial_\alpha \epsilon_{\gamma\nu} = g_{\nu\nu'}^{(0)} \{ h_\beta^{\nu'} \partial_\alpha h_\gamma^\nu - h_\beta^\nu \partial_\alpha h_\gamma^{\nu'} \} \equiv 0.$$

Поэтому окончательно в случае нулевого кручения находим симметричную связность, которая задается исключительно метрикой пространства, и поэтому называется метрической связностью или символами Кристоффеля,

$$\Gamma_{\alpha|\beta\gamma} = \frac{1}{2} \{ \partial_\beta g_{\alpha\gamma} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma} \}, \quad \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha'} \{ \partial_\beta g_{\alpha'\gamma} + \partial_\gamma g_{\alpha'\beta} - \partial_{\alpha'} g_{\beta\gamma} \}, \quad (2.46)$$

а ковариантная производная вектора

$$\nabla_\gamma a^\alpha = \partial_\gamma a^\alpha + a^\beta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha, \quad (2.47)$$

и для ковектора аналогично

$$\nabla_\gamma a_\alpha = \partial_\gamma a_\alpha - a_\beta \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta. \quad (2.48)$$

Для тензорных величин вычисление ковариантной производной дает тензорную величину на ранг выше, где связность входит в сумму членов по каждому из индексов также, как и для индекса вектора или ковектора. В частности, для метрики

$$\nabla_\gamma g_{\mu\nu} = \partial_\gamma g_{\mu\nu} - g_{\mu\beta} \Gamma_{\gamma\nu}^\beta - g_{\beta\nu} \Gamma_{\gamma\mu}^\beta, \quad (2.49)$$

и, подставляя символы Кристоффеля, найдем

$$\nabla_\gamma g_{\mu\nu} = \partial_\gamma g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \{ \partial_\nu g_{\mu\gamma} + \partial_\gamma g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\gamma} \} - \frac{1}{2} \{ \partial_\mu g_{\nu\gamma} + \partial_\gamma g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\mu\gamma} \} \equiv 0,$$

т.е. ковариантная производная метрики с метрической связностью тождественно обращается в нуль.

Задача 8. Вычислите символы Кристоффеля для евклидовой метрики в сферических координатах.

Задача 9. Найти закон преобразования метрической связности при замене координат.

Задача 10. Докажите тождество для ковариантной дивергенции вектора

$$\nabla_\alpha A^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\alpha \{ \sqrt{g} A^\alpha \}$$

где $g = \det g_{\alpha\beta}$, т.е. детерминант метрики, для которого $\delta g = g g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}$.

Задача 11. С помощью задачи 10 докажите, что квадрат оператора ∇ сводится к оператору Бельтрами-Лапласа:

$$g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\alpha \{ g^{\alpha\beta} \sqrt{g} \partial_\beta \},$$

по крайней мере, при действии на скаляр.

Задача 12. Вычислите оператор Лапласа в сферических координатах из выражения для оператора Бельтрами.

Задача 13. В ортогональной системе координат метрика имеет диагональный вид $g_{\alpha\beta} = \text{diag}(H_1^2, H_2^2, H_3^2)$, где H_k называют коэффициентами Ламе. Запишите оператор Бельтрами-Лапласа через коэффициенты Ламе.

§с. Векторы Киллинга

В выражении для производной Ли метрики по направлению ξ (см. (2.33)) подставим вместо частных производных вектора выражение через ковариантную производную и связность

$$\partial_\alpha \xi^\gamma = \nabla_\alpha \xi^\gamma - \xi^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\gamma,$$

так что

$$L_{\xi}g_{\alpha\beta} = \xi^{\gamma}\partial_{\gamma}g_{\alpha\beta} + g_{\gamma\beta}\partial_{\alpha}\xi^{\gamma} + g_{\alpha\gamma}\partial_{\beta}\xi^{\gamma} = \xi^{\gamma}\partial_{\gamma}g_{\alpha\beta} + g_{\gamma\beta}\{\nabla_{\alpha}\xi^{\gamma} - \xi^{\lambda}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\gamma}\} + g_{\gamma\alpha}\{\nabla_{\beta}\xi^{\gamma} - \xi^{\lambda}\Gamma_{\beta\lambda}^{\gamma}\}. \quad (2.50)$$

Но так как ковариантная производная метрики равна нулю, можно внести метрику под знак ковариантного дифференцирования,

$$g_{\gamma\beta}\nabla_{\alpha}\xi^{\gamma} = \nabla_{\alpha}\{g_{\gamma\beta}\xi^{\gamma}\} = \nabla_{\alpha}\xi_{\beta},$$

в то время как

$$-g_{\gamma\beta}\xi^{\lambda}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\gamma} - g_{\gamma\alpha}\xi^{\lambda}\Gamma_{\beta\lambda}^{\gamma} = -\frac{1}{2}\xi^{\lambda}\{\partial_{\alpha}g_{\beta\lambda} + \partial_{\lambda}g_{\alpha\beta} - \partial_{\beta}g_{\alpha\lambda} + \partial_{\beta}g_{\alpha\lambda} + \partial_{\lambda}g_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha}g_{\beta\lambda}\} = -\xi^{\lambda}\partial_{\lambda}g_{\alpha\beta}.$$

В итоге, тензор производной Ли для метрики выражается через ковариантные производные вектора направления ξ ,

$$L_{\xi}g_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha}\xi_{\beta} + \nabla_{\beta}\xi_{\alpha}. \quad (2.51)$$

Вектором Киллинга называют вектор сдвига, для которого производная Ли метрики обращается в нуль:

$$L_{\xi}g_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha}\xi_{\beta} + \nabla_{\beta}\xi_{\alpha} = 0. \quad (2.52)$$

Таким образом, вектор Киллинга задает бесконечно малые преобразования координат, относительно которых метрика остается инвариантной, т.е. инфинитезимальные преобразования изометрии. Решения уравнения (2.52) используются для поиска симметрий пространств со сложной метрикой.

Задача 14. Найдите векторы Киллинга для евклидовой метрики трехмерного пространства в декартовых координатах.

§d. Ковариантные уравнения Эйлера–Лагранжа

В криволинейных координатах действие нерелятивистской частицы – скаляр – запишется в виде

$$S = \int dt \left\{ \frac{1}{2} m g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) v^{\alpha} v^{\beta} - U(\mathbf{r}) \right\}. \quad (2.53)$$

Из-за того, что метрика теперь зависит от координат, производная функции Лагранжа равна

$$\partial_{\gamma}L = -\partial_{\gamma}U + \frac{1}{2} m v^{\alpha} v^{\beta} \partial_{\gamma}g_{\alpha\beta},$$

что приведет к уравнениям Эйлера–Лагранжа,

$$m \frac{d}{dt} g_{\gamma\beta} v^{\beta} = -\partial_{\gamma}U + \frac{1}{2} m v^{\alpha} v^{\beta} \partial_{\gamma}g_{\alpha\beta}. \quad (2.54)$$

Рассмотрим скорость как функцию координат на траектории. Тогда

$$\frac{d}{dt} g_{\gamma\beta} v^{\beta} = \frac{dr^{\alpha}}{dt} \partial_{\alpha} \{g_{\gamma\beta} v^{\beta}\} = v^{\alpha} \{v^{\beta} \partial_{\alpha} g_{\gamma\beta} + g_{\gamma\beta} \partial_{\alpha} v^{\beta}\}.$$

Так как тензор $v^{\alpha} v^{\beta}$ симметричен по перестановкам индексов, в его свертку с другим тензором даст вклад только симметричная часть тензора:

$$v^{\alpha} v^{\beta} \partial_{\alpha} g_{\gamma\beta} = v^{\alpha} v^{\beta} \frac{1}{2} \{\partial_{\alpha} g_{\gamma\beta} + \partial_{\beta} g_{\gamma\alpha}\}.$$

Собирая все члены с массой, найдем

$$m v^{\alpha} \left(g_{\gamma\beta} \partial_{\alpha} v^{\beta} + v^{\beta} \frac{1}{2} \{\partial_{\alpha} g_{\gamma\beta} + \partial_{\beta} g_{\gamma\alpha} - \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta}\} \right) = -\partial_{\gamma}U. \quad (2.55)$$

Здесь легко заметить символы Кристоффеля, так что

$$m v^{\alpha} (g_{\gamma\beta} \partial_{\alpha} v^{\beta} + v^{\beta} \Gamma_{\gamma|\alpha\beta}) = -\partial_{\gamma}U, \quad (2.56)$$

т.е.

$$m v^{\alpha} g_{\gamma\beta} \left(\partial_{\alpha} v^{\beta} + v^{\beta'} \Gamma_{\alpha\beta'}^{\beta} \right) = -\partial_{\gamma}U \quad \Rightarrow \quad m v^{\alpha} g_{\gamma\beta} \nabla_{\alpha} v^{\beta} = -\partial_{\gamma}U. \quad (2.57)$$

Поскольку ковариантная производная метрики с метрической связностью равна нулю, а частная производная скаляра совпадает с ковариантной производной скаляра, приходим к ковариантным уравнениям Эйлера–Лагранжа для нерелятивистской частицы в криволинейных координатах:

$$m v^{\alpha} \nabla_{\alpha} v_{\gamma} = -\nabla_{\gamma}U. \quad (2.58)$$

§е. Тензор Римана

Если пространство евклидово, то существует декартов базис, в котором метрическая связность обращается в нуль во всех точках пространства и ковариантная производная сводится к частной производной $\nabla_\alpha \mapsto \partial_\alpha$, а значит,

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) a_\gamma \mapsto (\partial_\alpha \partial_\beta - \partial_\beta \partial_\alpha) a_\gamma \equiv 0,$$

поскольку частное дифференцирование перестановочно. Поэтому, для того чтобы узнать, является ли пространство евклидовым в заданных координатах, необходимо просто вычислить действие коммутатора ковариантных производных на вектор, что даст тензор третьего ранга:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] a_\gamma \equiv (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) a_\gamma. \quad (2.59)$$

Буквально

$$\nabla_\beta a_\gamma = \partial_\beta a_\gamma - a_\lambda \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda,$$

и

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta a_\gamma = \partial_\alpha (\partial_\beta a_\gamma - a_\lambda \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda) - (\partial_{\lambda'} a_\gamma - a_\lambda \Gamma_{\lambda'\gamma}^\lambda) \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda'} - (\partial_\beta a_{\lambda'} - a_\lambda \Gamma_{\beta\lambda'}^\lambda) \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda'},$$

откуда

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] a_\gamma = -\partial_\alpha (a_\lambda \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda) + \partial_\beta (a_\lambda \Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda) - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda'} \partial_\beta a_{\lambda'} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda'} \partial_\alpha a_{\lambda'} + a_\lambda (\Gamma_{\beta\lambda'}^\lambda \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda'} - \Gamma_{\alpha\lambda'}^\lambda \Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda'}).$$

В итоге,

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] a_\gamma = a_\lambda (\partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda - \partial_\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda + \Gamma_{\beta\lambda'}^\lambda \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda'} - \Gamma_{\alpha\lambda'}^\lambda \Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda'}). \quad (2.60)$$

Тензор четвертого ранга

$$R_{\gamma\alpha\beta}^\lambda = \partial_\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda + \Gamma_{\alpha\lambda'}^\lambda \Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda'} - \Gamma_{\beta\lambda'}^\lambda \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda'} \quad (2.61)$$

называют тензором кривизны Римана: в случае метрической связности действие коммутатора ковариантных производных на ковектор выражается через тензор Римана,

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] a_\gamma = -a_\lambda R_{\gamma\alpha\beta}^\lambda. \quad (2.62)$$

Аналогично устанавливаем, что в случае вектора

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] a^\gamma = a^\lambda R_{\lambda\alpha\beta}^\gamma. \quad (2.63)$$

Обычно тензор Римана записывают в виде

$$R_{\gamma\lambda\alpha\beta} = g_{\gamma\gamma'} R_{\lambda\alpha\beta}^{\gamma'}.$$

Этот тензор по построению антисимметричен по перестановкам нижних индексов $\alpha \leftrightarrow \beta$. При подстановке метрической связности устанавливается также, что он антисимметричен и относительно перестановки $\gamma \leftrightarrow \lambda$, а также симметричен относительно перестановки пар индексов $\{\gamma\lambda\} \leftrightarrow \{\alpha\beta\}$.

Тензор Риччи задается сверткой

$$R_{\lambda\beta} = g^{\gamma\alpha} R_{\gamma\lambda\alpha\beta}, \quad (2.64)$$

а скалярная кривизна

$$R = g^{\lambda\beta} R_{\lambda\beta}. \quad (2.65)$$

Задача 15. На сфере радиуса a (метрика: $dC^2 = a^2 \{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2\}$) вычислите тензоры Римана и Риччи, а также скалярную кривизну.

Итак, в евклидовом пространстве тензор Римана обращается в нуль тождественно, во всех точках. В римановом пространстве этот тензор отличен от тождественного нуля.

Наглядный геометрический смысл тензора кривизны становится виден, если вычислить ковектор, который получается при параллельном переносе следующим образом:

- параллельный перенос в точку $\mathbf{r} + d\mathbf{r}_1$ дает ковектор

$$a_\gamma(\mathbf{r} + d\mathbf{r}_1) = a_\gamma(\mathbf{r}) + dr_1^\beta \nabla_\beta a_\gamma(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!} dr_1^\beta dr_1^\alpha \nabla_\beta \nabla_\alpha a_\gamma(\mathbf{r}),$$

- последующий параллельный перенос в точку $[\mathbf{r} + d\mathbf{r}_1] + d\mathbf{r}_2$ дает ковектор

$$a_\gamma([\mathbf{r} + d\mathbf{r}_1] + d\mathbf{r}_2) = a_\gamma(\mathbf{r}) + dr_1^\beta \nabla_\beta a_\gamma(\mathbf{r}) + dr_2^\alpha \nabla_\alpha a_\gamma(\mathbf{r}) + dr_2^\alpha dr_1^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta a_\gamma(\mathbf{r}) + \mathcal{O}(d^2 r),$$

где символом $\mathcal{O}(d^2 r)$ мы обозначили симметричные квадратичные вклады относительно сдвигов,

- аналогичный двухшаговый параллельный перенос в эту же точку $[\mathbf{r} + d\mathbf{r}_2] + d\mathbf{r}_1$ дает ковектор

$$a_\gamma([\mathbf{r} + d\mathbf{r}_2] + d\mathbf{r}_1) = a_\gamma(\mathbf{r}) + dr_1^\beta \nabla_\beta a_\gamma(\mathbf{r}) + dr_2^\alpha \nabla_\alpha a_\gamma(\mathbf{r}) + dr_2^\alpha dr_1^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta a_\gamma(\mathbf{r}) + \mathcal{O}(d^2 r),$$

где симметричный вклад $\mathcal{O}(d^2 r)$ в точности повторяет слагаемое в выражении с другим порядком параллельного переноса, так что

- разность ковекторов, полученных параллельным переносом в одну и ту же точку по разным путям, во втором порядке малости относительно сдвигов равна

$$\delta a_\gamma(\mathbf{r} + d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2) = dr_2^\alpha dr_1^\beta [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] a_\gamma(\mathbf{r}) = -dr_2^\alpha dr_1^\beta R_{\gamma\alpha\beta}^\lambda a_\lambda(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} (dr_1^\alpha dr_2^\beta - dr_1^\beta dr_2^\alpha) R_{\gamma\alpha\beta}^\lambda a_\lambda(\mathbf{r}),$$

т.е. она пропорциональна тензору кривизны Римана и тензору площади ориентированного параллелограмма с образующими гранями, заданными векторами сдвигов,

$$d^2 \sigma^{\alpha\beta} = dr_1^\alpha dr_2^\beta - dr_1^\beta dr_2^\alpha.$$

а значит,

$$\delta a_\gamma = \frac{1}{2} d^2 \sigma^{\alpha\beta} R_{\gamma\alpha\beta}^\lambda a_\lambda. \quad (2.66)$$

К тому же результату мы придем, если произвести параллельный перенос вектора вдоль этого же параллелограмма в исходную точку: разность векторов до и после переноса задается (2.66). Таким образом, искривленное пространство означает изменение вектора после параллельного переноса по бесконечно малому замкнутому пути, причем результат переноса отличается на величину, пропорциональную тензору кривизны Римана и площади петли.

Лекция № 5

Интегрирование векторов по замкнутым путям и поверхностям, теоремы Гаусса и Стокса, дифференциальные формы в евклидовом пространстве, внешнее произведение и внешнее дифференцирование, дивергенция и ротор в терминах дифференциальных форм, замкнутые и точные дифференциальные формы, формула Ньютона–Лейбница для дифференциальных форм. Суперпозиция электрического и магнитного полей, сила Лоренца, закон Кулона для точечного заряда, поток электрического поля через сферу, теорема Гаусса и закон Кулона в дифференциальной форме. Закон сохранения заряда в локальной форме и в 4-компонентных обозначениях, плотность тока, стационарные токи, закон Био–Савара в интегральной и локальной формах, закон индукции, теорема Стокса и локальная форма закона электромагнитной индукции, магнитные заряды в электродинамике Максвелла, ток смещения и система уравнений Максвелла в вакууме.

11.6. Теорема Гаусса

Рассмотрим интеграл вектора \mathcal{A} по замкнутой ориентированной поверхности $\Sigma = \partial V$, которая является границей объема V ,

$$\oint_{\partial V} \mathcal{A} \cdot d^2 \sigma.$$

Вектор элемента площади $d^2 \sigma$ ортогонален поверхности и направлен во вне объема.

Этот объем можно заполнить бесконечно малыми кубиками, так что интегралы по соприкасающимся граням кубика будут взаимно сокращаться, поскольку значение вектора на гранях одно и то же, а вектора площади граней направлены в противоположные стороны, и, в итоге, сумма интегралов по поверхности кубиков сведется к сумме по внешним граням, совпадающей с исходным интегралом по поверхности объема. Следовательно, для вычисления всего интеграла достаточно рассмотреть интеграл по поверхности бесконечно малого кубика ∂V_{\square} .

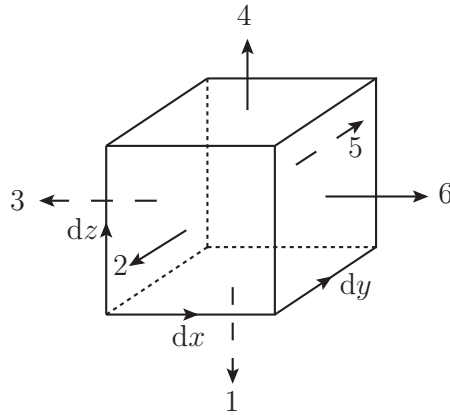


Рис. 2.2: Вычисление интеграла от вектора по поверхности бесконечно малого куба. Показаны члены суммирования 1, 2, 3, 4, 5, 6 с направлениями ориентированных площадей.

В точке \mathbf{r} поле имеет значение $\mathcal{A}(\mathbf{r})$. Тогда интеграл по поверхности кубика есть сумма по шести его граням (см. рис. 2.2, где указан порядок суммирования по граням)

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial V_{\square}} \mathcal{A} \cdot d^2\sigma &= -dx dy \mathcal{A}_z(\mathbf{r}) - dx dz \mathcal{A}_y(\mathbf{r}) - dy dz \mathcal{A}_x(\mathbf{r}) \\
 &\quad + dx dy \mathcal{A}_z(\mathbf{r} + dz\mathbf{e}_z) + dx dz \mathcal{A}_y(\mathbf{r} + dy\mathbf{e}_y) + dz dy \mathcal{A}_x(\mathbf{r} + dz\mathbf{e}_x) \\
 &= dx dy dz \{ \partial_x \mathcal{A}_x(\mathbf{r}) + \partial_y \mathcal{A}_y(\mathbf{r}) + \partial_z \mathcal{A}_z(\mathbf{r}) \} \\
 &= dx dy dz \nabla \cdot \mathcal{A}(\mathbf{r}) = \int_{V_{\square}} d^3r \nabla \cdot \mathcal{A}(\mathbf{r}).
 \end{aligned}$$

В итоге, суммирование по бесконечно малым кубикам приводит к общей теореме Гаусса: поток вектора через замкнутую поверхность равен интегралу дивергенции вектора по объему, который охватывает эта поверхность,

$$\oint_{\partial V} \mathcal{A} \cdot d^2\sigma = \int_V d^3r \nabla \cdot \mathcal{A} = \int_V d^3r \operatorname{div} \mathcal{A}. \quad (2.67)$$

11.7. Теорема Стокса

Рассмотрим интеграл вектора \mathcal{A} по замкнутому контуру $C = \partial\Sigma$, который является границей поверхности Σ ,

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathcal{A} \cdot d\mathcal{C}.$$

Вектор элемента контура $d\mathcal{C}$ направлен по касательной к контуру.

Разобьем поверхность Σ на бесконечно малые квадраты. Тогда сумма интегралов вектора по границам этих квадратов сведется к исходному контурному интегралу, поскольку, как и в случае с разбиением объема на кубы в предыдущем разделе, интегралы по соприкасающимся ребрам квадратов дают в сумме нуль, так как значение поля на ребрах одинаково, но касательные взаимно противоположно направлены. Значит, достаточно рассмотреть интеграл от вектора по ребрам бесконечно малого квадрата $\partial\Sigma_{\square}$ на плоскости (x, y) с ориентацией контура против часовой стрелки (см. рис. 2.3, где указаны

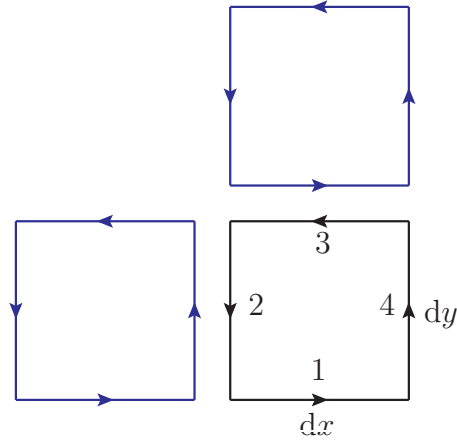


Рис. 2.3: Вычисление интеграла от вектора по контуру бесконечно малого квадрата. Показаны члены суммирования 1, 2, 3, 4 и соседние квадраты на поверхности.

последовательные члены суммы в интеграле):

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial\Sigma_{\square}} \mathcal{A} \cdot d\mathcal{C} &= +dx \mathcal{A}_x(\mathbf{r}) - dy \mathcal{A}_y(\mathbf{r}) \\
 &\quad -dx \mathcal{A}_x(\mathbf{r} + dy\mathbf{e}_y) + dy \mathcal{A}_y(\mathbf{r} + dx\mathbf{e}_x) \\
 &= dx dy \{ \partial_x \mathcal{A}_y(\mathbf{r}) - \partial_y \mathcal{A}_x(\mathbf{r}) \} \\
 &= d^2\sigma_z (\nabla \times \mathcal{A}(\mathbf{r}))_z = \int_{\Sigma_{\square}} d^2\sigma \cdot \text{rot}\mathcal{A}(\mathbf{r}).
 \end{aligned}$$

Здесь мы согласовали ориентацию контура и элемента площади поверхности. Ясно, что точно такой же результат получится, если квадрат находится в других плоскостях: (y, z) или (z, x) , лишь бы обход по направляющим контура образовывал с вектором ориентированной площади правую тройку, так что рассмотрение становится универсальным.

А значит, имеет место теорема Стокса: интеграл вектора по замкнутому контуру равен потоку ротора этого вектора через поверхность, границей которой служит контур,

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathcal{A} \cdot d\mathcal{C} = \int_{\Sigma} d^2\sigma \cdot \text{rot}\mathcal{A}(\mathbf{r}). \quad (2.68)$$

12. Дифференциальные формы и интегрирование

§а. Ориентированная площадь и внешнее произведение

Бесконечно малый элемент площади $d^2\sigma$ ориентированной поверхности в 3-мерном евклидовом пространстве задается как векторное произведение образующих параллелограмма $d\mathbf{a}$ и $d\mathbf{b}$,

$$d^2\sigma = d\mathbf{a} \times d\mathbf{b}, \quad (2.69)$$

так как модуль этого вектора равен площади параллелограмма

$$|d^2\sigma| = |d\mathbf{a}| |d\mathbf{b}| \sin \theta,$$

где θ — угол между образующими, и вектор площади направлен по нормали к поверхности (см. рис. 2.4). В индексных обозначениях

$$d^2\sigma_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} da^{\beta} db^{\gamma}.$$

Составим скалярное произведение

$$\omega = \boldsymbol{\omega} \cdot d^2\sigma = \omega^{\alpha} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} da^{\beta} db^{\gamma},$$

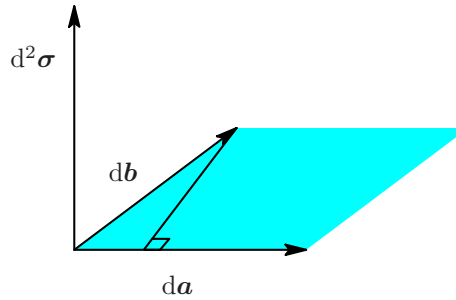


Рис. 2.4: Ориентированная площадь параллелограмма.

которое по построению является величиной, инвариантной при замене переменных (оно не зависит от поворотов и т.п.). Это скалярное произведение можно рассматривать как функцию, линейную по двум ее аргументам:

$$\omega = \omega(\mathbf{da}, \mathbf{db}).$$

Значения этой функции определяются тензором

$$\tilde{\omega}_{\beta\gamma} = \omega^\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma},$$

антисимметричным по перестановке своих индексов. Из определения векторного произведения следует, что и ω — антисимметричная скалярная функция,

$$\omega(\mathbf{da}, \mathbf{db}) = -\omega(\mathbf{db}, \mathbf{da}).$$

Такую функцию $\omega(\mathbf{da}, \mathbf{db})$ называют *дифференциальной 2-формой* (по количеству аргументов). Обобщение на случай n -мерного пространства довольно прозрачно: необходимо построить скалярную полилинейную функцию, антисимметричную по своим аргументам; если аргументов $k \leq n$, то эта функция — k -форма. Смысл такой формы очевиден: она представляет собой ориентированную площадь k -мерной поверхности в n -мерном пространстве (объем k -мерного параллелепипеда), скалярно умноженную на тензор ранга $n - k$ (у ориентированной площади $n - k$ индексов, так как она получается при свертке n -мерного тензора Леви-Чивиты с k бесконечно малыми векторами образующих на поверхности).

Итак,

$$\omega(\mathbf{da}, \mathbf{db}) = \tilde{\omega}_{\beta\gamma} da^\beta db^\gamma,$$

где в произведение дифференциалов ненулевой вклад дает только антисимметричная часть

$$da^{[\beta} db^{\gamma]} = \frac{1}{2} (da^\beta db^\gamma - da^\gamma db^\beta),$$

для чего вводят *внешнее произведение* векторов:

$$da^{[\beta} db^{\gamma]} \equiv da^\beta \wedge db^\gamma, \quad (2.70)$$

так что $da^\beta \wedge db^\gamma = -db^\beta \wedge da^\gamma$, и

$$\omega = \omega(\mathbf{da}, \mathbf{db}) = \tilde{\omega}_{\beta\gamma} da^\beta \wedge db^\gamma.$$

Интеграл по поверхности Σ от скаляра

$$\int_{\Sigma} \omega \cdot d^2\sigma$$

в новых обозначениях записывают как

$$\int_{\Sigma} \omega$$

где дифференциалы не указываются в явном виде, так как неявно они стоят в самой дифференциальной форме ω . Этот интеграл является суммой инвариантов, значит, и сам он — инвариант, т.е., его значение не изменяется при замене координат векторного пространства. Как видим, дифференциальные формы вводятся в связи с понятием ориентированной поверхности и интегрированием по поверхностям.

Для полноты картины вводят также понятие 1-формы:

$$\lambda = \boldsymbol{\lambda} \cdot d\mathcal{C},$$

которая представляет собой элемент интеграла вектора по контуру.

Объем. Тройка векторов $d\mathbf{a}$, $d\mathbf{b}$ и $d\mathbf{c}$ в 3-мерном пространстве задает объем параллелепипеда

$$d^3V = (d\mathbf{a} \times d\mathbf{b}) \cdot d\mathbf{c} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} da^\alpha db^\beta dc^\gamma.$$

Соответствующую дифференциальную 3-форму можно записать в виде

$$\Omega = \Omega_0 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} da^\alpha \wedge db^\beta \wedge dc^\gamma,$$

где антисимметризованное внешнее произведение получается перестановками

$$da^\alpha \wedge db^\beta \wedge dc^\gamma = \frac{1}{3!} (da^\alpha db^\beta dc^\gamma - da^\beta db^\alpha dc^\gamma - da^\gamma db^\alpha dc^\beta - da^\alpha db^\gamma dc^\beta + da^\beta db^\gamma dc^\alpha + da^\gamma db^\beta dc^\alpha).$$

Интеграл по объему

$$\int \Omega$$

полностью задается скалярной величиной Ω_0 , что остается в силе и для пространства произвольной размерности.

§b. Внешнее дифференцирование

Внешнее дифференцирование переводит 2-форму ω в 3-форму $d\omega$, так что

$$\omega = \tilde{\omega}_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dy^\beta \rightarrow d\omega = \partial_\gamma \tilde{\omega}_{\alpha\beta} \cdot 3 \cdot dz^\gamma \wedge dx^\alpha \wedge dy^\beta = 3 \partial_\gamma \tilde{\omega}_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dy^\beta \wedge dz^\gamma,$$

где фактор 3 учитывает количество возможностей, которыми можно записать дополнительно появившийся внешний дифференциал⁶, и мы дважды переставили дифференциал⁷ dz^γ . Отличие от обычного частного дифференцирования состоит в том, что внешнее произведение дифференциалов оставляет при свертке только ненулевой вклад от антисимметризованной части производной от тензора, так что

$$d\omega = (\partial_\gamma \tilde{\omega}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \tilde{\omega}_{\gamma\beta} - \partial_\beta \tilde{\omega}_{\alpha\gamma}) dx^\alpha \wedge dy^\beta \wedge dz^\gamma,$$

и фактор 3 сократился с фактором антисимметризации производной

$$\partial_\gamma \tilde{\omega}_{\alpha\beta} \rightarrow \frac{1}{3} (\partial_\gamma \tilde{\omega}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \tilde{\omega}_{\gamma\beta} - \partial_\beta \tilde{\omega}_{\alpha\gamma}).$$

Если вспомнить, что 2-форму можно задать вектором, так что $\tilde{\omega}_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\mu} \omega^\mu$, а также учесть, что

$$dx^\alpha \wedge dy^\beta \wedge dz^\gamma = \frac{1}{3!} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} d^3V,$$

то внешний дифференциал запишется в виде

$$d\omega = (\partial_\gamma \tilde{\omega}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \tilde{\omega}_{\gamma\beta} - \partial_\beta \tilde{\omega}_{\alpha\gamma}) \frac{1}{3!} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} d^3V = \partial_\mu \omega^\mu d^3V.$$

Поэтому интеграл 2-формы, т.е., интеграл от вектора $\boldsymbol{\omega}$ по площади ориентированной поверхности, переходит при действии внешнего дифференцирования в интеграл от дивергенции вектора:

$$\int \boldsymbol{\omega} \stackrel{d}{\rightarrow} \int d\omega \Leftrightarrow \int \boldsymbol{\omega} \cdot d^2\boldsymbol{\sigma} \stackrel{d}{\rightarrow} \int \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} d^3V.$$

Приведенная процедура аналогичным образом справедлива и для форм других рангов. Например, для 1-формы

$$\lambda = \lambda_\alpha dx^\alpha \rightarrow d\lambda = (\partial_\alpha \lambda_\beta - \partial_\beta \lambda_\alpha) dx^\alpha \wedge dy^\beta.$$

⁶Этот фактор введен по договоренности для удобства записи последующих формул, что читатель сможет оценить ниже.

⁷Напомним, что каждая перестановка в силу антисимметрии внешнего произведения дает знак минус.

Так как

$$dx^\alpha \wedge dy^\beta = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} d^2\sigma_\gamma,$$

внешний дифференциал 1-формы выражается через ротор вектора, задающий эту 1-форму:

$$d\lambda = \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha \lambda_\beta d^2\sigma_\gamma = \text{rot } \boldsymbol{\lambda} \cdot d^2\boldsymbol{\sigma}.$$

Если определить 1-форму внешнего дифференцирования

$$D = dz^\gamma \partial_\gamma,$$

то внешний дифференциал задает внешнее произведение этой формы на форму ω ,

$$d\omega = D \wedge \omega.$$

Так как процедура антисимметризации не затрагивает свойств производной, внешний дифференциал обладает обычными свойствами дифференцирования, как то

$$d(\omega + \lambda) = d\omega + d\lambda,$$

и

$$d(\omega \wedge \lambda) = d\omega \wedge \lambda + (-1)^k \omega \wedge d\lambda,$$

где внешнее произведение форм ранга k и l соответственно в компонентах имеет вид

$$\omega \wedge \lambda = \frac{(k+l)!}{k! l!} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \lambda_{\beta_1 \dots \beta_l} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_k} \wedge dx^{\beta_1} \wedge \dots \wedge dx^{\beta_l},$$

причем фактор дает число возможных перестановок внешних дифференциалов с учетом симметрии по перестановкам, присутствовавшей в изначальных формах ω и λ , а фактор $(-1)^k$ возникает при перестановках внешних дифференциалов координат. Как и для обычных производных, из-под знака внешнего дифференциала можно выносить постоянный множитель

$$d(c \cdot \omega) = c \cdot d\omega.$$

Если перечисленные выше свойства внешнего дифференциала были очевидными свойствами, присущими производной функции, то антисимметризация приводит к нетривиальным последствиям.

Нильпотентность: квадрат внешнего дифференциала тождественно равен нулю:

$$d^2\omega \equiv 0. \quad (2.71)$$

В самом деле, для k -формы в компонентах квадрат внешнего дифференциала равен

$$d^2\omega = (k+1)(k+2) \partial_\alpha \partial_\beta \omega_{\gamma_1 \dots \gamma_k} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^{\gamma_1} \wedge \dots \wedge dx^{\gamma_k},$$

но частные производные перестановочны

$$\partial_\alpha \partial_\beta - \partial_\beta \partial_\alpha = 0,$$

и значит, антисимметризация приводит к тождественному занулению квадрата дифференциала формы.

Замкнутые и точные формы. Дадим также часто используемые определения.

Дифференциальная форма называется замкнутой, если

$$d\omega = 0.$$

Как мы видели, 2-форма является замкнутой, если определяющий ее вектор имеет нулевую дивергенцию (например, это означает, что вектор тока сохраняется).

Среди замкнутых форм выделяют точные, для которых замкнутость является следствием нильпотентности внешнего дифференциала:

$$\omega = d\lambda.$$

В примере с 2-формой определяющий ее вектор задается ротором вектора, так что дивергенция ротора тождественно зануляется.

§с. Теоремы

Использование внешнего дифференциала позволяет по-новому записать известные теоремы об интегрировании по замкнутым поверхностям или по кривым. Приведем их в случае 3-мерного пространства, воспользовавшись представлением форм в виде векторов, их роторов и дивергенций, описанным выше.

Теорема Стокса. Интеграл вектора по замкнутому контуру C равен интегралу от ротора вектора по поверхности Σ с границей, лежащей на этом контуре $\partial\Sigma = C$ (поток ротора через поверхность):

$$\oint_{C=\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega, \quad (2.72)$$

где ω — 1-форма.

Теорема Гаусса–Остроградского. Интеграл вектора по замкнутой поверхности Σ (поток вектора через поверхность) равен интегралу от дивергенции вектора по объему V , ограниченному этой поверхностью $\partial V = \Sigma$:

$$\oint_{\Sigma=\partial V} \omega = \int_V d\omega, \quad (2.73)$$

где ω — 2-форма.

Для замкнутых форм правые части в тождествах вышеприведенных теорем равны нулю. Для точных форм интегралы в левых частях берутся от полных дифференциалов, так что они вычисляются тривиальным образом. Например, для 1-формы интеграл по контуру

$$\int_{x_0}^{x_1} d\lambda = \lambda(x_1) - \lambda(x_0),$$

и если контур замкнут (нет границы), то интеграл равен нулю.

Как видим, язык дифференциальных форм позволяет единым образом записывать многомерные теоремы о замкнутых гипер-поверхностях, что и является достоинством его универсальности, которая становится необходимой для научных исследований на переднем крае науки, т.е. на острие «высоких технологий».

Отметим также, что на языке дифференциальных форм и внешнего дифференциала теоремы Стокса и Гаусса–Остроградского становятся совершенно прозрачными для их понимания, если их читать справа налево: интеграл от полной производной сводится к значению первообразной на границах интегрирования. По существу все эти теоремы — формула Ньютона–Лейбница для интегрирования полной производной.

13. Уравнения Максвелла

13.1. Сила Лоренца, суперпозиция полей

Векторы электрического \mathcal{E} и магнитного \mathcal{H} полей в вакууме задают силу Лоренца \mathcal{F} , действующую на частицу с зарядом e и скоростью \mathbf{v} , (в Гауссовых единицах):

$$\mathcal{F} = e\mathcal{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathcal{H}. \quad (2.74)$$

Поля удовлетворяют принципу суперпозиции:

$$\mathcal{E} = \sum_k \mathcal{E}_k, \quad \mathcal{H} = \sum_k \mathcal{H}_k,$$

т.е. поле многих источников получается суммированием полей от каждого из источников. Из этого принципа следует, что законы для электромагнитного поля точечного заряда позволяют записать динамику произвольного распределения зарядов. Таким образом, достаточно изучить эти законы для точечного заряда.

13.2. Закон Кулона

Точечный источник, помещенный в центре координат, т.е. заряд e , создает электрическое поле согласно закону Кулона:

$$\mathcal{E} = \frac{e}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (2.75)$$

Вычислим поток электрического поля через сферу радиуса r с элементом площади $d^2\sigma = r^2 d\Omega \mathbf{r}/r$, где телесный угол $d\Omega$ в сферических координатах $d\Omega = d\phi d\cos\theta$,

$$\oint_{\partial V_r} d^2\sigma \cdot \mathcal{E} = e \int d\Omega = 4\pi e.$$

Согласно теореме Гаусса поток вектора через замкнутую поверхность ∂V , являющуюся границей объема V , равен интегралу дивергенции вектора по этому объему

$$\oint_{\partial V} d^2\sigma \cdot \mathcal{E} = \int_V dV \operatorname{div} \mathcal{E}, \quad (2.76)$$

так что закон Кулона может быть переписан в интегральной форме

$$\int_V dV \operatorname{div} \mathcal{E} = 4\pi e = 4\pi \int_V dV \rho, \quad (2.77)$$

где мы ввели плотность заряда ρ . Заметим, что сферу, охватывающую заряд в ее центре, можно «деформировать» в замкнутую фигуру любой формы. В самом деле, если поверхность замкнута, то интеграл по ее ориентированной поверхности равен нулю⁸. Тогда поток электрического поля по поверхности бесконечно малого объема, внутри которого нет заряда, можно представить как интеграл от постоянного значения электрического поля в точке внутри объема плюс поправки второго порядка малости из-за зависимости поля от точки на поверхности (сингулярность возникает, если только заряд внутри объема), а поток постоянного поля по замкнутой поверхности обращается в нуль. Суммирование по таким бесконечно малым объемам, не содержащим заряд, дает конечный объем, произвольной формы, поток электрического поля через поверхность которого равен нулю. Теперь представим себе, например, куб, содержащий сферу с зарядом. Интеграл по поверхности куба и поверхности сферы, обращенной внутрь, равен нулю, поскольку между кубом и сферой нет заряда, т.е. дополнение сферы до куба имеет поверхность, поток электрического поля через поверхность которого равен нулю. Отсюда сразу следует, что поток поля по поверхности куба равен потоку по поверхности сферы, обращенной наружу. Это рассуждение, очевидно, справедливо для произвольных замкнутых поверхностей.

Поскольку выражение (2.77) справедливо для произвольного распределения зарядов вследствие принципа суперпозиции полей, можно записать его для произвольного объема и плотности, $\forall V$, откуда сразу следует, что имеет место локальная форма закона Кулона

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = 4\pi \rho. \quad (2.78)$$

В частности, электрическое поле *единичного* заряда, расположенного в точке \mathbf{r}' ,

$$\mathcal{E}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (2.79)$$

имеет плотность заряда, которая равна нулю всюду, кроме точки \mathbf{r}' , что обозначают дельта-функцией Дирака:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.80)$$

обладающей свойством

$$\int d^3r \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}'). \quad (2.81)$$

Значит, из (2.78) следует, что

$$\operatorname{div} \mathcal{E}_0(\mathbf{r}) = \operatorname{div} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.82)$$

⁸Это следует из теоремы Гаусса в случае интеграла по замкнутой поверхности от постоянного ненулевого вектора, имеющего, следовательно, нулевую дивергенцию.

13.3. Закон сохранения заряда

Сохранение электрического заряда означает, что изменение заряда $q = \int dV \rho$ в некотором объеме V обусловлено лишь тем, что через поверхность ∂V протекают токи, плотностью $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, где ρ — плотность заряда, а \mathbf{v} — скорость зарядов:

$$\partial_t q = - \oint_{\partial V} d^2 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{j}, \quad \partial_t \int_V dV \rho = - \oint_{\partial V} d^2 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{j}.$$

Отсюда с помощью теоремы Гаусса и произвольной величины объема находим локальный вид закона сохранения заряда

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (2.83)$$

Используя введенные ранее 4-компонентные обозначения $\partial_\mu = (\frac{1}{c} \partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$ и 4-компонентную плотность тока $j^\mu = (c\rho, \mathbf{v}\rho)$, запишем закон сохранения тока в форме⁹

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (2.84)$$

Поскольку закон сохранения заряда во всех системах отсчета имеет один и тот же вид (2.84), т.е. он является инвариантом при преобразованиях координат и времени, а ∂_μ преобразуется как четырехмерный ковектор в пространственно-временном континууме $x^\mu = (x_0, \mathbf{r})$, мы заключаем, что инвариантность закона сохранения может иметь место только в случае, если j^μ преобразуется как 4-вектор.

13.4. Закон Био-Савара

В случае стационарных токов возникает магнитное поле, направление и величина которого были установлены эмпирически. По принципу суперпозиции это поле является суммой полей от каждой из частиц тока. Движущаяся частица, проходя центр координат, создает магнитное поле согласно закону Био-Савара

$$\mathcal{H} = \frac{e}{c} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

что можно записать в более общем виде для малого заряда $de = \rho(\mathbf{r}') dV'$ в точке \mathbf{r}' :

$$d\mathcal{H} = \frac{dV' \rho(\mathbf{r}')}{c} \frac{\mathbf{v}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

и с учетом определения плотности тока $\mathbf{v}\rho$ поле интегрирования по распределению зарядов, находим магнитное поле *стационарных токов*:

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_{V'} dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (2.85)$$

Вычислим ротор магнитного поля стационарных токов, используя равенство для двойного векторного произведения $\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}(\mathbf{r})) = \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b}(\mathbf{r}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}(\mathbf{r})$,

$$\operatorname{rot} \mathcal{H} = \frac{1}{c} \int_{V'} dV' \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}') \operatorname{div} \boldsymbol{\mathcal{E}}_0 - (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla) \boldsymbol{\mathcal{E}}_0 \right),$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_0 = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

— это поле единичного заряда, помещенного в точку \mathbf{r}' . Тогда согласно (2.82)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\mathcal{E}}_0 = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

так что

$$\operatorname{rot} \mathcal{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}) - \frac{1}{c} \int_{V'} dV' (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla) \boldsymbol{\mathcal{E}}_0,$$

⁹Вообще говоря знаки ∇_μ и ∂_μ при действии на тензорные величины не являются тождественными в криволинейных координатах, но мы здесь имеем в виду декартовы координаты.

где второе слагаемое можно преобразовать, заметив, что дифференцирование по штрихованным координатам связано с дифференцированием по не штрихованным координатам: $\nabla_\alpha \mathcal{E}_0 = -\nabla'_\alpha \mathcal{E}_0$, и проведя интегрирование по частям (в случае стационарных токов полагаем, что интеграл по границе объема с замкнутыми токами, т.е. по замкнутой поверхности, по которой токи не текут, равен нулю), так что

$$\int_{V'} dV' (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla) \mathcal{E}_0 = - \int_{V'} dV' (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla') \mathcal{E}_0 = \int_{V'} dV' \mathcal{E}_0 (\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')) = 0,$$

поскольку для стационарных токов $\partial_t \rho = 0$ и в силу закона сохранения заряда $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$.

В итоге, локальная форма закона Био-Савара для стационарных токов принимает вид

$$\operatorname{rot} \mathcal{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (2.86)$$

13.5. Индукция

Если поток магнитного поля, проходящий сквозь площадь, ограниченную замкнутым проводником, меняется со временем, то в проводнике возникает электродвижущая сила, т.е. возникает электрическое поле, совершающее работу по закону индукции

$$\oint_{\partial \Sigma} d\mathbf{c} \cdot \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} d^2 \sigma \cdot \mathcal{H}. \quad (2.87)$$

По теореме Стокса

$$\oint_{\partial \Sigma} d\mathbf{c} \cdot \mathcal{E} = \int_{\Sigma} d^2 \sigma \cdot \operatorname{rot} \mathcal{E}. \quad (2.88)$$

Поскольку контур замкнутого проводника может быть любым, приходим к локальной форме закона индукции

$$\operatorname{rot} \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \quad (2.89)$$

13.6. Магнитные заряды

Для магнитного поля стационарных токов можно вычислить дивергенцию

$$\operatorname{div} \mathcal{H} = \frac{1}{c} \int dV' \nabla \cdot (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathcal{E}_0) = -\frac{1}{c} \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot (\nabla \times \mathcal{E}_0),$$

где мы поменяли местами векторы в смешанном произведении. Заметим теперь, что ротор электрического поля стационарного точечного заряда, т.е. заряда, который покоится, тождественно обращается в нуль¹⁰ согласно закону индукции (2.89), поскольку магнитное поле такого заряда тождественно равно нулю: $\operatorname{rot} \mathcal{E}_0 = 0$. Значит,

$$\operatorname{div} \mathcal{H} = 0. \quad (2.90)$$

По аналогии с электрическим полем (см. (2.78)), дивергенция магнитного поля могла бы быть пропорциональна плотности магнитных зарядов. Однако, если магнитное поле создается только при движении электрических зарядов, как следует из закона Био-Савара, то плотность магнитных зарядов тождественно равна нулю: магнитных зарядов в электродинамике Максвелла нет.

13.7. Ток смещения

Для стационарных токов из (2.86) следует, что дивергенция плотности тока обращается в нуль

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathcal{H} = 0,$$

что согласуется, конечно, с законом сохранения заряда (2.84) в случае плотности заряда, постоянной во времени

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

¹⁰Это можно получить прямым вычислением ротора.

В общем, нестационарном случае

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \left\{ \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right\} = 0,$$

где мы использовали дифференциальную форму закона Кулона (2.78). Величина

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$$

имеет смысл плотности тока, названного Максвеллом током смещения, который возникает в нестационарном случае. Сумма тока электрических зарядов и тока смещения обладает нулевой дивергенцией, что является тождеством, если эта сумма — ротор вектора. В стационарном случае этот вектор — магнитное поле с точностью до численного коэффициента, поэтому естественно было предположить, что и в нестационарном случае при наличии тока смещения следует рассматривать тот же вектор магнитного поля, так что

$$\operatorname{rot} \mathcal{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}. \quad (2.91)$$

В итоге, уравнения Максвелла образуют первую и вторую пары, соответственно, без источников и с источниками:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathcal{H} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathcal{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathcal{E} = 4\pi \rho, \end{cases} \quad (2.92)$$

которые лежат в основе классической электродинамики, включая специальную теорию относительности [7, 8, 9, 10].

Тема 3

Группа вращений и спин

Лекция № 6

Группа пространственных трансляций, генераторы непрерывных преобразований координат и полей, задача на собственные значения генератора трансляций и волновой вектор плоской волны, коммутатор генераторов, абелевость группы трансляций, вращение и матрицы генераторов поворотов для вектора, некоммутативная алгебра генераторов группы вращений $so(3)$, группа $O(3)$, генератор орбитального вращения на примере скалярного поля, генератор вращения для векторного и тензорного полей.

14. Генераторы инфинитезимальных преобразований

14.1. Сдвиги \equiv трансляции координат

Действие трансляций определяется преобразованием

$$r_T^\alpha = r'^\alpha = r^\alpha + a^\alpha, \quad (3.1)$$

где a^α — *глобальный* параметр преобразования, т.е. он не зависит от координат в любой точке пространства

$$\frac{\partial}{\partial r^\beta} a^\alpha \equiv \partial_\beta a^\alpha = 0, \quad \forall x.$$

Это преобразование можно записать как действие оператора трансляций $\hat{T}(\mathbf{a})$, зависящего от параметра \mathbf{a} ,

$$r_T^\alpha = r'^\alpha = \hat{T}(\mathbf{a}) r^\alpha.$$

Очевидны следующие свойства трансляций:

1. Последовательное действие двух трансляций опять является трансляцией. Действительно,

$$\hat{T}(\mathbf{a}) \cdot \hat{T}(\mathbf{b}) r^\alpha = \hat{T}(\mathbf{a}) (r^\alpha + b^\alpha) = r^\alpha + (b + a)^\alpha = \hat{T}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) r^\alpha,$$

или, что то же,

$$\hat{T}(\mathbf{b}) \cdot \hat{T}(\mathbf{a}) = \hat{T}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

Более того, последовательное действие трех трансляций в силу

$$\hat{T}(\mathbf{c}) \cdot (\hat{T}(\mathbf{b}) \cdot \hat{T}(\mathbf{a})) = \hat{T}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\hat{T}(\mathbf{c}) \cdot \hat{T}(\mathbf{b})) \cdot \hat{T}(\mathbf{a}),$$

как видим, не зависит от их группировки посредством скобок.

2. Существует тождественное преобразование $\mathbb{1} = \hat{T}(0)$, такое что

$$\hat{T}(0) r^\alpha = r^\alpha,$$

и

$$\hat{T}(\mathbf{a}) \cdot \hat{T}(0) = \hat{T}(0) \cdot \hat{T}(\mathbf{a}) = \hat{T}(\mathbf{a}), \quad \forall \mathbf{a}.$$

3. После любого сдвига можно сделать обратное преобразование, сводящее действие двух трансляций к тождественному преобразованию,

$$\hat{T}(\mathbf{a}) \cdot \hat{T}(-\mathbf{a}) = \hat{T}(0) = \mathbb{1}, \quad \forall \mathbf{a}.$$

Такие свойства операторов преобразований являются общими и представляют собой математическую конструкцию *группы*, понятие которой, как видим, тесно связано с симметриями физических величин (здесь — пространства).

Определение. Группой называется множество G , обладающее следующими свойствами:

- в ней задана операция композиции (обозначаемая \circ)

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad \exists g_3 \in G, \quad g_1 \circ g_2 = g_3,$$

обладающая свойством *ассоциативности*¹

$$g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3 \equiv g_1 \circ g_2 \circ g_3,$$

- единичный элемент $\mathbb{1}$

$$\exists \mathbb{1} \in G : \quad \mathbb{1} \circ g = g \circ \mathbb{1} = g, \quad \forall g \in G,$$

- обратный элемент

$$\forall g \in G \quad \exists g^{-1} \in G : \quad g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = \mathbb{1}.$$

Как видим, *преобразования трансляций образуют группу*.

Представлениями абстрактной группы называют множества операторов со всеми свойствами группы, действующие на пространстве представления. Мы будем исследовать конечномерные векторные пространства (множества с конечномерным линейно независимым базисом для элементов пространства с операцией суммы элементов и умножения на вещественные (комплексные) числа, т.е. линейные оболочки базисных векторов²).

В рассмотренном случае трансляций векторное пространство — декартовы координаты евклидова пространства, а элементы группы — $\hat{T}(\mathbf{a})$. В дальнейшем для ясности и простоты изложения мы будем рассматривать именно представления группы на векторных пространствах без особых оговорок, так что наряду с действием группы на элементы пространства в нем также действуют операции сложения и вычитания.

Другая особенность трансляций заключается в том, что они зависят от непрерывного параметра. Группы, элементы которых параметризуются непрерывными величинами, в окрестности каждой точки локально эквивалентными конечномерным областям векторных пространств, называются *группами Ли* (в строгой формулировке определяют свойства функций перехода от одной локальной координатной сетки параметров преобразований к другой в области их перекрытия, а также возможность введения непересекающихся локальных координатных областей для двух различных точек (свойство Хаусдорфа)).

Рассмотрим бесконечно малые (инфинитезимальные) преобразования вблизи единичного элемента $\mathbb{1}$

$$\hat{T}(\mathbf{a}) \approx \mathbb{1} - i\Gamma_\alpha a^\alpha, \quad \mathbf{a} \rightarrow 0,$$

где мы ввели *генераторы* инфинитезимальных преобразований

$$\Gamma_\alpha \equiv i \lim_{\mathbf{a} \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial a^\alpha} \hat{T}(\mathbf{a}). \quad (3.2)$$

Для скалярной, векторной или тензорной функции, т.е. поля $\Phi(\mathbf{r})$, поскольку

$$\frac{\partial r'^\alpha}{\partial r^\beta} = \frac{\partial (r^\alpha + a^\alpha)}{\partial r^\beta} = \delta_\beta^\alpha,$$

а значит, в законе преобразования тензорных величин ранга n в индексных обозначениях

$$\Phi'^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \frac{\partial r'^{\alpha_1}}{\partial r^{\beta_1}} \dots \frac{\partial r'^{\alpha_n}}{\partial r^{\beta_n}} \Phi^{\beta_1 \dots \beta_n},$$

как для контрвариантных, так для ковариантных индексов, все индексы умножаются на символ Кронекера, т.е. не меняются, преобразование при трансляциях евклидова пространства теперь можно записать в виде $\hat{T} \circ \Phi(\mathbf{r}) = \Phi_T(\mathbf{r}_T) = \Phi(\mathbf{r})$, т.е.

$$\Phi_T(\hat{T}(\mathbf{a})\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \Phi_T(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \Phi(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \Phi_T(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \Phi(T(-\mathbf{a})\mathbf{r}).$$

Следовательно, преобразованная функция есть сама функция от аргумента, преобразованного обратной трансляцией. Для бесконечно малых преобразований

$$\Phi_T(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \approx \Phi(\mathbf{r}) - a^\alpha \partial_\alpha \Phi(\mathbf{r}), \quad \Phi_T(\mathbf{r}) = (\mathbb{1} - i\Gamma_\alpha a^\alpha) \Phi(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow$$

¹ В физических задачах свойство ассоциативности обычно выполняется по построению: преобразования физических величин *определяются* как последовательное действие соответствующих сложных функций от этих величин, например, $f_3[f_2[f_1(x)]] \equiv f_3 \circ f_2 \circ f_1(x) \equiv (f_3 \circ f_2) \circ f_1(x) \equiv f_3 \circ (f_2 \circ f_1)(x)$.

² В этом случае представления обычно образованы матрицами, действующими на векторы.

$$\Gamma_\alpha = -i\partial_\alpha \mapsto \hat{k}_\alpha.$$

Физический смысл генератора трансляций \hat{k}_α становится ясным, если рассмотреть его действие на произвольную функцию $f(\mathbf{r})$. Действительно, ряд Тейлора дает разложение

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r} + \mathbf{a}) &= \sum_n \frac{1}{n!} a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_n} \frac{\partial^n f(\mathbf{r})}{\partial r^{\alpha_1} \dots \partial r^{\alpha_n}} = \sum_n \frac{1}{n!} (\mathbf{a} \cdot \nabla)^n f(\mathbf{r}) \\ &= e^{a^\alpha \partial_\alpha} f(\mathbf{r}) = e^{i a^\alpha \hat{k}_\alpha} f(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

и, в частности,

$$f(\mathbf{a}) = e^{i a^\alpha k_\alpha}, \quad \text{если } f(0) = 1, \quad -i\partial_\alpha f(\mathbf{r}) = \hat{k}_\alpha f(\mathbf{r}) = k_\alpha f(\mathbf{r}).$$

Таким образом, генератор \hat{k}_α задает волновой вектор плоской монохроматической волны. Заметим, что последнее условие — это уравнение на вещественные собственные значения и собственные функции генератора пространственных трансляций, откуда становится ясным введение мнимой единицы в определение генератора трансляций: эта мнимая единица связана с ясным физическим смыслом собственных функций генераторов с вещественными собственными значениями, отвечающими наблюдаемым величинам.

Отметим, что плоская монохроматическая волна, как мы установили раньше, отвечает амплитуде вероятности достоверности траектории свободной частицы и, согласно гипотезе де Бройля, волновой вектор \mathbf{k} связан с импульсом: $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$. Таким образом, генератор трансляций после умножения на постоянную Планка с чертой становится оператором импульса, который действует в пространстве амплитуд вероятности Ψ : $-i\hbar \partial_\alpha = \hat{p}_\alpha$. В пространстве амплитуд вероятности достоверности траекторий оператор импульса имеет вещественные собственные значения. Такие операторы называются эрмитовыми. теория операторов в пространстве амплитуд траекторий относится не к классической, а к квантовой механике, так что мы здесь не будем развивать эту тему.

Вычислим разность действия двух инфинитезимальных операторов

$$\left(\hat{T}(\mathbf{a}) \cdot \hat{T}(\mathbf{b}) - \hat{T}(\mathbf{b}) \cdot \hat{T}(\mathbf{a}) \right) f(\mathbf{r}) = -a^\alpha b^\beta (\hat{k}_\alpha \hat{k}_\beta - \hat{k}_\beta \hat{k}_\alpha) f(\mathbf{r}),$$

физический смысл которой заключается в сравнении результатов двух сдвигов в прямом и обратном порядке (см. рис. 3.1).

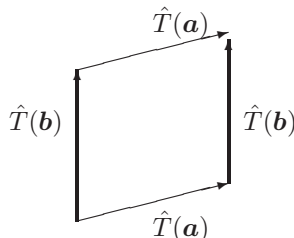


Рис. 3.1: Композиция двух трансляций в прямом и обратном порядке.

В силу группового характера преобразований, произведение операторов в прямом и обратном порядке, вообще говоря, отличается на групповой элемент, т.е., из одной точки пространства можно перейти в другую точку посредством преобразования из группы и $\hat{T}(\mathbf{a}) \cdot \hat{T}(\mathbf{b}) = \hat{T}(\mathbf{c}) \cdot \left(\hat{T}(\mathbf{b}) \cdot \hat{T}(\mathbf{a}) \right)$, и для бесконечно малых элементов (разлагая по a , b и c) отсюда легко получить, что разность $\hat{T}(\mathbf{a}) \cdot \hat{T}(\mathbf{b}) - \hat{T}(\mathbf{b}) \cdot \hat{T}(\mathbf{a})$ пропорциональна генератору группы Γ с параметром c второго порядка малости $c \sim \mathcal{O}(ab)$.

Для генераторов трансляций в силу перестановочности частного дифференцирования по различным переменным в декартовых координатах

$$\partial_\alpha \partial_\beta f(\mathbf{r}) = \partial_\beta \partial_\alpha f(\mathbf{r}),$$

следует, что

$$\hat{k}_\alpha \hat{k}_\beta - \hat{k}_\beta \hat{k}_\alpha = 0,$$

т.е. результат не зависит от порядка преобразований. В общем случае рассматривают следующую математическую конструкцию для генераторов инфинитезимальных преобразований группы Ли.

Определение. Алгеброй Ли Γ называют вещественное векторное пространство Γ , в котором определена скобка Ли:

- композиция

$$\forall \Gamma_1, \Gamma_2 \in \Gamma \quad \exists [\Gamma_1, \Gamma_2] \in \Gamma,$$

- антисимметрия

$$[\Gamma_1, \Gamma_2] = -[\Gamma_2, \Gamma_1],$$

- тождество Якоби³ (циклическая перестановка элементов в скобке)

$$[[\Gamma_1, \Gamma_2], \Gamma_3] + [[\Gamma_2, \Gamma_3], \Gamma_1] + [[\Gamma_3, \Gamma_1], \Gamma_2] = 0.$$

Первые два свойства определяют коммутатор генераторов⁴. Если

$$\forall \Gamma_1, \Gamma_2 \in \Gamma \quad [\Gamma_1, \Gamma_2] = 0,$$

то алгебра называется коммутативной (или абелевой).

Выше мы показали, что

$$\hat{k}_\alpha \hat{k}_\beta - \hat{k}_\beta \hat{k}_\alpha \equiv [\hat{k}_\alpha, \hat{k}_\beta] = 0,$$

так что алгебра трансляций коммутативна, т.е. контур, показанный на рис. 3.1, замкнут.

Если генераторы представлены матрицами в векторном пространстве, то их коммутатор определяется матричным умножением

$$[A, B] = AB - BA,$$

и, так как не всякие матрицы при умножении в прямом и обратном порядке дают одинаковый результат, становится ясно, что существуют и не коммутативные алгебры. Матричное умножение позволяет определить однородные полиномы по генераторам степени k

$$C_k = \sum h^{i_1 \dots i_k} \Gamma_{i_1} \dots \Gamma_{i_k},$$

среди которых особо выделяют операторы Казимира, которые коммутируют со всеми генераторами

$$[C_k, \Gamma_n] = 0, \quad \forall \Gamma_n \in \Gamma.$$

Число линейно независимых операторов Казимира называется *рангом* алгебры или группы, который равен также числу линейно независимых генераторов группы, образующих коммутативную *подалгебру Картана* H :

$$\forall h_1, h_2 \in H \quad [h_1, h_2] = 0.$$

В случае группы трансляций евклидова пространства все генераторы по трем осям коммутируют, так что сдвиги по каждой из осей можно производить в произвольном порядке и можно говорить о трех независимых абелевых одномерных группах трансляций, каждая из которых имеет ранг, равный 1. Такая одномерная группа называется $U(1)$: собственные функции генераторов группы, как мы видели, сводятся к

$$e^{ika},$$

где k собственное значение генератора абелевой группы, а a — параметр группы (сдвига координаты).

Рассмотрим случай некоммутирующей алгебры на примере поворотов в 3-мерном пространстве Евклида, которые так же, как и трансляции, оставляют инвариантной длину вектора.

14.2. Вращения

Рассмотрим повороты на плоскости, т.е. в 2-мерном евклидовом пространстве (см. рис. 3.2). Для координат вектора

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases}$$

после преобразования получим

$$\begin{cases} x' = r \cos(\theta + \phi) = x \cos \phi - y \sin \phi, \\ y' = r \sin(\theta + \phi) = x \sin \phi + y \cos \phi, \end{cases}$$

³ Следствие ассоциативности для бесконечно малых преобразований группы Ли.

⁴ Введение коммутатора генераторов групповых преобразований со значением в линейной оболочке генераторов определяется простым требованием для инфинитезимальных преобразований: действие двух преобразований в прямом и обратном порядке отличается на преобразование из той же группы.

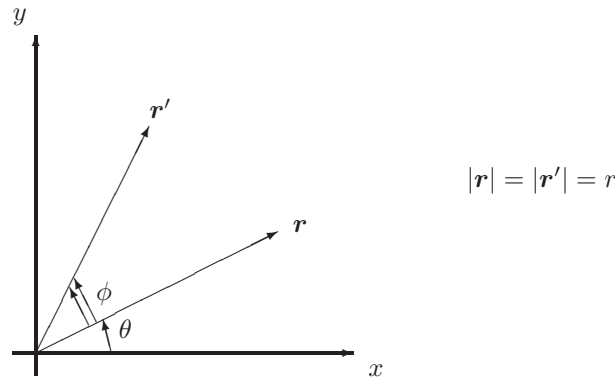


Рис. 3.2: Поворот на плоскости.

где мы использовали обычные тригонометрические равенства:

$$\begin{aligned}\cos(\theta + \phi) &= \cos\theta \cos\phi - \sin\theta \sin\phi, \\ \sin(\theta + \phi) &= \cos\theta \sin\phi + \sin\theta \cos\phi.\end{aligned}$$

В матричных обозначениях для векторов-столбцов этот поворот запишется в виде

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_2(\phi) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Вычислим детерминант матрицы 2-мерного поворота

$$\det R_2(\phi) = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1.$$

Очевидно, что вращение на нулевой угол является тождественным преобразованием

$$R_2(0) = \mathbb{1},$$

и после каждого поворота можно совершить обратное вращение

$$R_2(\phi)R_2(-\phi) = \mathbb{1},$$

причем обратная матрица является транспонированной

$$R_2(-\phi) = R_2^T = R_2^{-1}(\phi).$$

После несложных тригонометрических выкладок находим, что два последовательных поворота есть также поворот на угол, равный сумме углов (*правило сложения углов*),

$$R_2(\phi_1)R_2(\phi_2) = R_2(\phi_1 + \phi_2),$$

и, таким образом, матричное умножение определяет композицию элементов *группы поворотов*.

Генераторы преобразований определяются дифференцированием по параметрам группы вращений вблизи тождественного преобразования (см. (3.2)). В частности, изученный нами поворот на плоскости $\{x, y\}$ с осью поворота, направленной по оси z , имеет генератор

$$s_z = i \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \phi} R_2(\phi) = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В 3-мерном евклидовом пространстве с *правой тройкой базисных векторов* легко получить обобщение матриц вращения с осями вдоль базисных векторов. При этом для генераторов, пользуясь правилом циклической перестановки индексов: при вращении в плоскости $\{x, y\}$, т.е. с осью вдоль z , ненулевыми значениями в матрице генератора s_z являются только элементы $(s_z)_y^x = -i$ и $(s_z)_x^y = i$ и далее по циклу, — находим выражения

$$s_z = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{— поворот в плоскости } \{x, y\}, \quad (3.3)$$

$$s_y = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{— поворот в плоскости } \{z, x\}, \quad (3.4)$$

$$s_x = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{— поворот в плоскости } \{y, z\}. \quad (3.5)$$

Другими словами матрица генератора $(s_\alpha)^\beta_\gamma = -i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$, что в матричных обозначениях в точности совпадает с приведенной записью в явном виде.

Рассмотрим, возникает ли различие в преобразовании векторов при смене порядка двух поворотов по разным осям. Для этого вычислим коммутаторы, которые в данном случае определяются умножением матриц (3.3)–(3.5):

$$[s_x, s_y] = i s_z, \quad [s_y, s_z] = i s_x, \quad [s_z, s_x] = i s_y, \quad (3.6)$$

где опять важно заметить циклическую перестановку индексов. Отсюда видим, например, что повороты последовательно сначала вокруг оси y , а потом вокруг оси x , и наоборот — сначала вокруг оси x , а потом вокруг оси y , в результате не совпадают, а отличаются на поворот вокруг оси z и т.п. Нетрудно убедиться, что тождества Якоби для генераторов группы вращений справедливы. В итоге, в 3-мерном евклидовом пространстве алгебра генераторов группы вращений некоммутативна.

С использованием тензора Леви-Чивита коммутационные соотношения для генераторов группы вращений (т.е. алгебра генераторов) примут вид

$$[s_\alpha, s_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} s_\gamma. \quad (3.7)$$

Мы видим, что это — некоммутативная алгебра Ли.

В силу свойств матриц вращения

$$R \cdot R^T = \mathbb{1}, \quad \text{— ортогональность, } O,$$

$$\det R = 1, \quad \text{— специальные преобразования, } S,$$

группа вращений 3-мерного евклидова пространства обозначается символом $SO(3)$, а ее алгебра — $so(3)$.

Группа $SO(3)$ имеет единственный оператор Казимира, который на векторах евклидова пространства, т.е. в векторном представлении, принимает значение

$$C_2 = \mathbf{s}^2 = (s_\alpha)^\beta_\gamma (s_\alpha)^\gamma_{\beta'} = (-i)^2 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\gamma\beta'} = 2\delta_{\beta\beta'} = 2 \cdot \mathbb{1}.$$

Таким образом, непрерывные симметрии 3-мерного пространства без смены ориентации базиса с правой на левую образованы группой трансляций и вращений.

14.3. Группа вращений $O(3)$

Группа вращений 3-мерного евклидова пространства состоит из двух связанных непрерывными преобразованиями компонент⁵ с детерминантом, равным ± 1 (собственные и несобственные повороты). Переход же от одной связной компоненты к другой осуществляется с помощью дискретных преобразований зеркального отражения по каждой из осей декартова пространства $\mathbb{P} = \mathbb{P}_x \mathbb{P}_y \mathbb{P}_z$. Так что схематически можно записать:

$$\boxed{SO_+(3), \quad \det R = +1}$$

$$\mathbb{P} \uparrow \downarrow \mathbb{P}$$

$$\boxed{SO_-(3), \quad \det R = -1}$$

Полная же группа изометрии евклидова пространства включает в себя наряду с вращениями $O(3)$ (с учетом отражений) еще и трансляции, так что говорят о неоднородной (inhomogeneous, I) группе $ISO(3)$.

⁵Здесь термин связности компонент употребляется в “интуитивном” смысле, в то время как строгая математическая теория вводит понятия гомотопий (классов непрерывных однопараметрических траекторий в группе) и гомотопических групп, которые мы не рассматриваем (см. [5]).

14.4. Общий вид генераторов вращения и спин

Помимо приведенного нами вида генераторов группы вращений в матричной форме, когда они действуют как линейные преобразования на вектор координат в декартовой системе, можно написать и общий вид этих генераторов для произвольной скалярной функции от координат \mathbf{r} , т.е. для скалярного поля $\Phi = f(\mathbf{r})$. По определению, скалярная функция f не зависит от выбора базиса в векторном пространстве координат \mathbf{r}

$$f_G(\mathbf{r}_G) = f(\mathbf{r}), \quad (3.8)$$

где G — оператор поворотов, который преобразует и координаты, и функции:

$$\mathbf{r}_G = G \cdot \mathbf{r}, \quad G \circ f(\mathbf{r}) = f_G(\mathbf{r}_G).$$

Для бесконечно малых преобразований

$$\mathbf{r}_G = \mathbf{r} + d_G \mathbf{r} = (1 - i s_\alpha \phi_\alpha) \mathbf{r},$$

где дифференциал зависит от параметров вращения ϕ_α , а генераторы представляют собой рассмотренные нами выше матрицы (3.3)–(3.5). Тогда

$$f_G(\mathbf{r}_G) = f_G(\mathbf{r}) + \frac{\partial f_G}{\partial r^\alpha} d_G r^\alpha = f_G(\mathbf{r}) + \frac{\partial f}{\partial r^\alpha} d_G r^\alpha,$$

где во втором слагаемом мы заменили преобразованную функцию на исходную, потому что эта операция приводит в разнице второго порядка малости, не существенной здесь для нашего рассмотрения, так что согласно (3.8) вариация скалярного поля в точке \mathbf{r}

$$\delta_G f(\mathbf{r}) = f_G(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = -\frac{\partial f}{\partial r^\alpha} d_G r^\alpha. \quad (3.9)$$

Тогда по построению

$$(1 + \delta_G) f(\mathbf{r}) \equiv (1 - i \hat{l}_\beta \phi_\beta) f(\mathbf{r}),$$

где уже \hat{l}_β — оператор на функциях, и

$$i \hat{l}_\beta \phi_\beta f(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial r^\alpha} d_G r^\alpha.$$

В случае вращения в 2-мерном пространстве (вокруг оси z) на угол $\phi \rightarrow 0$

$$f_G(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) \approx -i \hat{l}_z \phi f(\mathbf{r}) = -\left(dy \frac{\partial f}{\partial y} + dx \frac{\partial f}{\partial x} \right) = -\phi \left(x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} \right) \Rightarrow$$

$$i \hat{l}_z = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x},$$

и в общем случае (в декартовых координатах нижние и верхние индексы не отличают!)

$$\hat{l}_\alpha = -i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} r_\beta \partial_\gamma = -\frac{i}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (r_\beta \partial_\gamma - r_\gamma \partial_\beta) = -i (\mathbf{r} \times \nabla)_\alpha.$$

Поскольку в пространстве амплитуд траекторий величина $\hat{\mathbf{p}} = -i \hbar \nabla$ отвечает оператору импульса, то величина

$$\hat{\mathbf{l}} = \hbar \hat{\mathbf{l}} = -i \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}} \quad (3.10)$$

является орбитальным моментом импульса \mathbf{l} .

Легко вычислить

$$[\hat{l}_\alpha, r_\beta] = i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} r_\gamma, \quad [\hat{l}_\alpha, \hat{k}_\beta] = i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{k}_\gamma.$$

Отсюда видно, что вектор координат и генератор трансляций поворачиваются по одному и тому же закону, т.е. генераторы трансляций — векторы. Однако напомним, что генераторы трансляций задаются частной производной, т.е. строкой, а не столбцом, как координаты, и соответствующие операторы преобразования являются сопряженными к операторам поворота (простым транспонированием), что при тех же коммутационных соотношениях для r_α и \hat{k}_α с \hat{l}_β приводит к обратному повороту \hat{k}_α по сравнению с r_α : $R(\phi) \approx 1 - i s_\alpha \phi_\alpha$, в то время как $R^T(\phi) \approx 1 + i s_\alpha \phi_\alpha$, так как $s_\alpha^T = -s_\alpha$ (см. (3.3)–(3.5)).

Кроме того, сами генераторы орбитальных вращений также являются векторами, поскольку

$$[\hat{l}_\alpha, \hat{l}_\beta] = i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{l}_\gamma. \quad (3.11)$$

Если поле — векторная функция, $\Phi = \mathcal{A}(\mathbf{r})$, то закон преобразования для векторов в общем виде

$$\mathcal{A}'^\alpha(\mathbf{r}') = \frac{\partial r'^\alpha}{\partial r^\beta} \mathcal{A}^\beta(\mathbf{r}),$$

в случае поворотов можно представить в виде действия на нее оператора вращений

$$G \circ \mathcal{A}(\mathbf{r}) = S(G) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}_G(\mathbf{r}_G) = S(G) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{r}),$$

где $S_\beta^\alpha(G) = \partial r'^\alpha / \partial r^\beta$ — матрица поворотов векторного пространства, которая для инфинитезимальных поворотов равна

$$S(G) = \mathbb{1} - i s_\gamma \phi_\gamma,$$

где \mathbf{s} , по-прежнему, — матрицы поворотов (3.3)–(3.5). Учитывая это определение и повторяя выкладки для бесконечно малых преобразований, найдем, что

$$(1 + \delta_G) \mathcal{A}(\mathbf{r}) = (1 - i \hat{j}_\alpha \phi_\alpha) \mathcal{A}(\mathbf{r}), \quad (3.12)$$

где

$$\hat{j} = \hat{l} + \mathbf{s},$$

т.е. полный генератор \hat{j} есть сумма дифференциального оператора орбитальных вращений \hat{l} и матрицы *спина* векторного поля \mathbf{s} . Конечно, после умножения на \hbar эти величины приобретают смысл операторов полного момента импульса $\hat{J} = \hbar \hat{j}$, орбитального момента импульса $\hat{\ell} = \hbar \hat{l}$ и спинового момента собственного вращения $\mathbf{s} = \hbar \mathbf{s}$ в пространстве амплитуд вероятности траекторий Ψ .

В случае тензорного поля ранга k по каждому из индексов тензора α_n , $n = \{\overline{1, n}\}$, при вращениях необходимо ввести действие матрицы спина векторного поля $(\mathbf{s}^{(n)})_{\beta_n}^{\alpha_n}$, в то время как матрица инфинитезимальных поворотов примет вид

$$S(G) \mapsto \mathbb{1} - i \phi_\gamma \sum_{n=1}^k s_\gamma^{(n)},$$

где сумма

$$\mathbf{S} = \sum_{n=1}^k \mathbf{s}^{(n)}$$

называется полным спином тензора.

Лекция № 7

Транспонирование и эрмитово сопряжение квадратных матриц, бра- и кет-векторы, уравнение на собственные значения, секулярное уравнение, вещественные собственные значения эрмитовых матриц, степень вырождения спектра, ортогональность собственных векторов с разными собственными значениями, собственные вектора и собственные значения матрицы проекция спина на ось z для $s = 1$, сферическая гармоника единичного радиус-вектора, действие повышающих и понижающих матриц для $s = 1$, нулевой коммутатор эрмитовых матриц и совместный базис собственных векторов, физический смысл коммутаторов генераторов группы вращений, общий случай «операторного» квантования матриц спина группы вращений, базис векторов спина s и действие на него понижающих и повышающих матриц, число компонент в базисе спина s , тензорные поля как базис полей с целым спином, переход от стандартного представления к индексному в декартовом базисе, спин $s = 2$, неприводимые представления для полей спина s — симметричные бесследовые тензоры ранга s , нулевой спин символов Кронекера и Леви-Чивита, сферические гармоники $Y_{l,m}$ как симметричные бесследовые тензоры ранга l в виде тензорного произведения единичных радиус-векторов.

15. Спин $s = 1$

Для исследования свойств матриц спина векторной частицы, напомним ряд определений для квадратных матриц \hat{A} размером $n \times n$, которые действуют на n -мерные столбцы, т.е. в n -мерном комплексном пространстве.

Транспонированная матрица A^T имеет элементы

$$(A^T)_{\beta}^{\alpha} = A_{\alpha}^{\beta}. \quad (3.13)$$

Эрмитово сопряженная матрица A^{\dagger} имеет элементы, комплексно сопряженные элементам транспонированной матрицы:

$$(A^{\dagger})_{\beta}^{\alpha} = (A^*)_{\alpha}^{\beta}. \quad (3.14)$$

Эрмитово самосопряженная матрица или просто эрмитова матрица совпадает со своей эрмитово сопряженной,

$$A^{\dagger} = A \Rightarrow A_{\beta}^{\alpha} = (A^*)_{\alpha}^{\beta}. \quad (3.15)$$

Из определений матриц спина векторной частицы

$$s_x = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_y = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3)-(3.5)$$

следует, что эти матрицы являются эрмитовыми.

Элементы комплексного векторного n -мерного пространства, т.е. столбцы, будем обозначать символом кет-вектора:

$$|\mathcal{A}\rangle \equiv \mathcal{A} = \sum_{\alpha=1}^n \mathcal{A}^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} = \mathcal{A}^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} \mapsto \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathcal{A}^{(n)} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Например, в трехмерном евклидовом пространстве векторы базиса —

$$|\mathbf{e}_x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{e}_y\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{e}_z\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а вектор

$$|\mathcal{A}\rangle = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^x \\ \mathcal{A}^y \\ \mathcal{A}^z \end{pmatrix}.$$

Эрмитово сопряженные ковекторы, т.е. строки с комплексно сопряженными элементами столбца, будем обозначать бра-векторами⁶

$$\langle \mathcal{A} | = (\mathcal{A}^{*(1)}, \dots, \mathcal{A}^{*(n)}). \quad (3.17)$$

⁶От английского слова «скобка»: bracket = ⟨bra|cket⟩ согласно Дираку.

Для квадратных матриц ставится задача на собственные значения:

$$A|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle, \quad |\lambda\rangle \neq 0. \quad (3.18)$$

Собственный вектор $|\lambda\rangle$ не равен нулю, что может иметь место лишь при условии

$$\det(A - \lambda \cdot \mathbb{1}) = 0, \quad (3.19)$$

поскольку

$$(A - \lambda \cdot \mathbb{1})|\lambda\rangle = 0,$$

и если матрица $(A - \lambda \cdot \mathbb{1})$ имеет обратную, то домножение этого уравнения на обратную матрицу приводило бы к $|\lambda\rangle = 0$, так что условие отсутствия обратной матрицы в виде (3.19) означает существование ненулевого собственного вектора $|\lambda\rangle$. Уравнение (3.19) носит название секулярного уравнения на собственные значения матрицы A . Эрмитово сопряжение секулярного уравнения показывает, что собственные значения эрмитово сопряженной матрицы A^\dagger являются комплексно сопряженными значениями λ^* матрицы A . Отсюда следует, что эрмитовы матрицы имеют вещественные собственные значения.

Секулярное уравнение является полиномом степени n по искомому собственному значению, а значит, оно имеет n решений с учетом степени кратности каждого решения. Спектр собственных значений эрмитовой матрицы может быть невырожден или вырожден, т.е., если одному собственному значению отвечает единственный собственный вектор, то это значение невырождено, если пространство собственных векторов для заданного собственного значения не одномерно, а k -мерно, то говорят о степени вырождения, равной $k > 1$. В базисе собственных векторов эрмитова матрица диагональна: на диагонали стоят собственные значения с учетом кратности их вырождения.

Собственные вектора эрмитовой матрицы с различными собственными значениями ортогональны, поскольку из уравнений

$$A|\lambda_1\rangle = \lambda_1|\lambda_1\rangle, \quad A|\lambda_2\rangle = \lambda_2|\lambda_2\rangle,$$

следует, что после умножения слева на строку бра-вектора

$$\langle\lambda_2|A|\lambda_1\rangle = \lambda_1\langle\lambda_2|\lambda_1\rangle, \quad \langle\lambda_1|A|\lambda_2\rangle = \lambda_2\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle,$$

что при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ возможно, только если

$$\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle = 0,$$

поскольку

$$\langle\lambda_1|A|\lambda_2\rangle^\dagger = \lambda_2^\dagger\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle^\dagger \Rightarrow \langle\lambda_2|A|\lambda_1\rangle^\dagger = \lambda_2\langle\lambda_2|\lambda_1\rangle,$$

в силу эрмитовости матрицы и вещественности её собственного значения.

Найдем собственные значения эрмитовой матрицы s_z в (3.3), т.е. проекции спина векторной частицы на ось z :

$$\det(s_z - \lambda \cdot \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -i & 0 \\ i & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 1) = 0.$$

Итак, проекция спина имеет три собственных значения $\lambda = \{-1, 0, +1\}$ в трехмерном пространстве, так что спектр собственных значений невырожден. Отнормируем собственные кет-вектора $|\lambda\rangle$ на единицу, так что с точностью до комплексной фазы найдем

$$|+1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

В терминах компонент декартовых координат эти собственные состояния задаются полями

$$\mathcal{A}_\pm = \langle\mathcal{A}|\pm 1\rangle = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{A}_x \pm i\mathcal{A}_y), \quad \mathcal{A}_0 = \langle\mathcal{A}|0\rangle = \mathcal{A}_z. \quad (3.21)$$

Например, поле единичного радиус-вектора $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ в переменных сферических координат

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

имеет компоненты с определенными значениями проекции спина на ось z :

$$n_{\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (n_x \pm i n_y) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{\pm i \phi}, \quad n_0 = n_z = \cos \theta. \quad (3.22)$$

Наряду с (3.22) вводят сферические гармоники этого вектора $\mathcal{Y}_{1,\pm 1}$ и $\mathcal{Y}_{1,0}$, которые отличаются только нормировкой:

$$\int d\Omega \mathcal{Y}_{1,m}^* \mathcal{Y}_{1,m'} = \delta_{mm'},$$

так что

$$\mathcal{Y}_{1,m} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} n_m, \quad m = \{\pm 1, 0\}.$$

Представление поля в виде сферических гармоник называют стандартным в отличие от покомпонентного представления в декартовых координатах.

Собственные вектора матрицы спина s_z не являются собственными для матриц s_x и s_y . Более того, вводят повышающие и понижающие матрицы

$$s_{\pm} = s_x \pm i s_y, \quad s_{\pm}^{\dagger} = s_{\mp}, \quad s_{+} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Легко найти, что повышающий оператор увеличивает значение проекции на единицу,

$$s_{+}|+1\rangle = 0, \quad s_{+}|0\rangle = \sqrt{2}|+1\rangle, \quad s_{+}|-1\rangle = \sqrt{2}|0\rangle,$$

а понижающий уменьшает на единицу,

$$s_{-}|+1\rangle = \sqrt{2}|0\rangle, \quad s_{-}|0\rangle = \sqrt{2}|-1\rangle, \quad s_{-}|-1\rangle = 0.$$

Поскольку для вектора квадрат матрицы спина — это число, $\mathbf{s}^2 = 2$, собственные вектора s_z являются собственными и для квадрата спина векторной частицы.

Здесь логично поставить вопрос о том, в каком случае две эрмитовы матрицы могут иметь совместный базис собственных векторов. Такой базис может служить основой для классификации полей по собственным значениям генераторов группы симметрии, в нашем случае, группы вращений.

16. Совместный базис двух эрмитовых матриц

Пусть две эрмитовы матрицы $A^{\dagger} = A$, $B^{\dagger} = B$ имеют совместный базис:

$$A|a, b\rangle = a|a, b\rangle, \quad B|a, b\rangle = b|a, b\rangle.$$

Тогда

$$AB|a, b\rangle = Ab|a, b\rangle = bA|a, b\rangle = ba|a, b\rangle, \quad BA|a, b\rangle = Ba|a, b\rangle = aB|a, b\rangle = ab|a, b\rangle,$$

а значит,

$$(AB - BA)|a, b\rangle = [A, B]|a, b\rangle = 0,$$

для любых базисных векторов, следовательно, коммутатор таких матриц равен нулю:

$$[A, B] = 0.$$

Справедливо и обратное утверждение: если коммутатор двух эрмитовых матриц равен нулю, то может быть выбран совместный базис их собственных векторов. В самом деле, если спектр матрицы A невырожден, $A|a\rangle = a|a\rangle$, то введем

$$|f\rangle = B|a\rangle.$$

Тогда в силу равенства нулю коммутатора

$$A|f\rangle = AB|a\rangle = BA|a\rangle = Ba|a\rangle = aB|a\rangle = a|f\rangle,$$

а значит, вектор $|f\rangle$ является собственным для матрицы A со значением a , т.е. в силу невырожденности собственного значения

$$|f\rangle = f|a\rangle, \quad \Rightarrow \quad B|a\rangle = f|a\rangle,$$

и следовательно, f — собственное значение для эрмитовой матрицы B , которое должно быть вещественным, и базисный вектор $|a\rangle$ общий для обеих матриц.

Если собственное значение a вырождено, $A|a, \alpha\rangle$, со степенью вырождения k , $\alpha = \{\overline{1, k}\}$, то введем

$$|f, \alpha\rangle = B|a, \alpha\rangle,$$

так что

$$A|f, \alpha\rangle = AB|a, \alpha\rangle = BA|a, \alpha\rangle = B a|a, \alpha\rangle = a B|a, \alpha\rangle = a|f, \alpha\rangle,$$

т.е. мы имеем вектор в k -мерном пространстве собственных векторов с собственным значением a , а значит, он разлагается по исходному базису $|a, \alpha\rangle$,

$$|f, \alpha\rangle = C_\alpha^\beta |a, \beta\rangle = B|a, \alpha\rangle.$$

Здесь квадратная матрица C размерности $k \times k$ является эрмитовой как результат действия в k -мерном пространстве матрицы B в силу эрмитовости матрицы B . Это означает, что можно перейти от базиса $|a, \alpha\rangle$ к базису собственных значений матрицы C :

$$C|a, \gamma\rangle = c_{(\gamma)} |a, \gamma\rangle, \quad \text{нет суммирования по } \gamma.$$

В этом базисе,

$$B|a, \gamma\rangle = c_{(\gamma)} |a, \gamma\rangle, \quad \text{нет суммирования по } \gamma,$$

а значит, $c_{(\gamma)}$ — собственное значение матрицы B , и мы построили совместный базис собственных векторов для двух коммутирующих эрмитовых матриц.

Итак, для классификации полей по собственным значениям эрмитовых генераторов группы симметрии, в частности, группы вращения, необходимо выбрать максимальный набор попарно коммутирующих генераторов, для которого можно построить совместный базис собственных векторов. Такой набор называют полным набором наблюдаемых для генераторов симметрии.

Проведенное рассмотрение показало физический смысл коммутатора генераторов группы симметрии: собственное значение одного генератора группы не изменяется при действии бесконечно малого преобразования группы с другим генератором, который коммутирует с первым. Если генераторы не коммутируют, то собственные значения генератора меняются при действии преобразования с другим генератором.

Осуществим такое рассмотрение для генераторов спина тензорных полей.

17. Квантование спина

Пусть s — эрмитовы матрицы, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям генераторов группы вращений:

$$[s_\alpha, s_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} s_\gamma. \quad (3.7)$$

Отсюда следует, что в полный набор наблюдаемых можно включить лишь один из генераторов, например, s_z , так как два других генератора не коммутируют с ним и не могут иметь совместного с ним базиса собственных векторов.

Ясно, что нулевой коммутатор у генератора вращений может быть только с самим собой или со скалярной величиной, которая не преобразуется при вращениях, поскольку собственное значение скалярной величины до вращения и после вращения не изменяется. Из генераторов группы вращений можно построить лишь один независимый скаляр⁷, s^2 . Вычислим коммутатор

$$[s^2, s_\alpha] = [s_\beta s_\beta, s_\alpha]$$

с помощью тождества

$$[AB, C] = ABC - CAB = ABC - ACB + ACB - CAB = A[B, C] + [A, C]B,$$

откуда

$$[s_\beta s_\beta, s_\alpha] = s_\beta [s_\beta, s_\alpha] + [s_\beta, s_\alpha] s_\beta = i\epsilon_{\beta\alpha\gamma} (s_\beta s_\gamma + s_\gamma s_\beta).$$

Здесь в круглых скобках — симметричный относительно перестановок индексов β и γ тензор второго ранга — сворачивается с тензором $\epsilon_{\beta\alpha\gamma}$, антисимметричным по перестановкам тех же индексов β и γ , но такая свертка симметричного тензора с антисимметричным всегда тождественно равна нулю⁸. В итоге,

$$[s^2, s_\alpha] = 0, \quad (3.24)$$

⁷ Другие скаляры будут функциями скаляра s^2 .

⁸ Докажите самостоятельно.

и полный набор наблюдаемых составляют $\{\mathbf{s}^2, s_z\}$.

Задача 16. Докажите, что свертка симметричного тензора $s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}$ с антисимметричным $t^{\alpha\beta} = -t^{\beta\alpha}$ тождественно равна нулю:

$$s_{\alpha\beta}t^{\alpha\beta} \equiv 0.$$

Базис тензорных полей удовлетворяет уравнениям на собственные значения полного набора наблюдаемых для группы вращений:

$$\mathbf{s}^2|\lambda_s, m_s\rangle = \lambda_s |\lambda_s, m_s\rangle, \quad s_z|\lambda_s, m_s\rangle = m_s|\lambda_s, m_s\rangle. \quad (3.25)$$

Будем считать этот базис ортонормированным.

В силу (3.24) повышающий и понижающий генераторы

$$s_{\pm} = s_x \pm i s_y,$$

коммутируют с квадратом спина:

$$[\mathbf{s}^2, s_{\pm}] = 0, \quad (3.26)$$

и это означает, что значение λ_s не меняется при действии бесконечно малых преобразований с генераторами $s_{x,y}$, но при действии тех же преобразований меняется значение m_s , так как в противном случае, эти генераторы коммутировали бы с s_z , что неверно. Такое положение указывает, что одному и тому же значению λ_s отвечают несколько значений m_s , т.е. имеет место вырождение спектра собственных значений λ_s по значениям m_s . Между прочим, мы установили общее условие вырожденности спектра эрмитовой матрицы A : если эрмитова матрица A коммутирует с эрмитовыми матрицами B и C , но сами матрицы B и C не коммутируют между собой, то спектр собственных значений матрицы A вырожден, например, по собственным значениям в совместном базисе с матрицей B .

Найдем действие повышающего и понижающего генератора на совместный базис $|\lambda_s, m_s\rangle$. Для этого сначала вычислим коммутаторы

$$[s_{\pm}, s_z] = [s_x, s_z] \pm i[s_y, s_z] = -i s_y \pm i i s_x = \mp s_{\pm}.$$

Тогда

$$s_z s_{\pm}|\lambda_s, m_s\rangle = (s_{\pm} s_z \pm s_{\pm})|\lambda_s, m_s\rangle = (m_s \pm 1) s_{\pm}|\lambda_s, m_s\rangle.$$

Значит, вектор $s_{\pm}|\lambda_s, m_s\rangle$ имеет собственные значения s_z , равные $m_s \pm 1$:

$$s_{\pm}|\lambda_s, m_s\rangle = N_{\pm}(\lambda_s, m_s) |\lambda_s, m_s \pm 1\rangle \Rightarrow (s_{\pm}|\lambda_s, m_s\rangle)^{\dagger} = \langle \lambda_s, m_s | s_{\mp} = N_{\pm}(\lambda_s, m_s) \langle \lambda_s, m_s |,$$

где мы задали комплексную фазу собственного вектора $|\lambda_s, m_s\rangle$ так, чтобы нормировочный коэффициент был бы вещественным. Найдем нормировочный коэффициент $N_{\pm}(\lambda_s, m_s)$. Для этого заметим, что

$$\mathbf{s}^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = s_+ s_- + i[s_x, s_y] + s_z^2 = s_+ s_- - s_z + s_z^2,$$

и аналогично

$$\mathbf{s}^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = s_- s_+ - i[s_x, s_y] + s_z^2 = s_- s_+ + s_z + s_z^2.$$

Тогда

$$\langle \lambda_s, m_s | s_{\mp} s_{\pm} | \lambda_s, m_s \rangle = (s_{\pm} | \lambda_s, m_s \rangle)^{\dagger} s_{\pm} | \lambda_s, m_s \rangle = N_{\pm}^2(\lambda_s, m_s),$$

т.е.

$$N_{\pm}^2(\lambda_s, m_s) = \langle \lambda_s, m_s | s_{\mp} s_{\pm} | \lambda_s, m_s \rangle = \langle \lambda_s, m_s | (\mathbf{s}^2 - s_z^2 \mp s_z) | \lambda_s, m_s \rangle = \lambda_s - m_s(m_s \pm 1).$$

Поскольку нормировка вектора не может быть отрицательной, $N_{\pm}^2(\lambda_s, m_s) \geq 0$. Это условие может быть выполнено, только если в цепочках многократного действия повышающего и понижающего операторов, во-первых, значения m_s не произвольны, а принимают такие значения, чтобы

$$m_s(m_s \pm 1) \leq \lambda_s,$$

и во-вторых, должны существовать максимальное m_s^{\max} и минимальное m_s^{\min} значения, которые дают в точности нулевые значения нормы вектора после повышения и понижения, соответственно, так как в противном случае повышение и понижение приводило бы к возникновению векторов с отрицательной нормой, что недопустимо, т.е.

$$m_s^{\max}(m_s^{\max} + 1) = \lambda_s, \quad m_s^{\min}(m_s^{\min} - 1) = \lambda_s.$$

Вместе с тем, действуя многократно на вектор $|\lambda_s, m_s^{\max}\rangle$ понижающим оператором n раз, мы получим $m_s = m_s^{\max} - n$ и в конце концов вектор, в точности равный $|\lambda_s, m_s^{\min}\rangle$, в силу существования минимально допустимого значения m_s , т.е. для некоторого неотрицательного целого значения n верно $m_s^{\min} = m_s^{\max} - n$. Тогда связь минимального и максимального значений проекции спина на ось z с собственным значением квадрата спина λ_s приводит к единственному решению в виде

$$m_s^{\max}(m_s^{\max} + 1) - m_s^{\min}(m_s^{\min} - 1) = 0, \quad \Rightarrow \quad m_s^{\max}(m_s^{\max} + 1) - (m_s^{\max} - n)(m_s^{\max} - n - 1) = 0, \quad \Rightarrow$$

$$m_s^{\max} = \frac{n}{2}, \quad m_s^{\min} = -\frac{n}{2}.$$

Максимальное значение проекции спина на ось z обозначают символом s , так что

$$s = \frac{n}{2}, \quad (3.27)$$

т.е. допустимые значения проекции спина — это положительные полуцелые и целые значения. Целые значения отвечают полям, которые называют тензорными, а полуцелые — спинорным полям.

Базис полей, таким образом, образуют совместные собственные векторы квадрата спина и его проекции на выбранную ось, так что изменяя обозначения путем подстановки $\lambda_s = s(s+1) \mapsto s$ запишем его в виде

$$|s, m_s\rangle, \quad m_s \in \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\}. \quad (3.28)$$

Действие повышающей и понижающей матриц спина на базисные вектора строго определено,

$$s_{\pm}|s, m_s\rangle = \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)}|s, m_s \pm 1\rangle. \quad (3.29)$$

В частном случае $s = 1$, мы убедились, что соотношения (3.29) являются тождествами согласно проведенной нами процедуре прямого построения матриц спина и собственных векторов для матрицы s_z .

Размерность пространства собственных векторов квадрата спина и его проекции на выбранную ось равна один старший вектор с максимальным значением проекции и n шагов от старшего вектора до младшего, т.е. вектора с минимальным значением проекции, а значит,

$$k = 1 + n = 1 + 2s.$$

Это число компонент называют мультиплетностью неприводимого представления группы вращений для поля. Неприводимым это представление называют потому, что при вращениях, т.е. при действии генераторов спина, вектор с заданной проекцией спина на ось z перемешивается со всеми другими векторами базиса с тем же значением квадрата спина, т.е. пространство собственных векторов с заданным квадратом спина не содержит в себе подпространств, вектора которых не смешивались бы друг с другом при действии группы вращений.

Для скаляра $s = 0$, и поле имеет одну единственную компоненту, поэтому скаляр называют синглетом и обозначают символом 1. У вектора $s = 1$, и поле имеет три компоненты, это — триплет 3, у спинора $s = \frac{1}{2}$, и поле имеет две компоненты, это — дублет 2.

Напомним, что построенный нами базис называют стандартным, он решает задачу классификации полей по базису собственных векторов генераторов спина.

Задача 17. Найдите преобразование матриц спина векторного поля, которое переводит эти матрицы из базиса декартовых координат к матрицам в стандартном базисе собственных векторов с заданными значениями проекции спина на ось z .

18. Тензорные поля

Рассмотрим, как стандартное представление тензорного поля связано с его индексным представлением по компонентам в декартовом базисе евклидова пространства.

Для скалярного поля ответ элементарен, поскольку скалярная функция с $s = 0$ имеет лишь одну единственную компоненту, так что $\langle \Phi|0, 0\rangle = \Phi(\mathbf{r})$.

Для векторного поля $s = 1$, и вопрос был уже рассмотрен нами выше:

$$\mathcal{A}_{\pm} = \langle \mathcal{A}|\pm 1\rangle = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{A}_x \pm i \mathcal{A}_y), \quad \mathcal{A}_0 = \langle \mathcal{A}|0\rangle = \mathcal{A}_z, \quad (3.21)$$

причем было рассмотрено и действие повышающей и понижающей матриц на эти компоненты, которое согласуется с общим выражением (3.29),

$$s_+ \mathcal{A}_+ = 0, \quad s_+ \mathcal{A}_0 = \sqrt{2} \mathcal{A}_+, \quad s_+ \mathcal{A}_- = \sqrt{2} \mathcal{A}_0, \quad (3.30)$$

и

$$s_- \mathcal{A}_+ = \sqrt{2} \mathcal{A}_0, \quad s_- \mathcal{A}_0 = \sqrt{2} \mathcal{A}_-, \quad s_- \mathcal{A}_- = 0. \quad (3.31)$$

Заметим теперь, что любое тензорное поле с заданным значением $s^2 = s(s+1)$ легко построить, если начать со старшего собственного вектора, действуя понижающей матрицей.

Например, для поля $T_{\alpha\beta}$ с $s = 2$, матрицы спина являются суммой двух матриц по каждому из индексов, $\mathbf{S} = \mathbf{s}^{(1)} + \mathbf{s}^{(2)}$, а значит, старший вектор —

$$T_{(+2)} = \langle T | 2, +2 \rangle = T_{+++}, \quad S_+ T_{+++} = (s_+^{(1)} + s_+^{(2)}) T_{+++} = 0, \quad S_z T_{+++} = (s_z^{(1)} + s_z^{(2)}) T_{+++} = 2 T_{+++},$$

т.е., проводя замену по каждому индексу также, как и для вектора, найдем

$$T_{+++} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (T_{x+} + iT_{y+}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} (T_{xx} + iT_{xy}) - \frac{1}{\sqrt{2}} i (T_{yx} + iT_{yy}) \right),$$

и после приведения подобных членов

$$T_{+++} = \frac{1}{2} \{T_{xx} - T_{yy} + i(T_{xy} + T_{yx})\}. \quad (3.32)$$

Затем, поскольку $S_- |2, +2\rangle = \sqrt{2 \cdot 3 - 2 \cdot 1} |2, +1\rangle = 2 |2, +1\rangle$,

$$T_{(+1)} = \frac{1}{2} (s_-^{(1)} + s_-^{(2)}) T_{+++} = \frac{1}{2} (\sqrt{2} T_{0+} + \sqrt{2} T_{+0}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (T_{z+} + T_{+z}) = -\frac{1}{2} (T_{zx} + iT_{zy} + T_{xz} + iT_{yz}),$$

т.е.

$$T_{(+1)} = -\frac{1}{2} \{T_{zx} + T_{xz} + i(T_{zy} + T_{yz})\}. \quad (3.33)$$

Далее, $S_- |2, +1\rangle = \sqrt{2 \cdot 3 - 1 \cdot 0} |2, 0\rangle = \sqrt{6} |2, 0\rangle$, а значит,

$$T_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{6}} (s_-^{(1)} + s_-^{(2)}) T_{(+1)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} (s_-^{(1)} + s_-^{(2)}) (T_{0+} + T_{+0}) = \frac{1}{2\sqrt{3}} (\sqrt{2}(T_{-+} + T_{00}) + \sqrt{2}(T_{00} + T_{+-})),$$

что после несложных арифметических действий дает

$$T_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \{2T_{zz} - T_{xx} - T_{yy}\}. \quad (3.34)$$

Аналогично найдем, что

$$T_{(-2)} = T_{--} = T_{++}^*, \quad T_{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (T_{z-} + T_{-z}) = -T_{(+1)}^*. \quad (3.35)$$

Итак, тензорное поле с заданным значением спина s можно построить из старшего вектора путем действия понижающей матрицы и, при этом, это тензорное поле имеет $2s+1$ компонент.

Заметим, что тензорное поле с заданным спином $s = 2$ описывается симметричным вкладом тензора $T_{\alpha\beta}$, что ясно уже из того, что старший вектор является симметричным по перестановке индексов, а понижающая матрица также построена симметрично по перестановке индексов. Отсюда следует, что спин $s = 2$ отвечает симметричным тензорам ранга 2. При этом этот тензор обладает еще и нулевым следом, поскольку след дает нулевой вклад в компоненты стандартного представления для тензорного поля с $s = 2$, что следует из явного вида построенных нами компонент (3.32)–(3.35). Кроме того, если посчитать число степеней свободы, симметричный тензор второго ранга имеет 6 независимых компонент, след тензора является инвариантом и не преобразуется при вращениях, так что требование нулевого следа симметричного тензора второго ранга как раз оставляет пять независимых компонент, как это и должно быть у тензорного поля со спином 2.

В частности, инвариантный тензор Кронекера хоть и обладает рангом, равным 2, дает при подстановке в формулы (3.32)–(3.35) тензорное поле спина 2, тождественно равное нулю, так как, в самом деле, тензор Кронекера не преобразуется при вращениях. т.е. ведет себя как инвариант. Иными словами, старший вектор стандартного представления $\delta_{++} \equiv 0$, а значит, действием на него понижающей матрицей получаются только нулевые вектора спина 2.

Задача 18. Вычислите все компоненты символа Кронекера в базе $\{+, -, 0\}$. Ответ: ненулевые компоненты $\delta_{00} = -\delta_{+-} = -\delta_{-+} = 1$.

Теперь, поскольку любой симметричный тензор $T_{\alpha\beta\gamma\dots}$ можно представить в виде суммы тензора с нулевым следом $\tilde{T}_{\alpha\beta\gamma\dots} = T_{\alpha\beta\gamma\dots} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}T'_{\gamma\dots}$ и тензора меньшего ранга $T'_{\gamma\dots} = \delta_{\alpha\beta}T_{\alpha\beta\gamma\dots}$, умноженного на символ Кронекера: $\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}T'_{\gamma\dots}$, можно рассматривать независимо преобразования при вращениях бесследовых тензоров ранга s и тензоров с рангом на две единицы меньше. При этом, вклад тензора $\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}T'_{\gamma\dots}$ в старший вектор спина s равен $\frac{1}{3}\delta_{++}T'_{+\dots} \equiv 0$, а значит, он не дает вклада в спин s . Следовательно, симметричный тензор спина s — бесследовый.

Рассмотрим число степеней свободы такого симметричного бесследового тензора методом математической индукции:

- вектор, т.е. тензор ранга $s = 1$, имеет $3 = 2s + 1$ независимых компоненты;
- если симметричный бесследовый тензор ранга s обладает $2s + 1$ независимой компонентой, то добавление еще одного индекса к нему эквивалентно домножению этого тензора на трехмерный вектор, что делает его тензором ранга $s + 1$ с числом независимых компонент равным $(2s + 1) \cdot 3$, так что у этого тензора можно выделить вклады, антисимметричные по перестановкам «старых» индексов с новым, и каждый такой вклад будет иметь 3 независимых векторных компоненты, как у векторного произведения, а значит, антисимметричная часть тензора будет содержать $3s$ независимых компонент, к тому же можно взять след, сворачивая новый индекс со «старым», что дает s независимых степеней свободы — ненулевых значений следа, а следовательно, в итоге, у построенного тензорного произведения с $(2s + 1) \cdot 3$ компонентами можно выделить симметричную по всем индексам бесследовую часть с числом компонент, равным $(2s + 1) \cdot 3 - 3s - s = 2(s + 1) + 1$, что и требовалось;
- по индукции заключаем, что симметричные бесследовые тензоры ранга s имеют $2s + 1$ независимых компонент и отвечают тензорным полям спина s .

Например, если исходный тензор был символом Кронекера, то его бесследовая часть тождественно равна нулю, что отвечает нулевому полю со спином 2 для символа Кронекера. Тензор Леви-Чивиты бесследовый и имеет ранг, равный 3, но он антисимметричен, так что его спин равен нулю, и это — инвариантный тензор.

Итак, тензорные поля с определенным значением квадрата спина s описываются симметричными тензорами ранга s с нулевым следом по любой паре индексов. Они представляют собой неприводимые представления группы вращений мультиплетностью $2s + 1$.

В качестве примера, рассмотрим симметричный бесследовый тензор второго ранга, составленный из единичных радиус-векторов:

$$T_{\alpha\beta} = n_{\alpha}n_{\beta} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}.$$

Его компоненты

$$T_{(\pm 2)} = \frac{1}{2}\sin^2\theta e^{\pm i2\phi}, \quad T_{(\pm 1)} = \mp \sin\theta \cos\theta e^{\pm i\phi}, \quad T_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(3\cos^2\theta - 1),$$

пропорциональны сферическим гармоникам $\mathcal{Y}_{2,m} \sim T_{(m)}$, $m = \{\pm 2, \pm 1, 0\}$.

Сферические гармоники $\mathcal{Y}_{l,m}(\theta, \phi)$ строятся из старшего вектора $\mathcal{Y}_{l,l} \sim (n_+)^l = \frac{(-1)^l}{\sqrt{2^l}} \sin^l\theta e^{il\phi}$ действием понижающего оператора. При этом $\mathcal{Y}_{l,-m} = (-1)^m \mathcal{Y}_{l,m}^*$. Условие нормировки

$$\int d\Omega \mathcal{Y}_{l,m}^*(\theta, \phi) \mathcal{Y}_{l,m'}(\theta, \phi) = \delta_{mm'}$$

приводит к соотношению⁹

$$\mathcal{Y}_{l,l}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{(2l+1)!}{2^l}} \frac{1}{l!} (n_+)^l.$$

Мы видим, что при вращениях компоненты тензора с заданным спином преобразуются друг в друга. В этом случае говорят о неприводимом представлении группы вращений: для таких тензорных полей с определенным значением спина невозможно выделить подпространство, элементы которого не смешиваются с элементами других подпространств.

⁹Вычислите нормировочный коэффициент самостоятельно.

Лекция № 8

Разложение тензора второго ранга в прямую сумму неприводимых слагаемых с $s = 0, 1, 2$, симметричные и антисимметричные вклады, спинор и матрицы Паули, антикоммутатор, преобразование спинора при вращениях, поворот на угол 2π , эквивалентные представления группы вращения спиноров $SU(2)$, сопряженный спинор, билинейный спинорный инвариант и спинорная метрика, индексы с точками и без точек, проекции спина на ось волнового вектора для свободных поперечных полей спина $s = 1$ и $s = 2$.

19. Разложение приводимых тензоров на неприводимые

Рассмотрим тензорное произведение двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , т.е. тензор с компонентами

$$T_{\alpha\beta} = a_\alpha b_\beta.$$

Выделим в этом тензоре симметричный и антисимметричный вклады,

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \{a_\alpha b_\beta + a_\beta b_\alpha\} + \frac{1}{2} \{a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha\},$$

и запишем отдельно бесследовый симметричный тензор и его след:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left\{ a_\alpha b_\beta + a_\beta b_\alpha - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \right\} + \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \frac{1}{2} \{a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha\}.$$

Бесследовый симметричный тензор

$$u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left\{ a_\alpha b_\beta + a_\beta b_\alpha - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \right\}$$

отвечает тензору спина $s = 2$, а значит, его компоненты при вращениях преобразуются друг в друга без наличия инвариантных подмножеств, т.е. это неприводимое представление группы вращений.

Скалярному вкладу спина $s = 0$ отвечает слагаемое

$$s_{\alpha\beta} = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

так как скалярное произведение векторов — это инвариант, также как инвариантом является и символ Кронекера.

Антисимметричный тензор

$$t_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \{a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha\}$$

как матрица 3×3 имеет на диагонали нули, над диагональю 3 независимых элемента, а под диагональю все элементы являются отражением элементов над диагональю с противоположным знаком, так что этот тензор имеет 3 независимых компоненты, причем все они могут быть записаны с помощью символа Леви-Чивита в виде

$$t_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_\gamma.$$

Здесь символ Леви-Чивита — инвариантный тензор, а $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ — вектор, т.е. тензорное поле спина $s = 1$.

В итоге, составной тензор второго ранга, который представляет собой тензорное произведение двух тензоров со спином $s = 1$, $T = 3 \otimes 3$, разложен в прямую сумму тензоров со спином 0, 1 и 2 — синглет, триплет и квинтет:

$$SO(3) : \quad 3 \otimes 3 = 1 \oplus 3 \oplus 5.$$

Каждый член этой суммы — неприводимый тензор группы вращений. Таким образом, мы описали пример разложения приводимого тензора по неприводимым, так что для тензора второго ранга это разложение имеет вид

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left\{ T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} T_{\gamma\gamma} \right\} + \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} T_{\gamma\gamma} + \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\gamma\alpha'\beta'} T_{\alpha'\beta'}.$$

Изложенная нами в случае прямого произведения векторов схема действий при разложении тензора на неприводимые слагаемые: выделение симметричной бесследовой части, следа и антисимметричной части, — остается в силе и при рассмотрении тензоров высших рангов и при описании прямого произведения неприводимых тензоров, т.е. при произведении тензоров с определенным спином.

Задача 19. Постройте в явном виде результат разложения в сумму неприводимых слагаемых тензорного произведения в задаче $SO(3) : 5 \otimes 3$.

20. Спин $s = \frac{1}{2}$

Рассмотрим поле с полуцелым спином, $s = \frac{1}{2}$. В этом случае соответствующая спиновая матрица представляется в виде

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.36)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули. Найдем явный вид матриц Паули, используя общие выражения для действия матриц спина на базисные поля. Базис спиновых состояний для краткости обозначений записывают как

$$\left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = |+\rangle, \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = |-\rangle, \quad (3.37)$$

причем это — собственные векторы проекции спина

$$s_z |+\rangle = \frac{1}{2} |+\rangle, \quad s_z |-\rangle = -\frac{1}{2} |-\rangle. \quad (3.38)$$

Следовательно, эта матрица в рассматриваемом базисе имеет диагональный вид

$$s_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Согласно (3.29) ненулевые матричные элементы повышающего и понижающего операторов

$$\langle + | s_+ | - \rangle = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - (-1) \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right)} = 1, \quad (3.39)$$

$$\langle - | s_- | + \rangle = (\langle + | s_+ | - \rangle)^\dagger = 1, \quad (3.40)$$

откуда

$$s_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Тогда обратное преобразование $s_\pm \leftrightarrow s_{x,y}$ дает

$$s_x = \frac{1}{2} (s_+ + s_-) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

и

$$s_y = \frac{1}{2i} (s_+ - s_-) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Поэтому сигма-матрицы Паули — это

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Поле со спином $\frac{1}{2}$, которое называют *спинором*, обладает двумя поляризациями¹⁰

$$\theta^\alpha = \begin{pmatrix} |+\rangle \\ |-\rangle \end{pmatrix}, \quad \alpha = \{1, 2\},$$

поле спинора¹¹

$$\langle \psi(\mathbf{r}) | \theta^\alpha \rangle = \psi^\alpha(\mathbf{r}) \quad (3.45)$$

— это так называемый *двухкомпонентный спинор Паули*.

Преобразования спинора при вращениях имеют такой же вид, как и для тензоров:

$$R(\phi) \circ \psi(\mathbf{r}) = S(\phi) \cdot \psi(\mathbf{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \psi_\phi(\mathbf{r}_\phi) = S(\phi) \cdot \psi(\mathbf{r}),$$

¹⁰ Будем использовать для спинорных индексов греческие буквы в начале алфавита: α, β, \dots , — а для векторных индексов греческие буквы в середине алфавита: μ, ν, \dots

¹¹ В отличие от векторов, для которых в евклидовом пространстве метрика в декартовых координатах — единичная матрица, так что можно не делать различий между верхними и нижними индексами, для спиноров, как будет ясно ниже верхние и нижние индексы несут разную информацию: метрика для спиноров отличается от единичной матрицы.

где $\phi = \phi \mathbf{o}$ — вектор поворота на угол ϕ вокруг оси \mathbf{o} , $R(\phi)$ операция преобразования поля спинора, а $S(\phi)$ спиновое преобразование компонент спинора, которое при бесконечно малых углах равно

$$S(\phi) \approx \mathbb{1} - i s_\gamma \phi_\gamma, \quad \phi \rightarrow 0.$$

Поскольку матрицы спина не зависят от угла поворота, можно записать, что

$$S(\phi + d\phi) = (\mathbb{1} - i \mathbf{s} \cdot d\phi) \cdot S(\phi),$$

а значит, имеет место дифференциальное уравнение

$$\frac{dS(\phi)}{d\phi} = -i \mathbf{s} \cdot S(\phi), \quad (3.46)$$

которое легко интегрируется

$$S(\phi) = e^{-i \mathbf{s} \cdot \phi}. \quad (3.47)$$

Значит, при вращениях спинор преобразуется согласно

$$\psi_\phi^\alpha(\mathbf{r}_\phi) = \{e^{-i \mathbf{s} \cdot \phi}\}_\beta^\alpha \psi^\beta(\mathbf{r}), \quad (3.48)$$

где мы указали матричные индексы в явном виде.

Для вычисления матричной экспоненты установим два факта:

1. коммутационные соотношения

$$[\sigma_\alpha, \sigma_\beta] = 2i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \sigma_\gamma \quad (3.49)$$

следуют из коммутационных соотношений для момента импульса: $[\frac{1}{2}\sigma_\alpha, \frac{1}{2}\sigma_\beta] = i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{2}\sigma_\gamma$;

2. антикоммутиационные соотношения

$$\{\sigma_\alpha, \sigma_\beta\} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_\alpha \sigma_\beta + \sigma_\beta \sigma_\alpha = 2\delta_{\alpha\beta} \quad (3.50)$$

устанавливаются прямыми вычислениями произведений матриц Паули (с использованием повышающей и понижающей матриц с учетом их размера 2×2).

Поскольку

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta = \frac{1}{2} [\sigma_\alpha, \sigma_\beta] + \frac{1}{2} \{\sigma_\alpha, \sigma_\beta\},$$

находим

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta = i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \sigma_\gamma + \delta_{\alpha\beta}. \quad (3.51)$$

Домножая это тождество на векторы a_α и b_β , получаем

$$(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad (3.52)$$

где $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ — векторное произведение векторов. В частности,

$$(\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \phi^2.$$

Тогда в экспоненте матрицы конечных вращений

$$\hat{R}_S = e^{-i \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\phi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i^n}{2^n n!} (\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\sigma})^n$$

четные степени разложения пропорциональны единичной матрице, а нечетные — оператору

$$(\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = |\boldsymbol{\phi}| (\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{o}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{o}),$$

где \mathbf{o} — единичный вектор вдоль оси поворота. Тогда суммирование четных и нечетных степеней дает

$$\hat{R}_S = e^{-i \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\phi}} = \cos\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{o})\right) - i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{o}) \sin\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{o})\right). \quad (3.53)$$

При повороте вокруг оси на угол $2\pi = (\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{o})$ получаем $\mathbf{r}^\phi = \mathbf{r}$ и

$$e^{-i \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\phi}} \Big|_{2\pi} = -1. \quad (3.54)$$

Значит,

$$\psi^\alpha(\mathbf{r}) \Big|_{2\pi} = -\psi^\alpha(\mathbf{r}), \quad (3.55)$$

т.е. поле спинора меняет знак после поворота на угол 2π . Это свойство, очевидно, является общим для всех частиц с полуцелым спином, которых называют фермионами.

21. Спинорная метрика

Заметим, что матрицы σ_x, σ_z вещественные, так что

$$\sigma_x^* = \sigma_x^T = \sigma_x, \quad \sigma_z^* = \sigma_z^T = \sigma_z,$$

а матрица σ_y чисто мнимая, и

$$\sigma_y^* = \sigma_y^T = -\sigma_y.$$

Для того чтобы отличать фиксированный набор матриц (3.44) от матриц, которые получаются при проецировании на произвольно заданные оси декартовых координат $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ часто для матриц Паули используют обозначения $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$.

С учетом антикоммутиационных соотношений элементарно находим

$$\sigma_2 \sigma^* \sigma_2 = \sigma_2 \sigma^T \sigma_2 = -\sigma. \quad (3.56)$$

Отсюда немедленно следует, что

$$\sigma_2 \{e^{-i\mathbf{s}\cdot\phi}\}^T \sigma_2 = e^{i\mathbf{s}\cdot\phi} \Leftrightarrow \sigma_2 \hat{R}_S^T \sigma_2 = \hat{R}_S^\dagger, \quad (3.57)$$

и совершенно аналогично

$$\sigma_2 \hat{R}_S^* \sigma_2 = \hat{R}_S. \quad (3.58)$$

Говорят, что соотношения (3.57) и (3.58) устанавливают соответственно эквивалентность транспонированного представления группы вращения спиноров эрмитово сопряженному представлению этой группы и эквивалентность комплексно сопряженного представления исходному спинорному представлению.

Действительно, рассмотрим, например, спинор-столбец, построенный по комплексно сопряженному спинору,

$$\psi_c = i \sigma_2 \psi^*.$$

При вращениях он переходит в

$$\psi_c^\phi = i \sigma_2 (\hat{R}_S \psi)^* = \sigma_2 \hat{R}_S^* \sigma_2 (i \sigma_2 \psi^*) = \hat{R}_S \psi_c,$$

где мы воспользовались тем, что $\sigma_2^2 = 1$ и соотношением (3.58). Значит, этот спинор при вращениях преобразуется также, как и сам спинор ψ . Поэтому произведение двух любых спиноров

$$\psi_c^\dagger \chi = \psi^T (-i \sigma_2) \chi = \psi^\alpha (-i \sigma_2)_{\alpha\beta} \chi^\beta$$

является скаляром, т.е. инвариантом группы вращения спиноров. Итак, последняя формула определяет скалярное произведение двух спиноров. Поэтому согласно общему представлению о метрическом тензоре (как о квадратичной линейной функции) введем метрическую матрицу для спиноров

$$\hat{\epsilon} = -i \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.59)$$

что является не чем иным, как полностью антисимметричным тензором второго ранга в двумерном пространстве:

$$\{\hat{\epsilon}\}_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}, \quad \epsilon_{12} = -1.$$

В терминах метрики скалярное произведение двух произвольных спиноров ψ и χ

$$\psi \cdot \chi = \epsilon_{\alpha\beta} \psi^\alpha \chi^\beta. \quad (3.60)$$

Метрика определяет спиноры с нижними индексами

$$\psi_\beta = \epsilon_{\beta\alpha} \psi^\alpha,$$

так что скалярное произведение

$$\psi \cdot \chi = \psi^\alpha \chi_\alpha.$$

Обратная метрика $\epsilon^{\alpha\beta}$ определяется согласно

$$\epsilon^{\alpha\gamma} \epsilon_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha,$$

но так как

$$(i\sigma_2)(-i\sigma_2) = 1,$$

то, очевидно,

$$\epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon^{\beta\alpha}, \quad \epsilon^{12} = 1.$$

Определенный выше спинор-столбец ψ_c называют сопряженным спинором, и его обычно обозначают спинором с чертой, который имеет верхний индекс с точкой:

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = (i\sigma_2 \psi^*)^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (\psi^{\beta})^* = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \psi_{\dot{\beta}}. \quad (3.61)$$

Как мы показали, этот спинор при вращениях преобразуется также, как и обычный спинор. Поэтому скаляром будет величина

$$\chi^{\dagger} \cdot \psi_c = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}},$$

где мы ввели обозначение для спинора-строки с нижним индексом с точкой, как эрмитово сопряженного к обычному спинору:

$$\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = (\chi_{\alpha})^{\dagger}. \quad (3.62)$$

Элементарно

$$\chi^{\dagger} = \{\chi^*\}^T = \{-i\sigma_2 (i\sigma_2 \chi^*)\}^T = \{-i\sigma_2 \bar{\chi}\}^T.$$

Поэтому

$$\bar{\chi} \cdot \bar{\psi} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\chi}^{\dot{\beta}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}, \quad \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\{i\sigma_2\}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \quad \epsilon_{12} = -1,$$

т.е. метрика $\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ в спинорных индексах с точкой совпадает с метрикой в индексах без точек.

Метрика остается инвариантной при вращениях спиноров. Действительно, общий закон преобразования метрики дает

$$\hat{\epsilon}_S = \hat{R}_S^T \hat{\epsilon} \hat{R}_S = \hat{\epsilon} \left(\hat{\epsilon}^{-1} \hat{R}_S^T \hat{\epsilon} \right) \hat{R}_S = \hat{\epsilon} \hat{R}_S^{\dagger} \hat{R}_S = \hat{\epsilon},$$

где мы воспользовались тождеством (3.57). Группа инвариантности спинорной метрики с $\det \hat{R}_S = 1$ называется специальной унитарной группой на двухкомпонентных спинорах: $SU(2)$. Это трехпараметрическая группа. Мы исследовали алгебру генераторов группы при построении вращений спиноров. Эта алгебра совпадает с алгеброй генераторов группы вращений трехмерного евклидова пространства $SO(3)$. Тем не менее, сами группы отличаются, так как в $SU(2)$ допустимы и полуцелые собственные значения генератора s_z , а в $SO(3)$ — только целые значения j_z . Это особенно ярко проявляется при проведенном выше рассмотрении вращения на угол 2π : для спиноров это вращение дает фактор -1 , а для бозонов, полей с целым значением спина, — фактор $+1$. Существование полей с полуцелым спином возможно, но оно не следует, вообще говоря, из группы вращений евклидова пространства. Факт такого существования — экспериментальный.

22. Поперечные векторные и тензорные поля

В релятивистской теории поля могут возникать особые условия, когда не все поляризации спина реализуются в природе.

Например, для свободного электромагнитного поля уравнения Максвелла дают

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathcal{H} = 0,$$

так что для плоской монохроматической волны, скажем, электрического поля с волновым вектором \mathbf{k} ,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad \omega = ck,$$

найдем, что

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = i\mathbf{k} \cdot \mathcal{E} = 0,$$

т.е. поле является поперечным по отношению к волновому вектору в силу уравнений Максвелла. Значит, если в качестве оси z выбрать направление волнового вектора, то нулю должна быть равна компонента вектора с нулевой проекцией спина на ось волнового вектора, а отличными от нуля будут лишь две компоненты: с проекцией спина на ось волнового вектора, равной $+1$ и -1 .

Такая ситуация характерна для теорий с калибровочной инвариантностью, когда, например, электромагнитное поле — это калибровочное поле с массой, равной нулю.

Другой пример — это свободное безмассовое гравитационное поле, которое описывается симметричным бесследовым тензором второго ранга $h_{\mu\nu}$. Оно тоже является поперечным по каждому из индексов,

$$\nabla_{\mu} h^{\mu\nu} = 0.$$

Значит, опять же рассматривая плоскую монохроматическую волну с волновым вектором, направленным вдоль оси z , мы устанавливаем, что с учетом симметричности тензора

$$h_{zz} = h_{zx} = h_{zy} = h_{xz} = h_{yz} \equiv 0.$$

Кроме того, теперь вследствие бесследовости

$$h_{\gamma\gamma} = h_{xx} + h_{yy} + h_{zz} = 0 \quad \Rightarrow \quad h_{xx} + h_{yy} = 0.$$

Отсюда, согласно общим формулам описания тензора спина $s = 2$ в § 18., следует, что равны нулю все компоненты тензора с проекциями спина на ось волнового вектора

$$h_{(\pm 1)} = h_{(0)} \equiv 0.$$

Таким образом, поперечное безмассовое свободное гравитационное поле отвечает проекциям спина на ось волнового вектора $m_s = \pm 2$.

В релятивистской теории свободных полей доказывается, что безмассовые поля — поперечные, и поэтому для них реализуются только максимальное и минимальное значения проекции спина на ось волнового вектора.

Тема 4

Тензор энергии-импульса и ток

Лекция № 9

Трансляционная инвариантность в пространстве-времени, 4-ковектор скорости, 4-ток плотности массы и закон сохранения массы в дифференциальной форме, сохранение тензора энергии-импульса и физический смысл компонент тензора: плотность энергии, поток энергии, плотность импульса, давление и напряжение, вращательная симметрия и тензор орбитального момента частиц, антисимметричный тензор углов вращения, сохранение тензора момента импульса как следствие симметричности тензора энергии-импульса, нерелятивистское поле — амплитуда вероятности траектории и уравнения поля из уравнений Гамильтона–Якоби, уравнение Шредингера из принципа наименьшего действия для поля Ψ , тензор энергии-импульса нерелятивистского поля и его компоненты, смысл нормировки поля, глобальная калибровочная инвариантность и электрический 4-ток, закон сохранения вероятности, локальная калибровочная инвариантность и ковариантная производная со связностью, векторный калибровочный бозон, дискретные симметрии зеркальной инверсии пространства и обращения стрелы времени.

23. Тензор энергии-импульса нерелятивистских частиц

Согласно теореме Нётер производная действия по параметру преобразования экстремальной траектории в экстремальную траекторию с той же функцией Лагранжа равна

$$\frac{dS}{da} = \int dt \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{t}q} \left(\frac{\partial q_a}{\partial a} - \frac{\partial t_a}{\partial a} \dot{t}q \right) + L \frac{\partial t_a}{\partial a} \right\}. \quad (1.17)$$

В 4-мерном пространстве, $x^\mu = \{x_0, \mathbf{r}\}$, где $x_0 = ct$, а c имеет размерность скорости, инвариантность действия относительно сдвигов начала отсчета времени и координат,

$$x_a^\mu = x^\mu - a^\mu,$$

означает, что $dS/da^\mu = 0$ и

$$\int dt \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^\alpha} \left(\frac{\partial r_a^\alpha}{\partial a^\mu} - \frac{\partial x_a^0}{\partial a^\mu} \partial_0 r^\alpha \right) + L \frac{\partial x_a^0}{c \partial a^\mu} \right\} = 0.$$

Так как $\partial x_a^\nu / \partial a^\mu = -\delta_\mu^\nu$, в частности,

$$\frac{\partial r_a^\alpha}{\partial a^\mu} = -\delta_\mu^\alpha, \quad \frac{\partial x_a^0}{\partial a^\mu} = -\delta_\mu^0,$$

а

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^\alpha}, \quad \frac{1}{c} E = \frac{1}{c} \{p_\alpha v^\alpha - L\},$$

найдем, что

$$\int dt \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{c} E \delta_\mu^0 - p_\alpha \delta_\mu^\alpha \right\} = 0.$$

Но согласно уравнениям Гамильтона–Якоби

$$\frac{1}{c} E = -\partial_0 S, \quad p_\alpha = \nabla_\alpha S,$$

а действие — скаляр, так что

$$\partial_\mu S = \left(-\frac{1}{c} E, \mathbf{p} \right)$$

является 4-мерным ковектором, который называют 4-импульсом p_μ .

Для свободной нерелятивистской частицы

$$\partial_\mu S = m \left(-\frac{\mathbf{v}^2}{2c}, \mathbf{v} \right),$$

где можно ввести 4-ковектор скорости,

$$\mathcal{U}_\mu = \left(-\frac{\mathbf{v}^2}{2c}, \mathbf{v} \right),$$

так что 4-импульс связан с 4-скоростью $p_\mu = m\mathcal{U}_\mu$. Далее,

$$\int dt m \frac{d}{dt} \{-\mathcal{U}_\mu\} = 0.$$

Рассмотрим 4-скорость как функцию времени и координат на траектории:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{U}_\mu = c\partial_0 \mathcal{U}_\mu + \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \cdot \nabla \mathcal{U}_\mu = c\partial_0 \mathcal{U}_\mu + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{U}_\mu.$$

Если в системе много частиц с плотностью массы $dm/dV = \rho_{(m)}$, то

$$- \int dt dV \rho_{(m)} (c\partial_0 \mathcal{U}_\mu + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{U}_\mu) = 0.$$

Введем 4-ток плотности массы,

$$\mathcal{J}_{(m)}^\mu = \begin{pmatrix} \rho_{(m)}c \\ \rho_{(m)}\mathbf{v} \end{pmatrix},$$

для которого имеет место закон сохранения в полной аналогии с законом сохранения заряда

$$\partial_\mu \mathcal{J}_{(m)}^\mu = 0,$$

в любых декартовых системах отсчета, а значит, произведение 4-ковектора ∇_μ на 4-ток плотности массы $\mathcal{J}_{(m)}^\mu$ является инвариантом $\nabla_\mu \mathcal{J}_{(m)}^\mu = \text{inv.}$, откуда следует, что $\mathcal{J}_{(m)}^\mu$ является 4-вектором.

Тогда закон сохранения может быть записан в виде

$$-\frac{1}{c} \int d^4x \mathcal{J}_{(m)}^\nu \partial_\nu \mathcal{U}_\mu = 0,$$

но в силу сохранения тока плотности массы, его можно внести под знак производной:

$$\int d^4x \partial_\nu \left\{ -\frac{1}{c} \mathcal{J}_{(m)}^\nu \mathcal{U}_\mu \right\} = 0.$$

Это можно записать, введя тензор энергии-импульса нерелятивистских частиц

$$\mathcal{T}_\mu^\nu(\text{part.}) = -\frac{1}{c} \mathcal{J}_{(m)}^\nu \mathcal{U}_\mu, \quad (4.1)$$

так что

$$\int d^4x \partial_\nu \mathcal{T}_\mu^\nu(\text{part.}) = 0. \quad (4.2)$$

Более того, поскольку область интегрирования в пространстве и интервал времени можно считать произвольным, имеет место локальный закон сохранения тензора энергии-импульса:

$$\partial_\nu \mathcal{T}_\mu^\nu(\text{part.}) = 0. \quad (4.3)$$

23.1. Баланс энергии

В (4.2) при $\mu \mapsto 0$ получаем баланс энергии,

$$\int d^3r \mathcal{T}_0^0 \Big|_{t_0}^t + \int d^4x \nabla_\alpha \mathcal{T}_0^\alpha(\text{part.}) = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt} \int d^3r \mathcal{T}_0^0 + c \int d^3r \nabla_\alpha \mathcal{T}_0^\alpha(\text{part.}) = 0.$$

Здесь

$$c\mathcal{T}_0^0 = \frac{1}{2} \rho_{(m)} \mathbf{v}^2 = \varepsilon$$

является плотностью энергии, а поскольку по теореме Гаусса

$$\int_V d^3r \nabla_\alpha \mathcal{T}_0^\alpha(\text{part.}) = \oint_{\partial V} d^2\sigma_\alpha \mathcal{T}_0^\alpha(\text{part.}),$$

компоненты

$$S^\alpha = c^2 \mathcal{T}_0^\alpha = v^\alpha \frac{1}{2} \rho_{(m)} \mathbf{v}^2$$

представляют собой вектор потока плотности энергии \mathbf{S} ,

$$\frac{d}{dt} \int d^3r \varepsilon + \oint_{\partial V} d^2\sigma \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (4.4)$$

что есть, конечно, закон сохранения энергии.

23.2. Баланс импульса

В (4.2) при $\mu \mapsto \alpha = \{\overline{1,3}\}$ получаем баланс импульса,

$$\frac{d}{dt} \int d^3r \mathcal{T}_\alpha^0 + c \int d^3r \nabla_\beta \mathcal{T}_\alpha^\beta(\text{part.}) = 0.$$

Введем плотность импульса

$$P_\alpha = -\mathcal{T}_\alpha^0 = \rho_{(m)} v_\alpha,$$

а поскольку по теореме Гаусса

$$\int_V d^3r \nabla_\beta \mathcal{T}_\alpha^\beta(\text{part.}) = \oint_{\partial V} d^2\sigma_\beta \mathcal{T}_\alpha^\beta(\text{part.}),$$

найдем

$$\frac{d}{dt} \int d^3r P_\alpha = \oint_{\partial V} d^2\sigma_\beta c \mathcal{T}_\alpha^\beta(\text{part.}),$$

компоненты симметричного тензора

$$c \mathcal{T}_\alpha^\beta(\text{part.}) = -\rho_{(m)} v_\alpha v^\beta$$

представляют собой поверхностную плотность сил, действующих на частицы на границе объема V . В частности, диагональные элементы — это поверхностная плотность сил, направленных по нормали к ориентированной площади, т.е. давление на частицы на границе объема, а следовательно, поскольку действие равно противодействию, давление самих частиц p на стенки объема —

$$p_x = -c\mathcal{T}_x^x, \quad p_y = -c\mathcal{T}_y^y, \quad p_z = -c\mathcal{T}_z^z.$$

а значит, вообще говоря, давление в системе частиц не является изотропным. Например, в среднем за интервал времени,

$$p_x = \rho_{(m)} \langle v_x^2 \rangle, \quad p_y = \rho_{(m)} \langle v_y^2 \rangle, \quad p_z = \rho_{(m)} \langle v_z^2 \rangle,$$

и если система большого числа частиц (без структуры, т.е. в случае одноатомных частиц) в среднем изотропна, то давление

$$p = \frac{1}{3} \rho_{(m)} \langle v^2 \rangle.$$

Компоненты \mathcal{T}_y^x и \mathcal{T}_z^x создают усилие на площадку с нормалью, направленной по оси x , в направлении осей y и z , соответственно, т.е. по образующим граням площадки. Поэтому $c\mathcal{T}_\alpha^\beta$ называют тензором напряжений.

Итак, мы установили физический смысл компонент тензора энергии-импульса:

- плотность энергии $\varepsilon = c\mathcal{T}_0^0$,
- плотность импульса $P_\alpha = -\mathcal{T}_\alpha^0$,
- плотность потока энергии $S^\alpha = c^2\mathcal{T}_0^\alpha$,
- давление в системе p по осям — это взятые с противоположным знаком диагональные элементы симметричного тензора напряжений $c\mathcal{T}_\alpha^\beta$.

Подчеркнем, что для нерелятивистских частиц параметр скорости c в определении нулевой координаты 4-мерного пространства $x_0 = ct$ не входит в физические величины тензора энергии-импульса.

24. Тензор орбитального момента

При вращениях на бесконечно малый угол $\phi = \phi \mathbf{O}$ координаты преобразуются по закону

$$\delta \mathbf{r} = \phi \times \mathbf{r}, \quad \delta r_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \phi_\beta r_\gamma.$$

Вместо вектора угла вдоль оси вращения ϕ_γ обычно вводят также антисимметричный тензор второго ранга — угол вращения в плоскости $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$, например, вращение на угол ϕ_z вокруг оси z есть вращение в плоскости (x, y) на угол $\omega_{xy} = \phi_z$, так что

$$\omega_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \phi_\gamma, \quad \phi_\gamma = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \omega_{\alpha\beta}, \quad \delta r_\alpha = \frac{1}{2} \{\omega_{\beta\alpha} - \omega_{\alpha\beta}\} r_\beta.$$

Поскольку время при вращениях не изменяется теорема Нётер приводит к производной действия на экстремальных траекториях

$$\frac{dS}{d\omega_{\alpha\beta}} = \int dt \frac{d}{dt} \left\{ p_\gamma \frac{\partial r^\gamma}{\partial \omega_{\alpha\beta}} \right\}.$$

Производная

$$\frac{\partial r^\gamma}{\partial \omega_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_{\alpha\beta}} \{\omega_{\lambda\gamma} - \omega_{\gamma\lambda}\} r_\lambda = \frac{1}{2} \{\delta_{\lambda\alpha} \delta_{\gamma\beta} - \delta_{\lambda\beta} \delta_{\gamma\alpha}\} r_\lambda,$$

где мы аккуратно проследили за тем, чтобы сохранялась антисимметрия по перестановке индексов $\alpha \leftrightarrow \beta$. Значит,

$$2 \frac{dS}{d\omega_{\alpha\beta}} = \int dt \frac{d}{dt} \{ r_\alpha p_\beta - r_\beta p_\alpha \}.$$

При наличии вращательной симметрии, когда производная действия по параметрам $\omega_{\alpha\beta}$ обращается в нуль, мы получаем тензорный вид закона сохранения орбитального момента:

$$\frac{d}{dt} \{ r_\alpha p_\beta - r_\beta p_\alpha \} = 0,$$

так что сохраняется тензор

$$l_{\alpha\beta} = r_\alpha p_\beta - r_\beta p_\alpha, \tag{4.5}$$

который связан с вектором орбитального момента

$$l_\gamma = \frac{1}{2} \epsilon_{\gamma\alpha\beta} l_{\alpha\beta} = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_\gamma.$$

Также, как и в случае рассмотрения тензора энергии-импульса для нерелятивистских частиц с плотностью массы $\rho_{(m)} = dm/dV$ введем 4-вектор плотности потока массы $\mathcal{J}_{(m)}^\nu$ и 4-скорость \mathcal{U}_μ . Тогда условие инвариантности относительно вращений примет вид

$$\partial_\nu \{ r_\alpha \mathcal{T}_\beta^\nu - r_\beta \mathcal{T}_\alpha^\nu \} = 0, \tag{4.6}$$

т.е. имеет место сохранение тензора орбитального момента

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta}^{\nu} = r_{\alpha}\mathcal{J}_{\beta}^{\nu} - r_{\beta}\mathcal{J}_{\alpha}^{\nu}. \quad (4.7)$$

Для замкнутой системы тензор момента импульса сохраняется: $\partial_{\nu}\mathcal{J}_{\mu}^{\nu} = 0$, так что можно расписать закон сохранения тензора орбитального момента следующим образом:

$$\mathcal{J}_{\beta}^{\nu}\partial_{\nu}r_{\alpha} - \mathcal{J}_{\alpha}^{\nu}\partial_{\nu}r_{\beta} = \mathcal{J}_{\beta}^{\nu}\delta_{\nu\alpha} - \mathcal{J}_{\alpha}^{\nu}\delta_{\nu\beta} = \mathcal{J}_{\beta}^{\alpha} - \mathcal{J}_{\alpha}^{\beta} = 0.$$

Таким образом, закон сохранения тензора орбитального момента следует из закона сохранения тензора энергии-импульса в том случае, если пространственная часть тензора энергии-импульса является симметричным тензором. Это условие симметричности выполняется для тензора нерелятивистских частиц.

25. Скалярное поле амплитуды вероятности траектории

В теории поля обычно рассматривают только релятивистские поля. Но есть одно исключение.

Действие нерелятивистской частицы является вещественным скаляром, который зависит от координат точки на конце траектории $S = S(t, \mathbf{r})$. Это действие экстремально на траектории классической частицы. На всех траекториях в их малых окрестностях действие определяет амплитуду вероятности траектории

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = e^{iS/\hbar},$$

и следовательно, амплитуда является скалярным полем. Уравнения Гамильтона–Якоби для действия

$$\nabla S = \mathbf{p}, \quad -\partial_t S = H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t),$$

для амплитуды вероятности Ψ запишутся в виде

$$-i\hbar\nabla\Psi = \mathbf{p}\Psi, \quad i\hbar\partial_t\Psi = H(\mathbf{r}, -i\hbar\nabla, t)\Psi. \quad (4.8)$$

Эти уравнения: определение оператора импульса и уравнение эволюции амплитуды вероятности со временем, — основные уравнения квантовой механики, а уравнение эволюции носит имя Шредингера, который сформулировал эти уравнения именно в таком виде. Задача эволюции для поля амплитуды отличается от задачи в классической механике и ставится в следующем виде:

- пусть в момент времени $t = t_0$ амплитуда задает распределение вероятности найти частицу возле точки \mathbf{r} : $dW(t_0, \mathbf{r})/d^3r = |\Psi(t_0, \mathbf{r})|^2$,
- решение уравнения эволюции определит амплитуду всех траекторий в момент времени $t = t'$, которые зададут распределение вероятности обнаружить частицу вблизи точки \mathbf{r}' : $dW(t', \mathbf{r}')/d^3r' = |\Psi(t', \mathbf{r}')|^2$.

Как видим, поле Ψ здесь представляет собой сумму амплитуд достоверности всех траекторий с заданной конечной точкой траектории, в то время как начальная точка может быть распределена в пространстве с некоторой плотностью вероятности.

В пределе бесконечно малой квантовой неопределенности, т.е. формально при $\hbar \rightarrow 0$, уравнения (4.8) дают классический предел: амплитуда вероятности в точности совпадает с экспонентой от фазы в виде действия классической частицы на экстремальной траектории. Но этот вопрос подробно рассматривается в курсах квантовой механики (см. [2]). Мы же сфокусируем своё внимание на теории скалярного нерелятивистского поля с массой m без внешних источников, т.е. при

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta.$$

Уравнение на поле

$$i\hbar\partial_t\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi,$$

может быть получено из вариационного принципа для действия самого поля $S[\Psi, \Psi^*]$, т.е. в виде уравнений Эйлера–Лагранжа

$$\partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \Phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}.$$

В самом деле, запишем действие

$$S[\Psi, \Psi^*] = \frac{1}{c} \int d^4x \Psi^* \left\{ i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right\} \Psi, \quad (4.9)$$

и тогда для поля Ψ^* найдем

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Psi^*} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^*} = i\hbar \partial_t \Psi + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi,$$

и мы приходим к заданному уравнению поля.

Действие (4.9) можно переписать так, чтобы в нем были только производные первого порядка, используя интегрирование по частям:

$$S[\Psi, \Psi^*] = \frac{1}{c} \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\Psi^* i\hbar \partial_t \Psi - i\hbar \Psi \partial_t \Psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \Psi^*) \cdot (\nabla \Psi) \right\}. \quad (4.10)$$

В такой записи при вариации по Ψ^* воспроизводится то же уравнение для поля Ψ , а уравнения Эйлера–Лагранжа для поля Ψ

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi},$$

дают уравнение для Ψ^* ,

$$i\hbar \partial_t \Psi^* - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi^* = 0,$$

которое можно, конечно, получить из уравнения движения для Ψ путем комплексного сопряжения.

25.1. Тензор энергии-импульса

Канонический тензор энергии-импульса поля получается из теоремы Нётер для поля:

$$\frac{dS}{da} = \frac{1}{c} \int d^4x \partial_\nu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \Phi} \left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial a} - \frac{\partial x^\lambda}{\partial a} \partial_\lambda \Phi \right) + \mathcal{L} \frac{\partial x^\nu}{\partial a} \right\}, \quad (1.19)$$

если считать, что имеются два поля $\Phi = (\Psi, \Psi^*)$, и произвести сдвиг в 4-мерном пространстве-времени:

$$x_a^\mu = x^\mu - a^\mu, \quad \frac{\partial x^\lambda}{\partial a^\mu} = -\delta_\mu^\lambda,$$

с учетом, что скалярное поле не меняется при сдвигах:

$$\Phi_a(x_a) = \Phi(x), \quad \frac{\partial \Phi_a}{\partial a^\mu} \equiv 0,$$

так что

$$\frac{dS}{da^\mu} = \frac{1}{c} \int d^4x \partial_\nu \left\{ \left(\sum_{\Phi=(\Psi, \Psi^*)} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \Phi} \partial_\mu \Phi \right) - \mathcal{L} \delta_\mu^\nu \right\} = \int d^4x \partial_\nu \mathcal{T}_\mu^\nu[\Psi, \Psi^*],$$

откуда тензор энергии-импульса комплексного скалярного нерелятивистского поля

$$\begin{aligned} c\mathcal{T}_\mu^\nu[\Psi, \Psi^*] = & \frac{1}{2} \delta_0^\nu i\hbar c (\Psi^* \partial_\mu \Psi - \Psi \partial_\mu \Psi^*) \\ & - \frac{\hbar^2}{2m} \delta_\alpha^\nu (\nabla_\alpha \Psi^*) (\partial_\mu \Psi) - \frac{\hbar^2}{2m} \delta_\alpha^\nu (\partial_\mu \Psi^*) (\nabla_\alpha \Psi) \\ & - \delta_\mu^\nu \left\{ \frac{1}{2} (\Psi^* i\hbar \partial_t \Psi - i\hbar \Psi \partial_t \Psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \Psi^*) \cdot (\nabla \Psi) \right\}. \end{aligned}$$

Плотность энергии поля —

$$\varepsilon = c\mathcal{T}_0^0 = \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \Psi^*) \cdot (\nabla \Psi),$$

плотность потока энергии поля —

$$S^\alpha = c^2 \mathcal{T}_0^\alpha = -\frac{\hbar^2}{2m} \{ (\nabla_\alpha \Psi^*) (\partial_t \Psi) + (\partial_t \Psi^*) (\nabla_\alpha \Psi) \},$$

плотность импульса поля —

$$P_\alpha = -\mathcal{T}_\alpha^0 = -\frac{i\hbar}{2} (\Psi^* \nabla_\alpha \Psi - \Psi \nabla_\alpha \Psi^*),$$

тензор напряжений

$$c\mathcal{T}_\alpha^\beta = -\frac{\hbar^2}{2m} \{(\nabla_\alpha \Psi^*)(\nabla_\beta \Psi) + (\nabla_\beta \Psi^*)(\nabla_\alpha \Psi)\} - \delta_\alpha^\beta \left\{ \frac{1}{2} (\Psi^* i\hbar \partial_t \Psi - i\hbar \Psi \partial_t \Psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \Psi^*) \cdot (\nabla \Psi) \right\}$$

являются симметричным, и следовательно, он приводит к автоматическому сохранению тензора орбитального момента. Кроме того, давление, например, по оси x

$$p_x = \frac{1}{2} (\Psi^* i\hbar \partial_t \Psi - i\hbar \Psi \partial_t \Psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \Psi^*) \cdot (\nabla \Psi) + \frac{\hbar^2}{m} (\nabla_x \Psi^*)(\nabla_x \Psi).$$

Если в качестве решения уравнения Шредингера взять плоскую волну

$$\Psi = \Psi_0 e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})/\hbar}, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad E = \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2,$$

и отнормировать ее в конечном объеме V

$$\int_V d^3r \Psi^* \Psi = N, \quad |\Psi_0|^2 = \frac{N}{V},$$

то компоненты тензора энергии-импульса примут значения

$$\varepsilon = \frac{mN}{V} \frac{1}{2} v^2, \quad \mathbf{S} = \frac{mN}{V} v^2 \mathbf{v}, \quad \mathbf{P} = \frac{mN}{V} \mathbf{v}, \quad \mathcal{T}_\alpha^\beta = -\frac{mN}{V} v^\beta v_\alpha,$$

откуда видно, что тензор энергии-импульса этого поля в точности совпадает с тензором энергии-импульса нерелятивистских частиц с плотностью массы

$$\rho_{(m)} = \frac{mN}{V}.$$

Значит, N — это число частиц в системе.

25.2. Глобальная калибровочная инвариантность

Вероятность траектории $W = |\Psi|^2$ не меняется, если произвести преобразование амплитуды в виде изменения ее комплексной фазы:

$$\Psi_u(t, \mathbf{r}) = e^{-i u \frac{e}{\hbar c}} \Psi(t, \mathbf{r}). \quad (4.11)$$

Это калибровочное преобразование называют глобальным, если параметр u не зависит ни от времени, ни от координат: $\partial_\mu u \equiv 0$, $\mu = \{0, 3\}$.

Действие (4.10) инвариантно относительно глобальных калибровочных преобразований, так что по теореме Нётер сохраняется ток

$$\frac{1}{c} j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Psi} \frac{\partial \Psi_u}{\partial u} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Psi^*} \frac{\partial \Psi_u^*}{\partial u}, \quad (4.12)$$

который имеет компоненты

$$j^0 = e c \Psi^* \Psi, \quad \mathbf{j} = -e \frac{i\hbar}{2m} \{ \Psi^* (\nabla \Psi) - \Psi (\nabla \Psi^*) \}. \quad (4.13)$$

Для нормированной в объеме V монохроматической волны

$$j^0 = e \frac{N}{V} c, \quad \mathbf{j} = e \frac{N}{V} \mathbf{v},$$

что в точности совпадает с электрическим 4-током, если ввести плотность заряда

$$\rho = e |\Psi|^2 = e \frac{N}{V}.$$

Закон сохранения $\frac{1}{e} \partial_\mu j^\mu = 0$ в виде

$$\partial_t |\Psi|^2 + \operatorname{div} \mathbf{j}_W = 0,$$

называют законом сохранения вероятности с потоком вероятности

$$\mathbf{j}_W = -\frac{i\hbar}{2m} \{\Psi^*(\nabla\Psi) - \Psi(\nabla\Psi^*)\},$$

поскольку $|\Psi|^2$ является плотностью вероятности найти частицу в объеме V , если $N = 1$. Заряд полевой конфигурации в общем случае

$$Q = \int d^3r j^0 = e \int d^3r |\Psi|^2.$$

25.3. Локальная калибровочная инвариантность и векторный бозон

Если фаза в калибровочном преобразовании (4.11) зависит от времени или координат, то это — локальное преобразование. Действие (4.10) не является калибровочно инвариантным относительно локальных преобразований, так как

$$\partial_\mu \Psi_u = e^{-iu} \frac{e}{\hbar c} \left(\partial_\mu - \frac{ie}{\hbar c} \partial_\mu u \right) \Psi.$$

Значит, частная производная поля становится, как говорят, ковариантной производной¹

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - \frac{ie}{\hbar c} \mathcal{A}_\mu, \quad (4.14)$$

где 4-векторное поле \mathcal{A}_μ называют калибровочным векторным полем или связностью [5], которая зависит от калибровочного параметра u и преобразуется по закону:

$$\mathcal{A}_\mu^u = \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu u. \quad (4.15)$$

При таком определении

$$\mathcal{D}_\mu^u \Psi_u = e^{-iu} \frac{e}{\hbar c} \mathcal{D}_\mu \Psi,$$

т.е. ковариантная производная преобразуется также, как и поле Ψ : путем введения множителя комплексной фазы. Отсюда следует, что действие поля, инвариантное относительно глобальных калибровочных преобразований, будет инвариантно и относительно локальных калибровочных преобразований, если в нем частные производные заменить на ковариантные:

$$S[\Psi, \Psi^*, \mathcal{A}_\mu] = \frac{1}{c} \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\Psi^* i\hbar \mathcal{D}_t \Psi - i\hbar \Psi (\mathcal{D}_t \Psi)^*) - \frac{\hbar^2}{2m} (\mathcal{D}\Psi)^* \cdot (\mathcal{D}\Psi) \right\}. \quad (4.16)$$

Это действие можно представить в виде действия свободного поля и действия взаимодействия

$$S[\Psi, \Psi^*, \mathcal{A}_\mu] = S[\Psi, \Psi^*] + S_{\text{int}},$$

где

$$S_{\text{int}} = -\frac{1}{c^2} \int d^4x j^\mu \mathcal{A}_\mu - \frac{e}{2mc^4} \int d^4x j^0 \mathcal{A}^2.$$

Первое слагаемое называют взаимодействием типа «ток-поле», а второе — квадратичный контактный член, который характерен для тензорных полей.

Связность \mathcal{A}_μ может быть чистой калибровкой, т.е. $\mathcal{A}_\mu = \partial_\mu u$. Тогда с помощью калибровочного преобразования ее можно сделать равной нулю во всех точках пространства-времени. Для определения того, является ли связность тривиальной или нет, необходимо построить тензор

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu,$$

который называют тензором напряженности векторного поля. Если тензор напряженности тождественно обращается в нуль, то связность тривиальна. Если же тензор напряженности не равен нулю, то имеет место взаимодействие заряженного скалярного поля с калибровочным векторным полем \mathcal{A}_μ . Это векторное поле может быть внешним, т.е. заданным условием задачи, или динамическим, т.е. само возникать и

¹Напомним, что для амплитуды вероятности траектории $\Psi = \exp\{iS/\hbar\}$ обобщенный импульс $p_\mu \Psi = -i\hbar \partial_\mu \Psi$, так что

$$-i\hbar \mathcal{D}_\mu \Psi = \left(p_\mu - \frac{e}{c} \mathcal{A}_\mu \right) \Psi,$$

а значит, $-i\hbar \mathcal{D}_\mu$ отвечает кинетическому импульсу mu_μ .

распространяться вследствие взаимодействия с заряженными источниками. Такая динамическая теория поля — электродинамика [11, 12, 13, 14].

Описанный способ введения взаимодействия с калибровочным полем путем замены частной производной на ковариантную называется минимальным. Неминимальное взаимодействие строится в виде дополнительных, калибровочно инвариантных слагаемых в действии. Например, неминимальным является взаимодействие в виде произведения тензора напряженности поля $F_{\mu\nu}$ с тензором спина вида $s_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\hat{\delta}^\gamma$, оно относится к аномальному магнитному моменту поля.

25.4. Дискретные симметрии P и T

Рассмотрим дискретные преобразования свободного поля.

Преобразование $t \mapsto t_T = -t$ совместно с преобразованием поля

$$\Psi(t, \mathbf{r}) \mapsto \Psi_T(t_T, \mathbf{r}) = \Psi^*(t, \mathbf{r}) \quad (4.17)$$

сохраняет неизменным действие и приводит к полю, которое удовлетворяет уравнениям движения, а также дает для компонент тензора энергии-импульса

$$\mathcal{T}_0^0 \mapsto \mathcal{T}_0^0, \quad \mathcal{T}_0^\alpha \mapsto -\mathcal{T}_0^\alpha, \quad \mathcal{T}_\alpha^0 \mapsto -\mathcal{T}_\alpha^0, \quad \mathcal{T}_\alpha^\beta \mapsto \mathcal{T}_\alpha^\beta, \quad (4.18)$$

т.е. приводит к движению с той же энергией, но в обратном направлении. При этом,

$$j^0 \mapsto j^0, \quad j^\alpha \mapsto -j^\alpha. \quad (4.19)$$

Это преобразование поля отвечает, таким образом, обращению стрелы времени: $t \mapsto -t$.

Преобразование $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}_P = -\mathbf{r}$ совместно с преобразованием поля

$$\Psi(t, \mathbf{r}) \mapsto \Psi_P(t, \mathbf{r}_P) = \Psi(t, \mathbf{r}) \quad (4.20)$$

сохраняет неизменным действие и приводит к полю, которое удовлетворяет уравнениям движения, а также дает для компонент тензора энергии-импульса

$$\mathcal{T}_0^0 \mapsto \mathcal{T}_0^0, \quad \mathcal{T}_0^\alpha \mapsto -\mathcal{T}_0^\alpha, \quad \mathcal{T}_\alpha^0 \mapsto -\mathcal{T}_\alpha^0, \quad \mathcal{T}_\alpha^\beta \mapsto \mathcal{T}_\alpha^\beta, \quad (4.21)$$

т.е. приводит к движению с той же энергией, но в обратном направлении. При этом,

$$j^0 \mapsto j^0, \quad j^\alpha \mapsto -j^\alpha. \quad (4.22)$$

Это преобразование поля отвечает, таким образом, зеркальной инверсии пространства: $\mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$.

Тема 5

Симметрии и законы сохранения в случаях вырождения движения

Лекция № 10

Сохраняющийся вектор от центра кулоновского потенциала до второго фокуса эллипса финитной орбиты, связь генераторов симметрии со скобками Пуассона физических величин, отвечающих собственным значениям этих генераторов на полях амплитуды вероятности траектории, пример скобок Пуассона для момента импульса, скобки Пуассона вектора Рунге–Ленца–Лапласа и $SO(4)$ симметрия финитных кулоновских орбит, эволюция изотропного гармонического осциллятора в терминах комплексных векторов в фазовом пространстве, группа $SU(3)$ как матричная группа инвариантности эволюции трехмерных фазовых векторов, матрицы Гелл-Манна, сохранение полуосей эллипса и тензор второго ранга, разложение тензора на синглет, вектор и квинтет по группе вращений, разложение тензора на синглет и октет по группе $SU(3)$, адиабатический инвариант периодического движения, инвариант для частицы в постоянном магнитном поле, поток магнитного поля в площади замкнутой орбиты, точность сохранения адиабатического инварианта при введении малых поправок, нарушающих периодичность.

К числу систем, обладающих, наряду с физической реалистичностью, дополнительными особыми свойствами, следует отнести движение частиц в потенциалах, для которых все финитные траектории замкнуты, а также периодическое или мало отличающееся от периодического движение.

26. Вектор Рунге–Ленца–Лапласа

Для кулоновского потенциала притяжения или в задаче Кеплера движение происходит по эллипсу, в одном из фокусов которого находится центр потенциала. Орбита замкнута, а значит, эллипс сохраняет свое положение со временем. Это свойство является нетривиальным, поскольку оно позволяет воспользоваться свойствами эллипса и построить дополнительный интеграл движения.

В самом деле, используем тот факт, что любой луч, посланный из фокуса эллипса, после зеркального отражения от кривой эллипса пройдет через второй фокус и сумма длин луча от фокуса до кривой эллипса r до отражения и от кривой до второго фокуса r' после отражения — это постоянная величина $r + r' = 2a$, где a — длина той полуоси эллипса, на линии которого расположены фокусы (см. §8.1.). Поскольку определяющая линия зеркального отражения касательная к эллипсу в точке траектории параллельна импульсу, разложим радиус-вектор частицы на ортогональную к импульсу часть \mathbf{r}_\perp и параллельный ему вклад \mathbf{r}_\parallel :

$$\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{p^2}, \quad \mathbf{r}_\parallel = \mathbf{r} - \mathbf{r}_\perp.$$

После зеркального отражения поперечная часть сменит знак, а продольный вклад не изменится, т.е. мы получим вектор той же длины r

$$\mathbf{r}'' = -\mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel = \mathbf{r} - 2\mathbf{r}_\perp.$$

Значит, согласно упомянутому выше свойству эллипса вектор

$$\mathbf{r}' = \frac{2a - r}{r} (\mathbf{r} - 2\mathbf{r}_\perp)$$

в точности соединяет точку на траектории со вторым фокусом эллипса, и следовательно, вектор

$$\mathbf{r} + \mathbf{r}' = \mathbf{r} \frac{2a}{r} + 2\mathbf{r}_\perp \left(1 - \frac{2a}{r}\right) \quad (5.1)$$

имеет длину $2a$ и соединяет фокусы эллипса. Безразмерный вектор

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2a} (\mathbf{r} + \mathbf{r}') = \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\mathbf{r}_\perp}{a} \left(1 - \frac{2a}{r}\right) \quad (5.2)$$

называют вектором Рунге–Ленца–Лапласа. Он сохраняется при движении в поле притяжения кулоновского типа.

Проведем преобразования, заметив, что

$$\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} = \mathbf{p} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2 \mathbf{r} - \mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{p}^2 \mathbf{r}_\perp.$$

Кроме того, в кулоновском поле притяжения с зарядом $Q = -|Z|e$

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{|Z|e^2}{r} \Rightarrow \mathbf{p}^2 = -2m|E| \left(1 - \frac{|Z|e^2}{|E|r}\right),$$

так как $E = -|E| < 0$, и полуось

$$a = \frac{|Z|e^2}{2|E|}.$$

Отсюда

$$\mathbf{r}_\perp = -\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} \frac{a}{|Z|e^2 m} \left(1 - \frac{2a}{r}\right)^{-1}.$$

В итоге, сохраняющийся вектор Рунге–Ленца–Лапласа принимает стандартный вид

$$\mathcal{B} = \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} \frac{1}{|Z|e^2 m}. \quad (5.3)$$

26.1. Скобки Пуассона и симметрия $SO(4)$

Как было сказано раньше, генераторы группы трансляций $\hat{\mathbf{k}} = -i\nabla$ и вращений $\hat{\mathbf{l}} = -i\mathbf{r} \times \nabla$, действующие на поля, связаны с импульсом и моментом импульса:

$$\hbar \hat{\mathbf{k}} = -i\hbar \nabla \mapsto \mathbf{p}, \quad \hbar \hat{\mathbf{l}} = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla \mapsto \boldsymbol{\ell},$$

с помощью постоянной Планка с чертой. В частности, действие этих операторов на амплитуду вероятности траектории с заданным импульсом или орбитальным моментом дают как раз значения этих величин:

$$-i\hbar \nabla \Psi_{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \Psi_{\mathbf{p}}, \quad -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla \Psi_{\mathbf{p}} = \boldsymbol{\ell} \Psi_{\mathbf{p}},$$

в силу уравнений Гамильтона–Якоби и связи амплитуды с действием

$$S = -\frac{1}{i\hbar} \ln \Psi.$$

Дирак обратил внимание на то, что скобки Пуассона физических величин F, G связаны с коммутаторами генераторов \hat{f}, \hat{g} простым соотношением

$$i\hbar \{F, G\}_{\text{P}} = [\hat{F}, \hat{G}], \quad \text{если } \hbar \hat{f} \mapsto F, \quad \hbar \hat{g} \mapsto G. \quad (5.4)$$

В самом деле, добавляя сюда еще и соответствие для координат $\hat{\mathbf{r}} \mapsto \mathbf{r}$, найдем, что

$$\{r^\alpha, p_\beta\}_{\text{P}} = \delta_\beta^\alpha, \quad [\hat{r}^\alpha, -i\nabla_\beta] \Psi = i\delta_\beta^\alpha \Psi, \quad \forall \Psi.$$

Для момента импульса скобки Пуассона

$$\begin{aligned} \{\ell_\alpha, \ell_\beta\}_{\text{P}} &= \{\epsilon_{\alpha\mu\nu} r_\mu p_\nu, \epsilon_{\beta\mu'\nu'} r_{\mu'} p_{\nu'}\}_{\text{P}} = \epsilon_{\alpha\mu\nu} \epsilon_{\beta\mu'\nu'} \{r_\mu p_\nu, r_{\mu'} p_{\nu'}\}_{\text{P}} \\ &= \epsilon_{\alpha\mu\nu} \epsilon_{\beta\mu'\nu'} r_{\mu'} \left\{ \frac{\partial r_\mu p_\nu}{\partial r_\gamma} \frac{\partial r_{\mu'} p_{\nu'}}{\partial p_\gamma} - \frac{\partial r_\mu p_\nu}{\partial p_\gamma} \frac{\partial r_{\mu'} p_{\nu'}}{\partial r_\gamma} \right\} \\ &= \epsilon_{\alpha\mu\nu} \epsilon_{\beta\mu'\nu'} \{ \delta_{\mu\gamma} p_\nu r_{\mu'} \delta_{\nu'\gamma} - r_\mu \delta_{\nu\gamma} \delta_{\mu'\gamma} p_{\nu'} \} \\ &= \epsilon_{\alpha\gamma\nu} \epsilon_{\beta\mu'\gamma} p_\nu r_{\mu'} - \epsilon_{\alpha\mu\gamma} \epsilon_{\beta\gamma\nu'} r_\mu \delta_{\nu\gamma} \delta_{\mu'\gamma} p_{\nu'} \\ &= -\delta_{\alpha\beta} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) + r_\alpha p_\beta + \delta_{\alpha\beta} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - r_\beta p_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\gamma\alpha'\beta'} r_{\alpha'} p_{\beta'} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma, \end{aligned} \quad (5.5)$$

что можно сравнить с коммутатором генераторов вращения на полях

$$[\hat{l}_\alpha, \hat{l}_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{l}_\gamma.$$

Другими словами, вычисляя скобки Пуассона физических величин, мы определяем коммутационные соотношения для генераторов симметрии, связанных с этими наблюдаемыми, на полях амплитуд вероятности траекторий, в то время как коммутаторы генераторов задают группу непрерывных симметрий в системе. С другой стороны, если рассматривать сохраняющиеся величины в качестве генераторов бесконечно малых канонических преобразований, то эти преобразования отвечают симметрии системы (см. раздел 6.4.).

Например, в центрально симметричном потенциале сохраняется момент количества движения ℓ , а скобки Пуассона компонент вектора ℓ отвечают коммутаторам группы вращений, т.е. группа генераторов является группой симметрии системы, если наблюдаемые, отвечающие этим генераторам, сохраняются.

Найдем скобки Пуассона для сохраняющихся векторов в кулоновском поле притяжения, т.е. для момента импульса и вектора Рунге–Ленца–Лапласа. Эти скобки будут определять алгебру генераторов группы симметрии этой системы. Вектор Рунге–Ленца–Лапласа перепишем в виде, симметризованном относительно перестановок местами физических величин, скобки Пуассона которых не равны нулю:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{1}{2} (\mathbf{p} \times \ell - \ell \times \mathbf{p}) \frac{1}{|Z|e^2 m}, \quad (5.6)$$

поскольку

$$\{p_\alpha, \ell_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} p_\gamma.$$

Тогда

$$\{\mathbf{B}_\alpha, \ell_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{B}_\gamma, \quad (5.7)$$

так как \mathbf{B} — вектор, и при вращениях он имеет стандартный коммутатор с генераторами поворотов.

Прямые вычисления устанавливают, что

$$\{\mathbf{B}_\alpha, \mathbf{B}_\beta\}_P = -2\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma \frac{E}{|Z|^2 e^4 m}, \quad (5.8)$$

где

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{|Z|e^2}{r} = \text{const.}$$

в силу закона сохранения энергии. Значит, если ввести векторы

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} \sqrt{m a |Z| e^2}, \quad (5.9)$$

то их скобки Пуассона

$$\{u_\alpha, u_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma, \quad \{u_\alpha, \ell_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} u_\gamma. \quad (5.10)$$

Введем вектора

$$\mathbf{j}^{(\pm)} = \frac{1}{2} (\ell \pm \mathbf{u}),$$

для которых имеют место скобки Пуассона

$$\{j_\alpha^{(+)}, j_\beta^{(+)}\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} j_\gamma^{(+)}, \quad \{j_\alpha^{(-)}, j_\beta^{(-)}\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} j_\gamma^{(-)}, \quad \{j_\alpha^{(+)}, j_\beta^{(-)}\}_P = 0. \quad (5.11)$$

Это означает, что соответствующие им генераторы реализуют алгебру симметрии $so(3) \oplus so(3)$.

Покажем, что алгебра генераторов отвечает алгебре группы вращений 4-мерного евклидова пространства $SO(4)$. Для это обратимся к алгебре вращений в 3-мерном евклидовом пространстве, которую сформулируем в терминах тензора вращений (см. (4.5) и раздел 24.)

$$l_{\alpha\beta} = r_\alpha p_\beta - r_\beta p_\alpha, \quad l_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma, \quad \{\alpha, \beta, \gamma\} \in \overline{\{1, 3\}}. \quad (4.5)$$

Скобка Пуассона генераторов $l_{\alpha\beta}$ легко вычисляется

$$\{l_{\alpha\beta}, l_{\alpha'\beta'}\}_P = g_{\alpha\alpha'} l_{\beta\beta'} + g_{\beta\beta'} l_{\alpha\alpha'} - g_{\alpha\beta'} l_{\beta\alpha'} - g_{\beta\alpha'} l_{\alpha\beta}, \quad (5.12)$$

где $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ — метрика евклидова пространства в декартовых координатах. Скобки Пуассона в виде (5.12), конечно, абсолютно эквивалентны стандартным скобкам Пуассона орбитального момента ℓ [см. (5.5)]. Теперь легко записать обобщение на случай 4-мерного евклидова пространства:

$$l_{\mu\nu} = r_\mu p_\nu - r_\nu p_\mu, \quad \{\mu, \nu\} \in \overline{\{1, 4\}}, \quad (5.13)$$

с такими же скобками Пуассона:

$$\{l_{\mu\nu}, l_{\mu'\nu'}\}_P = g_{\mu\mu'} l_{\nu\nu'} + g_{\nu\nu'} l_{\mu\mu'} - g_{\mu\nu'} l_{\nu\mu'} - g_{\nu\mu'} l_{\mu\nu}. \quad (5.14)$$

Если ввести в трехмерном подпространстве те же величины $l_{\alpha\beta}$ и l_γ , и в дополнение к ним трехмерный вектор $u_\alpha = l_{\alpha 4}$, то из (5.14) нетрудно получить скобки Пуассона в виде

$$\{u_\alpha, u_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} l_\gamma, \quad \{l_\alpha, u_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} u_\gamma, \quad \{l_\alpha, l_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} l_\gamma, \quad (5.15)$$

а значит, построенная алгебра генераторов симметрии в задаче о спектре финитных траекторий в кулоновском поле притяжения — это алгебра группы $SO(4)$, группы вращений в шести плоскостях 4-мерного евклидова пространства.

При этом, траектории движения реализуют не все представления этой группы, а только те из них, что отвечают $(\mathbf{j}^{(+)})^2 = (\mathbf{j}^{(-)})^2$, поскольку движение — плоское, а значит, $\mathbf{l} \cdot \mathbf{u} = 0$ и $(\mathbf{l} \pm \mathbf{u})^2 = \mathbf{l}^2 + \mathbf{u}^2$.

Итак, вырождение финитного движения в кулоновском потенциале в виде замкнутости орбиты отвечает группе симметрии $SO(4)$.

27. Тензор Фрадкина

27.1. Группа $SU(3)$

При рассмотрении изотропного гармонического осциллятора с собственной частотой ω удобно ввести комплексные векторы

$$\mathbf{A} = m\omega \mathbf{r} + i\mathbf{p}. \quad (5.16)$$

Уравнения движения для этих векторов с учетом силы $\mathbf{F} = -\nabla(m\omega^2 \mathbf{r}^2/2)$ принимают вид

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = m\omega \frac{\mathbf{p}}{m} - im\omega^2 \mathbf{r} = -i\omega \mathbf{A},$$

и легко интегрируются

$$\mathbf{A}(t) = e^{-i\omega t} \mathbf{A}_0. \quad (5.17)$$

При этом гамильтониан записывается в виде

$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{A}, \quad (5.18)$$

откуда сразу видно, что он инвариантен относительно матричной группы преобразований трехмерных комплексных векторов-столбцов, которые сохраняют длину вектора:

$$\mathbf{A}' = U \cdot \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A}')^\dagger \cdot \mathbf{A}' = \mathbf{A}^\dagger U^\dagger \cdot U \mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{A}, \quad (5.19)$$

откуда

$$U^\dagger \cdot U = \mathbb{1}. \quad (5.20)$$

Такие матрицы называются унитарными. Взяв детерминант (5.20), найдем, что

$$(\det U)^* \det U = 1.$$

Среди группы преобразований можно выделить элементарный сдвиг фазы всех компонент вектора \mathbf{A} , что, согласно (5.17), отвечает просто смене начала отсчета времени, а значит, соответствует сдвигу по времени и закону сохранения энергии. Поэтому, если нас интересует дополнительная симметрия, мы можем исключить изменение этой общей фазы в матрице U , потребовав

$$\det U = 1. \quad (5.21)$$

Итак, мы имеем симметрию унитарных преобразований трехмерных комплексных векторов со специальным условием единичного детерминанта матрицы, что обозначают символом группы $SU(3)$.

Элементы группы $SU(2)$ при действии в пространстве двумерных спиноров записываются в виде

$$g = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi} \right\},$$

где σ — матрицы Паули, которые являются эрмитовыми и бесследовыми, а ϕ — вещественные параметры группы, углы поворота. Эрмитовость матриц Паули следует из требования унитарности $g^\dagger \cdot g = \mathbb{1}$. Бесследовость матриц Паули является следствием специального условия

$$\det g = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \operatorname{tr} \sigma \cdot \phi \right\} = 1.$$

Число параметров группы $SU(3)$, u^a , в полной аналогии определяется числом эрмитовых, бесследовых матриц 3×3 , которое равно 8. Базис таких матриц принято, например, выбирать в виде матриц Гелл-Манна λ^a , $a = \{\overline{1, 8}\}$, так что

$$U = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{u} \right\},$$

причем

$$\operatorname{tr} \lambda^a \lambda^b = 2\delta^{ab}, \quad (5.22)$$

также как у матриц Паули.

В явном виде матрицы Гелл-Манна включают в себя прямые аналоги недиагональных матриц σ_1 и σ_2 по парам индексов 3-мерного вектора A^α :

по индексам 1 и 2

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

по индексам 1 и 3

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

по индексам 2 и 3

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

а также диагональные матрицы:

аналог σ_3 в индексах 1 и 2

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

вместо аналога σ_3 в индексах 2 и 3 необходимо ввести диагональную эрмитову матрицу с нулевым следом, которая удовлетворяет условию ортонормированности (5.22), так что единственным решением такой задачи является диагональная матрица

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Как и следовало ожидать, лишь две матрицы являются диагональными, т.е. имеют совместный базис собственных векторов, так что ранг группы $SU(3)$ равен двум, а значит, старший вектор всякого неприводимого представления характеризуется двумя независимыми числами, которые, стало быть, определяют и два независимых оператора Казимира: однородных полинома по генераторам, эти полиномы коммутируют со всеми генераторами группы. Спектр этих чисел является конечным и дискретным для каждого конечного представления группы, но мы здесь не будем изучать представления этой группы. Отметим лишь, что по аналогии с матрицами спина из недиагональных матриц Гелл-Манна можно построить три повышающих и три эрмитово сопряженных к повышающим понижающих матрицы.

Коммутационные соотношения для генераторов группы $SU(3)$ можно получить, вычислив структурные константы в выражениях

$$\left[\frac{1}{2} \lambda^a, \frac{1}{2} \lambda^b \right] = i f^{abc} \frac{1}{2} \lambda^c. \quad (5.23)$$

Константы f^{abc} приводятся в справочниках.

Итак, преобразование симметрии изотропного гармонического осциллятора в терминах векторов \mathbf{A} :

$$A'^\alpha = U_\beta^\alpha A^\alpha, \quad U \in SU(3).$$

27.2. Дополнительные интегралы движения

Все финитные траектории изотропного гармонического осциллятора замкнуты. Траектория движения — эллипс, но в отличие от кулоновского случая, центр притяжения находится не в фокусе, а в центре эллипса. Это значит, что с помощью радиус-вектора и импульса невозможно построить характерный для эллипса вектор, например, соединяющий фокус с фокусом, так как положение обоих фокусов от центра зеркально симметрично. Этот эллипс можно описать направлениями и длинами его полуосей. Однако, опять же, направления по отношению к центру притяжения можно менять на противоположные, от этого эллипс не изменится. Итак у нас есть пара характерных векторов полуосей на плоскости, ортогональной моменту импульса, но направления этих векторов можно менять на противоположные по отношению к центру. Такая ситуация с возможностью смены направления векторов имеет место, если эти векторы собственные для некоторой матрицы. Поскольку эти собственные векторы должны сохраняться при движении, должна сохраняться и сама матрица. Значит, необходимо построить не сохраняющийся вектор, а сохраняющийся тензор второго ранга.

Это можно легко сделать в терминах векторов \mathbf{A} :

$$F_{\alpha\beta} = A_{\alpha}^* A_{\beta}$$

является сохраняющимся тензором. След тензора

$$\text{tr } F = F_{\alpha\alpha} = 2mE.$$

Распишем $F_{\alpha\beta}$, выделив антисимметричный вклад

$$a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}\{F_{\alpha\beta} - F_{\beta\alpha}\} = im\omega\{r_{\alpha}p_{\beta} - r_{\beta}p_{\alpha}\} = im\omega\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\ell_{\gamma},$$

и симметричный бесследовый вклад — тензор Фрадкина:

$$s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}\{F_{\alpha\beta} + F_{\beta\alpha}\} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}2mE = p_{\alpha}p_{\beta} + m^2\omega^2 r_{\alpha}r_{\beta} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}2mE,$$

так что

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}2mE + a_{\alpha\beta} + s_{\alpha\beta},$$

и мы получили разложение тензора по неприводимым представлениям группы вращений $SO(3)$:

$$SO(3) : \quad 3 \otimes 3 = 1 \oplus 3 \oplus 5,$$

где указаны размерности базиса собственных векторов для каждого неприводимого представления. В этом разложении на неприводимые тензоры синглет отвечает сохраняющейся энергии, триплет — сохраняющемуся вектору момента импульса. Для того чтобы прояснить физический смысл квинтета, найдем собственные значения и собственные векторы симметричного тензора Фрадкина

$$S_{\alpha\beta} = p_{\alpha}p_{\beta} + m^2\omega^2 r_{\alpha}r_{\beta}.$$

Заметим сначала, что поскольку движение плоское

$$S_{\alpha\beta}\ell_{\beta} = 0,$$

т.е. тензор является поперечным. Выберем направление момента импульса в качестве оси z : $\ell \parallel z$. Тогда тензор Фрадкина вырождается в тензор на плоскости (x, y) : все его компоненты с индексом z обращаются в нуль,

$$S_{\alpha\beta} \mapsto \Sigma = \begin{pmatrix} p_x p_x + m^2 \omega^2 x^2 & p_y p_x + m^2 \omega^2 xy \\ p_y p_x + m^2 \omega^2 xy & p_y p_y + m^2 \omega^2 y^2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\det(\Sigma - \lambda) = \lambda^2 - \lambda(\mathbf{p}^2 + m^2\omega^2 \mathbf{r}^2) + m^2\omega^2(xp_y - yp_x)^2 = \lambda^2 - 2mE\lambda + m^2\omega^2 \ell^2 = 0,$$

собственные значения этой матрицы

$$\lambda_{\pm} = mE \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\omega^2 \ell^2}{E^2}} \right) \Rightarrow \lambda_+ = \frac{\ell^2}{a^2}, \quad \lambda_- = \frac{\ell^2}{b^2},$$

где a и b — полуоси эллипса по направлениям x и y , соответственно. Тогда собственные векторы можно найти, используя сохранение матрицы Σ по времени. А именно, если выбрать момент времени, когда $y = 0$, $p_x = 0$, $p_y = p$, $x = a$, $\ell = ap$, то

$$\Sigma = \begin{pmatrix} m^2\omega^2 a^2 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Sigma - \lambda_+ = \begin{pmatrix} m^2\omega^2 a^2 - \frac{\ell^2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{\ell^2}{a^2} - \frac{\ell^2}{a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2\omega^2 a^2 - \frac{\ell^2}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а также в силу $\ell = abm\omega$

$$\Sigma - \lambda_- = \begin{pmatrix} m^2\omega^2 a^2 - \frac{\ell^2}{b^2} & 0 \\ 0 & \frac{\ell^2}{a^2} - \frac{\ell^2}{b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ell^2}{a^2} - \frac{\ell^2}{b^2} \end{pmatrix},$$

откуда

$$\mathbf{e}_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В итоге, собственные векторы тензора Фрадкина направлены по полуосям траектории вращения — эллипса, а их собственные значения задают обратные квадраты длин полуосей.

Теперь рассмотрим тензор F в отношении неприводимых представлений группы $SU(3)$. Вектор A_α реализует 3-мерное неприводимое представление, но, в отличие от группы $SO(3)$ или $SU(2)$, для которых комплексно сопряженные представления эквивалентны: $(2s+1)^* \cong (2s+1)$, — в группе $SU(3)$ комплексно сопряженные представления не всегда эквивалентны исходному, например, $3^* = \bar{3} \not\cong 3$, т.е. вектор A_β^* реализует независимое представление. При этом разложение по неприводимым представлениям выглядит следующим образом:

$$SU(3): \quad \bar{3} \otimes 3 = 1 \oplus 8,$$

т.е. тензор F раскладывается на синглет и октет относительно преобразований группы $SU(3)$. Очевидно, что синглет, т.е. инвариант, пропорционален единичной матрице и это — след тензора, т.е. фактически энергия. Что же касается октета, то его можно представить в виде 8-мерного вектора в пространстве параметров группы:

$$F^a = \frac{1}{4m\omega} \lambda_{\alpha\beta}^a F_{\alpha\beta}. \quad (5.24)$$

Поскольку матрицы Гелл-Манна бесследовые, след тензора F не дает вклада в вектор F^a . Введенный вектор имеет размерность момента импульса, т.е. действия.

Вычисление скобок Пуассона дает

$$\{F^a, F^b\}_P = f^{abc} F^c, \quad (5.25)$$

а значит, сохраняющиеся генераторы, соответствующие F^a , действительно реализуют октетное представление генераторов группы $SU(3)$.

Не все представления группы $SU(3)$ реализуются траекториями движения, поскольку траектория является плоской: $\ell_{\alpha s \alpha\beta} \equiv 0$. Это условие отвечает, как можно показать в теории представлений группы $SU(3)$, старшему вектору, одно из квантовых чисел которого в терминах собственных значений двух диагональных генераторов равно нулю.

Итак, вырождение финитного движения изотропного гармонического осциллятора в виде замкнутости орбиты отвечает группе симметрии $SU(3)$.

28. Квазипериодическое движение в магнитном поле

В однородном магнитном поле движение частицы является периодическим в поперечной плоскости к магнитному полю, так как магнитное поле не совершает работы, а уравнения движения

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathcal{H}$$

имеют решение в виде $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel$, где сохраняющаяся продольная компонента скорости $\mathbf{v}_\parallel = \mathbf{h}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{h})$ направлена вдоль единичного вектора $\mathbf{h} = \mathcal{H}/\mathcal{H}$, а поперечная компонента $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel$ получается прямым интегрированием уравнения движения

$$\mathbf{v}_\perp = \omega \mathbf{r}_\perp \times \mathbf{h}, \quad \omega = \frac{e\mathcal{H}}{mc}. \quad (5.26)$$

Легко связать радиус орбиты с поперечным импульсом, поскольку период движения

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r_{\perp}}{v_{\perp}},$$

так что

$$p_{\perp} = mv_{\perp} = \frac{e}{c} \mathcal{H} r_{\perp}. \quad (5.27)$$

В слабонеоднородном поле, например, радиус обращения r_{\perp} много меньше характерного расстояния, на котором поле меняется существенно, т.е. на величину, порядка самого поля. Поэтому возникает малый параметр отношения радиуса r_{\perp} к длине неоднородности, и траектория может быть рассмотрена сначала в ведущем приближении как периодическая с последующим учетом поправок первого порядка малости. Следовательно, было бы актуально рассмотреть характерные свойства как периодического движения, так и поправок к нему.

28.1. Периодическое движение

Рассмотрим периодическое движение механической системы. Пусть T — период движения, тогда периодичность динамической переменной $q(t)$ и сопряженного к ней импульса p означает, что

$$q(t + T) = q(t), \quad p(t + T) = p(t). \quad (5.28)$$

Определим новую переменную, зависящую от параметра a :

$$q_a(t, a) = q(t + aT).$$

Тогда вариация действия

$$\Delta S = \int_0^1 da \frac{dS}{da} = S(1) - S(0),$$

но в силу периодичности движения (5.28)

$$q_a(t, 0) = q_a(t, 1) = q(t),$$

так что действие при $a = 1$ и $a = 0$ вычисляется на одной и той же траектории, и

$$\Delta S \equiv 0.$$

В классической механике согласно теореме Нётер производная действия по параметру имеет вид

$$\frac{dS}{da} = \int dt \frac{d}{dt} \left(p \frac{\partial q}{\partial a} - H \frac{\partial t}{\partial a} \right),$$

но, поскольку в данном случае время не преобразуется

$$\frac{\partial t_a}{\partial a} = 0,$$

вариация равна

$$\Delta S = \int_0^1 da \frac{dS}{da} = \int_0^1 da \int dt \frac{d}{dt} p \frac{\partial q}{\partial a} = \int dt \frac{d}{dt} \int_0^1 p \frac{\partial q}{\partial a} da,$$

в то время как интеграл

$$\mathcal{I} = \int_0^1 p \frac{\partial q}{\partial a} da = \int_0^T p \frac{dq}{d\tau} d\tau, \quad \tau = aT,$$

является интегралом по периоду

$$\mathcal{I} = \oint p dq,$$

а нулевое значение изменения действия

$$\Delta S = \int dt \frac{d}{dt} \mathcal{I} = 0$$

означает, что

$$\mathcal{I} = \oint p \, dq \text{ — инвариант.}$$

Этот инвариант называется *адиабатическим*, так как его сохранение связано с неизменностью фазового объема частицы, определяющего энтропию системы, и коль скоро она сохраняется, то и вариация параметров движения является адиабатической.

В самом деле, рассмотрим случай одномерного движения¹ и введем для переменных фазового объема более привычные обозначения (только в этом разделе!):

$$(p, q) \equiv (x, y),$$

и линейный элемент однопараметрической траектории

$$d\mathcal{C} = (dx, dy).$$

Тогда для вектора F с компонентами

$$F = (F_x, F_y)$$

имеет место теорема Стокса:

$$\oint F \, d\mathcal{C} = \int dx \, dy \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right), \quad (5.29)$$

где интеграл берется по поверхности, ограниченной замкнутой кривой. В нашем случае, очевидно,

$$F = (F_x, F_y) = (0, p), \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial p} = 1,$$

и

$$\mathcal{I} = \int dp \, dq,$$

т.е., действительно, инвариант — фазовый объем системы, а его логарифм задает энтропию, и сохранение этого инварианта означает “адиабатичность” процесса.

Вычислим адиабатический инвариант периодического движения частицы в постоянном магнитном поле:

$$\mathcal{I} = \oint \mathcal{P} \, dr,$$

где \mathcal{P} — сопряженный к координате импульс, т.е. обобщенный импульс заряженной частицы в поле \mathcal{A} :

$$\mathcal{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathcal{A},$$

где $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$ — импульс частицы. Подставляя

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}_\perp dt = \frac{1}{m} \mathbf{p}_\perp dt,$$

во-первых, для кинетического вклада с сохраняющимся поперечным импульсом найдем

$$\mathcal{I}_1 = \oint \mathbf{p} \, d\mathbf{r} = p_\perp^2 \frac{T}{m},$$

где период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi mc}{e\mathcal{H}},$$

так что

$$\mathcal{I}_1 = 2\pi \frac{cp_\perp^2}{e\mathcal{H}}.$$

Во-вторых, вклад поля

$$\mathcal{I}_2 = \frac{e}{c} \oint \mathcal{A} \, d\mathbf{r} = \frac{e}{c} \int \text{rot} \mathcal{A} \, ds,$$

¹Если динамических переменных больше, то решение проблемы формулируется совершенно тем же способом, с той лишь разницей, что можно провести суммирование по всем динамическим переменным и сопряженным к ним импульсам, чтобы получить сумму инвариантов, которая обычно имеет определенный физический смысл. Общий же фазовый объем вычисляется как произведение фазовых объемов, соответствующих каждой динамической переменной.

где элемент площади задается площадью треугольника, заметаемого частицей при движении по окружности:

$$d\mathbf{s} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_\perp \times \mathbf{v}_\perp dt = -\frac{1}{2} \hbar r_\perp v_\perp dt,$$

и с учетом

$$\text{rot} \mathbf{A} = \mathcal{H},$$

найдем вклад, обусловленный полем, а именно, *поток магнитного поля через поверхность, ограниченную орбитой частицы,*

$$\mathcal{I}_2 = -\frac{e}{2c} \mathcal{H} r_\perp v_\perp T,$$

и подставляя

$$r_\perp = \frac{cp_\perp}{e\mathcal{H}},$$

получаем

$$\mathcal{I}_2 = -\frac{e}{2c} \mathcal{H} \frac{cp_\perp}{e\mathcal{H}} \frac{p_\perp}{m} \frac{2\pi mc}{e\mathcal{H}} = -\pi \frac{cp_\perp^2}{e\mathcal{H}} = -\frac{1}{2} \mathcal{I}_1.$$

Суммируя,

$$\mathcal{I} = \pi \frac{cp_\perp^2}{e\mathcal{H}}.$$

Таким образом, адиабатический инвариант периодического движения частицы в плоскости, перпендикулярной постоянному магнитному полю, определяется комбинацией p_\perp^2/\mathcal{H} .

Заметим, что адиабатический инвариант равен взятому с обратным знаком потоку магнитного поля через площадь внутри описываемой зарядом окружности

$$\mathcal{I} = -\frac{e}{c} \int \mathcal{H} ds,$$

так что усиление поля и, следовательно, потока через единичную площадь приводит, в силу сохранения инварианта, к уменьшению площади круга, т.е. к уменьшению радиуса орбиты.

28.2. Теорема Адемолло–Гатто

Рассмотрим вопрос о том, что происходит с адиабатическим инвариантом периодического движения, если эта периодичность слабо нарушается малым возмущением параметров системы. Значение термина «слабо» физически определяется приближением, в котором параметр за время периода движения можно считать постоянным, но он все же существенно изменяется за интервал времени, много больший периода.

Ответом на поставленный вопрос служит теорема Адемолло–Гатто, которая применима не только к адиабатическому инварианту периодического движения, но и, вообще, к инвариантам, построенным при вариации действия по параметру исходной симметрии системы, так что проведенное ниже рассмотрение можно дословно повторить и для упомянутых инвариантов, заменяя термин «периодический» на «инвариантный».

Теорема Адемолло–Гатто. Если к исходному действию S_0 , приводящему к периодическому движению и, следовательно, к адиабатическому инварианту \mathcal{I} , добавлено возмущение с малым параметром λ , так что полное действие

$$S = S_0 + \lambda \int V(q, \dot{q}) dt,$$

то инвариант, по-прежнему, сохраняется с точностью до членов второго порядка малости по λ :

$$\frac{d\mathcal{I}}{dt} = \mathcal{O}(\lambda^2).$$

Ход мысли. В самом деле, разложим решение уравнения с возмущением λV по малому параметру λ с точностью до членов второго порядка малости:

$$q(t, \lambda) \approx q_0(t) + \lambda \delta \bar{q}_0(t) + \mathcal{O}(\lambda^2),$$

где

$$q_0(t) = q(t, 0), \quad \delta \bar{q}_0(t) = \left. \frac{\partial q(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0},$$

и главный вклад $q_0(t)$ берется при $\lambda = 0$, т.е. он *является периодическим*, в отличие от $\delta\bar{q}_0(t)$, который уже может нарушать периодичность. Аналогично можно поступить и с возмущением

$$\lambda V = \lambda V_0 + \mathcal{O}(\lambda^2),$$

так что V_0 зависит только от главного вклада $q_0(t)$, т.е. является *периодической* функцией. Вводя, как и в предыдущем разделе, параметр a на периодической траектории q_0 найдем, что с точностью до членов второго порядка малости действие

$$S = S_0 \Big|_{\lambda=0} + \int \frac{\delta S_0}{\delta q} \Big|_{\lambda=0} \lambda \delta\bar{q}_0 dt + \lambda \int V_0 dt + \mathcal{O}(\lambda^2).$$

Первое слагаемое в точности совпадает с выражением для действия без возмущения, и оно зависит только от *периодических функций*. Второе слагаемое равно нулю в силу уравнений движения при $\lambda = 0$ (вариационный принцип):

$$\frac{\delta S_0}{\delta q} \Big|_{\lambda=0} = 0.$$

Третье слагаемое — также *периодическая функция* по a с периодом 1. Поэтому с точностью до членов второго порядка малости по λ

$$\int_0^1 da \frac{dS}{da} = \mathcal{O}(\lambda^2).$$

Повторяя вывод для адиабатического инварианта, теперь заключаем, что он сохраняется с точностью до членов второго порядка малости возмущения.

Из приведенного рассуждения ясно, что при введении возмущения, вообще говоря, и динамическая переменная и сопряженный ей импульс становятся функциями, зависящими от параметра возмущения λ , но построенный из них инвариант — фазовый объем — остается сохраняющейся величиной с точностью до членов второго порядка малости.

В качестве примера, в слабонеоднородном магнитном поле при движении частицы вдоль силовой линии, если эти линии сгущаются и, стало быть, поле увеличивается, сохранение инварианта p_{\perp}^2/\mathcal{H} означает, что увеличивается поперечный к полю импульс, а радиус орбиты уменьшается, так как сохраняется поток магнитного поля через площадь круга орбиты. При этом импульс частицы в постоянном по времени магнитном поле сохраняется и, следовательно, наступает момент, когда продольная по полю компонента импульса становится равной нулю: частица не проникает в область сильного поля. Более того, в курсах электродинамики показывается, что частица отражается от области сильного магнитного поля, т.е. меняет направление продольной компоненты импульса в этой точке отражения. Этот эффект называется «манитным зеркалом». Наряду с этим, в слабонеоднородном поле частица испытывает дрейф в направлении, ортогональном как к силовой линии, так и к нормали, направленной к центру кривизны силовой линии.

Тема 6

Рассеяние электромагнитных волн

Лекция № 11

Определение дифференциального сечения рассеяния электромагнитных волн, метод преобразования Фурье для решения дифференциальных уравнений, дельта-функция Дирака и обратное преобразование Фурье, рассеяние фотонов на заряженном гармоническом осцилляторе с затуханием, спектр и интенсивность вынужденных колебаний, линейная поляризация, тензор поляризации естественного света, усреднение единичного вектора на окружности, угловое распределение рассеянных электромагнитных волн, сечение Томсона, классический радиус электрона, рэлеевское рассеяние.

Плоская волна электромагнитных колебаний, падая на покоящийся заряд, вызывает его вынужденные колебания, в результате чего он начинает излучать (см. рис. 6.1).

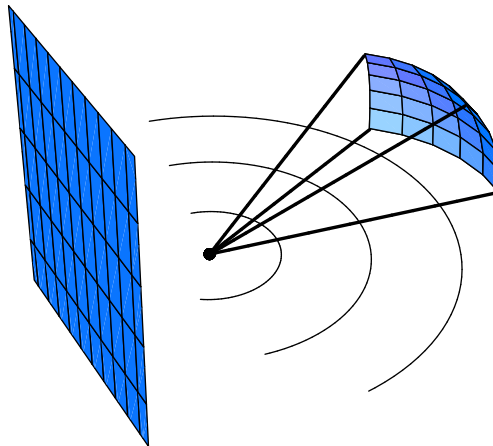


Рис. 6.1: Монохроматическая волна, падающая на мишень, и рассеянная волна из-за вынужденных колебаний зарядов мишени.

Тогда *дифференциальное сечение рассеяния* определяется как отношение интенсивности излучения волн вынужденных колебаний, проходящих площадь с заданным телесным углом, к потоку энергии, падающей на заряд в среднем за период колебаний:

$$d\sigma \equiv \frac{1}{\langle S_0 \rangle} d\mathcal{J}, \quad (6.1)$$

где мы ввели поток энергии падающей волны, вектор Умова–Пойнтинга,

$$\langle S_0 \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 \rangle.$$

Размерность дифференциального сечения легко определить, если принять во внимание, что интенсивность — это энергия в единицу времени, а падающий поток — это энергия в единицу времени на единичную площадь:

$$[\sigma] = \frac{[E]}{[t]} \bigg/ \frac{[E]}{[t][r]^2} = [r]^2,$$

т.е. сечение рассеяния имеет размерность площади.

29. Квазиупругий диполь

Рассмотрим уравнение движения свободного покоящегося заряда под воздействием поля электромагнитной волны

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathcal{E}_0 + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathcal{H}_0,$$

которое при $\mathbf{v} \ll c$ сводится к

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathcal{E}_0,$$

так что несмотря на то, что электрическое и магнитное поля в волне одинаковы по модулю, можно пренебречь вкладом магнитного поля и проводить нерелятивистское рассмотрение.

Если заряд закрепить с помощью сил упругости, то в свободном виде он будет совершать колебания с собственной частотой ω_0 :

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = 0.$$

В самом деле, величина

$$\mathbf{F}_{\text{elastic}} = -m\omega_0^2 \mathbf{r}$$

есть не что иное как сила упругости, пропорциональная смещению.

Если есть диссипация, т.е. сила трения¹, то скорость частицы будет экспоненциально затухать:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}} = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 e^{-\gamma t},$$

где коэффициент затухания $\gamma > 0$ имеет размерность обратного времени, т.е. частоты.

В итоге, уравнение движения с учетом силы упругости, силы трения и внешней силы электрического поля примет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathcal{E}_0,$$

что представляет собой уравнение для квазиупругого диполя, если поместить неподвижный заряд $-e$ в начало координат².

Неоднородное дифференциальное уравнение движения с источником просто решается, если использовать метод преобразования Фурье.

29.1. Метод преобразования Фурье

Определим Фурье-образ функции $F(t)$

$$\mathcal{F}(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} dt F(t) e^{i\omega t - \alpha^2 t^2}. \quad (6.2)$$

Для сходимости интеграла функция $F(T)$ не должна расти быстрее, чем

$$e^{+\alpha^2 t^2} \Big|_{\alpha \rightarrow +0} \rightarrow \text{const.}$$

Вычислим Фурье-образ единицы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t - \alpha^2 t^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-\alpha^2 (t - \frac{1}{2}i\omega/\alpha^2)^2 - \frac{1}{4}\omega^2/\alpha^2}.$$

Здесь гауссов интеграл по переменной $z = t - \frac{1}{2}i\omega/\alpha^2$ может быть вычислен, если сместить контур интегрирования на вещественную ось, что можно сделать, поскольку на пути смещения пути интегрирования нет особенностей и бесконечных вкладов, так что интегралы совпадут, а значит,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-\alpha^2 z^2} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 e^{-\alpha^2 z_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_2 e^{-\alpha^2 z_2^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{+\infty} r dr e^{-\alpha^2 r^2} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

¹ У нас сила трения пропорциональна скорости.

² Другими словами \mathbf{r} — относительное расстояние между зарядами. Однако при этом, мы считаем, что внутри системы движение заряда по-прежнему определяется силой упругости, а сила кулоновского притяжения «компенсируется».

где мы перешли к интегрированию на плоскости $\{z_1, z_2\}$ от декартовых переменных к полярным $z_1 = r \cos \phi$, $z_2 = r \sin \phi$, так что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-\alpha^2 z^2} = \left\{ 2\pi \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}.$$

В итоге, Фурье-образ единицы

$$\mathcal{I}(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{1}{4}\omega^2/\alpha^2}. \quad (6.3)$$

Это — четная функция от частоты, которая всюду стремится к нулю, кроме точки $\omega = 0$, где она стремится к бесконечности. Однако при бесконечно малом $\alpha \rightarrow +0$ Фурье-образ единицы вполне определен.

Основным свойством Фурье-образа единицы является значение интеграла этого Фурье образа с функцией от частоты, которая может быть разложена в ряд возле точки $\omega = 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \mathcal{I}(\omega) f(\omega) &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega) \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{1}{4}\omega^2/\alpha^2} = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \{f(0) + f'(0)\omega + \dots\} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{1}{4}\omega^2/\alpha^2} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(0) e^{-\frac{1}{4}\omega^2/\alpha^2} = f(0) \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \sqrt{4\pi} \alpha = 2\pi f(0). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Определим дельта-функцию Дирака через Фурье-образ единицы

$$2\pi \delta(\omega) = \mathcal{I}(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t - \alpha^2 t^2}. \quad (6.5)$$

Мы установили, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \delta(\omega) f(\omega) = f(0), \quad (6.6)$$

для достаточно «хорошей» функции $f(\omega)$. В дальнейшем, согласно общей договоренности, принято, что писать всякий раз громоздкое выражение с пределом $\alpha \rightarrow +0$ в явном виде при использовании дельта-функции Дирака не представляется удобным, но этот предел безусловно необходимо иметь в виду для придания строгости математическому формализму выкладок с символом $\delta(\omega)$.

Тогда основная формула метода преобразования Фурье легко доказывается:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \mathcal{F}(\omega) e^{-i\omega t} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathcal{F}(t') e^{i\omega t'} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathcal{F}(t') \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathcal{F}(t') \delta(t-t') = \mathcal{F}(t). \end{aligned}$$

Таким образом, Фурье-образ функции позволяет восстановить саму функцию с помощью обратного преобразования Фурье.

К основным свойствам дельта-функции Дирака относят

- смену масштаба:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x),$$

как следствие четности дельта-функции с учетом элементарной замены переменных в интеграле с дельта-функцией $dx = \frac{1}{|a|} d(|a|x)$,

- вычисление Фурье-образ производной $\dot{F}(t) \mapsto -i\omega \mathcal{F}(\omega)$, в результате интегрирования по частям (конечные члены на границах интеграла равны нулю из-за наличия $e^{-\alpha^2 t^2}$) или просто из записи производной по времени для обратного преобразования Фурье:

$$\dot{F}(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \mathcal{F}(\omega) e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} (-i\omega) \mathcal{F}(\omega) e^{-i\omega t}.$$

Отсюда следует, что дифференциальные уравнения для функции сводятся к алгебре для Фурье-образа этой функции.

29.2. Сечение рассеяния электромагнитной волны

Применим преобразование Фурье в задаче о квазиупругом диполе в электрическом поле.

$$\mathbf{r}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \mathbf{r}(\omega), \quad \mathbf{r}^*(\omega) = \mathbf{r}(-\omega).$$

Тогда дифференциальное уравнение становится алгебраическим, поскольку

$$\dot{\mathbf{r}}(t) \longrightarrow -i\omega \mathbf{r}(\omega),$$

так что

$$[(-i\omega)^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2] \mathbf{r}(\omega) = \frac{e}{m} \mathcal{E}_0(\omega).$$

Решение

$$\mathbf{r}(\omega) = \frac{e}{m} \mathcal{E}_0(\omega) \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

удовлетворяет условию вещественности. Фурье-образ второй производной по времени дипольного момента равен

$$\ddot{\mathbf{d}}(t) = e \ddot{\mathbf{r}}(t) \longrightarrow -\frac{e^2}{m} \mathcal{E}_0(\omega) \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}.$$

Отсюда, с учетом выражения для электрического и магнитного полей в волновой зоне

$$|\mathcal{E}| = |\mathcal{H}| = \frac{1}{c^2 r} |\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}| = \frac{1}{c^2 r} |\ddot{\mathbf{d}}| \sin \psi$$

и потока энергии в рассеянной волне

$$|\mathcal{S}| = \frac{c}{4\pi} |\mathcal{E}|^2,$$

получаем интенсивность излучения $d^2\mathcal{J} = |\mathcal{S}| r^2 d\Omega$:

$$d^2\mathcal{J}(\omega) = \frac{c}{4\pi} \frac{e^4}{m^2 c^4} \mathcal{E}_0^2(\omega) \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \sin^2 \psi \, d \cos \theta \, d\phi.$$

Здесь ψ — угол между вектором электрического поля и волновым вектором излученной волны, а θ и ϕ — стандартные углы в полярных координатах для волнового вектора уходящей волны.

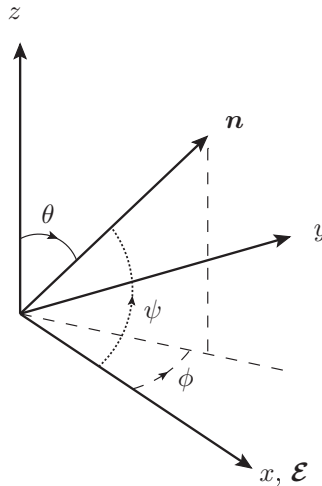


Рис. 6.2: Обозначения углов в случае линейной поляризации электромагнитной волны.

Ясно, что такая формула справедлива, только если вектор электрического поля ориентирован вдоль определенной оси (на рис. 6.2 волновой вектор падающей волны направлен вдоль оси z , электрическое поле — вдоль оси x), т.е. когда *падающая волна линейно поляризована*.

Тогда

$$\sin^2 \psi = 1 - \cos^2 \psi,$$

причем $\cos \psi$ задает проекцию волнового вектора рассеянной волны на ось электрического поля:

$$\cos \psi = \sin \theta \cos \phi,$$

так что распределение интенсивности излучения по углам —

$$d^2\mathcal{J}(\omega) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^4}{m^2 c^3} \mathcal{E}_0^2(\omega) \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \times \\ (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi) d \cos \theta d \phi. \quad (6.7)$$

Поток энергии в падающей волне

$$S_0 = \frac{c}{4\pi} \mathcal{E}_0^2(\omega),$$

и, в итоге, дифференциальное сечение рассеяния линейно поляризованной электромагнитной волны на квазиупругом диполе

$$\frac{d^2\sigma}{d \cos \theta d \phi} = \frac{e^4}{m^2 c^4} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi). \quad (6.8)$$

Величина

$$r_e \equiv \frac{e^2}{mc^2}$$

имеет размерность длины и называется электромагнитным радиусом. В самом деле, определение можно переписать в виде

$$\frac{e^2}{r_e} = mc^2,$$

т.е. электромагнитный радиус частицы — это такой радиус, на котором электростатическая энергия частицы равна ее массе покоя. Для электрона $r_e \approx 2.8 \cdot 10^{-13}$ см.

Интегрируя (6.8) по углу ϕ , получаем

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = 2\pi r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta\right) \\ = \pi r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} (1 + \cos^2 \theta).$$

И наконец, после интегрирования по $\cos \theta$ находим полное сечение:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (6.9)$$

Для свободной частицы, т.е. когда диссипация и сила упругости равны нулю, $\gamma = \omega_0 = 0$, полное сечение является постоянным, независящим от частоты падающей волны:

$$\sigma_{\text{free}} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \quad (6.10)$$

есть сечение Томсона.

В общем случае поведение полного сечения имеет характерный профиль (см. рис. 6.3):

- на частотах, много больших ω_0 , сечение асимптотически стремится к сечению свободной частицы,
- на частотах, близких к нулю, сечение стремится к нулю:

$$\sigma \approx \sigma_{\text{free}} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4,$$

рэлеевское рассеяние (“синий” край спектра рассеивается существенно сильнее “красного”, так что небо имеет голубой цвет рассеянного в атмосфере солнечного света),

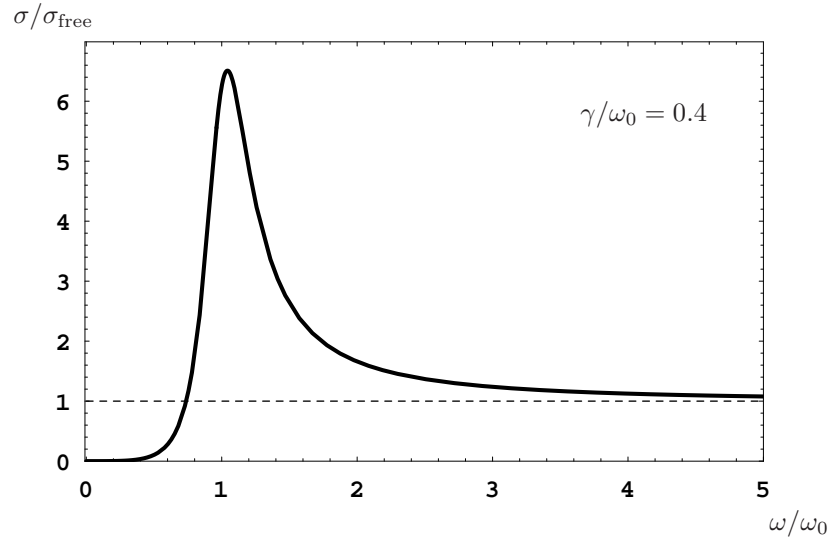


Рис. 6.3: Пример поведения сечения рассеяния монохроматического света на квазиупругом диполе в зависимости от частоты падающей волны ω . Параметр затухания квазиупругого диполя пропорционален частоте собственных колебаний ω_0 : $\gamma = 0.4 \omega_0$.

- при частотах, близких к ω_0 , сечение имеет резонансный характер с шириной, определяемой параметром диссипации.

В случае произвольной поляризации света угловое распределение задается угловой зависимостью величины

$$\mathcal{H}^2 \sim (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}})^2 \sim (\mathbf{n} \times \mathcal{E}_0)^2 \sim (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_\perp)^2,$$

где вектор поперечной поляризации связан с вектором электрического поля:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} \sim \boldsymbol{\epsilon}_\perp.$$

Для простоты сравнения со случаем линейной поляризации будем считать вектор поляризации единичным. Рассмотрим *естественно поляризованный свет*. Выбирая ось z вдоль волнового вектора падающей волны \mathbf{k}_0 , перечислим свойства вектора поляризации для естественного света:

1. единичная нормировка:

$$\boldsymbol{\epsilon}_\perp = a_x \mathbf{e}_1 + a_y \mathbf{e}_2, \quad |a_x|^2 + |a_y|^2 = 1,$$

2. поперечность:

$$\boldsymbol{\epsilon}_\perp \cdot \mathbf{k}_0 = 0,$$

3. естественность, т.е. равновероятность обеих поперечных поляризаций:

$$\langle |a_x|^2 \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle |a_y|^2 \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle a_x a_y \rangle = 0.$$

Эти свойства позволяют нам вычислить *тензор поляризации естественного света*

$$\Pi^{\alpha\beta} = \langle \epsilon_\perp^\alpha \epsilon_\perp^{*\beta} \rangle = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_1^\alpha \mathbf{e}_1^\beta + \mathbf{e}_2^\alpha \mathbf{e}_2^\beta).$$

Исходя из этого выражения, тензор поляризации можно переписать в виде, свободном от выбора базиса:

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\beta} - \mathbf{q}_\alpha \mathbf{q}_\beta), \quad \mathbf{q} = \frac{\mathbf{k}_0}{k_0}. \quad (6.11)$$

Отметим, что такое же выражение для тензора поляризаций фотона получается усреднением по двум поперечным поляризациям фотона, записанным в виде

$$\Pi^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\lambda^\alpha \epsilon_\lambda^{*\beta},$$

если учесть условия нормировки и поперечности

$$\Pi_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^2 \boldsymbol{\epsilon}_\lambda \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\lambda^* = 1, \quad \Pi_{\alpha\beta} q^\alpha = 0,$$

что, по своему смыслу, отвечает усреднению единичного вектора на окружности.

Тогда

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_\perp)^2 \rangle &= \epsilon_{\mu\nu\alpha} n_\nu \epsilon_{\mu\nu'\beta} n_{\nu'} \Pi_{\alpha\beta} = \\ &= (\delta_{\nu\nu'} \delta_{\alpha\beta} - \delta_{\nu\beta} \delta_{\alpha\nu'}) n_\nu n_{\nu'} \Pi_{\alpha\beta} = \mathbf{n}^2 \Pi_{\alpha\alpha} - n_\alpha n_\beta \Pi_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Далее

$$\mathbf{n}^2 = 1, \quad \Pi_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}(3 - 1) = 1,$$

и

$$n_\alpha n_\beta \Pi_{\alpha\beta} = n_\alpha n_\beta \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\beta} - \mathbf{q}_\alpha \mathbf{q}_\beta) = \frac{1}{2} (\mathbf{n}^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{q})^2),$$

так что

$$\langle (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\epsilon}_\perp)^2 \rangle = \frac{1}{2} (1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{q})^2) = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta), \quad (6.12)$$

где мы ввели угол θ между волновыми векторами падающей и рассеянной волн.

Формула (6.12) решает задачу об угловой зависимости сечения рассеяния естественного света на квазиупругом диполе. Что касается полного сечения, то для линейно поляризованного света мы усреднили по углу ϕ величину

$$\sin^2 \psi = 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta),$$

что в точности совпадает с формой распределения, полученной для естественно поляризованного света, и, следовательно, полные сечения для рассеяния линейно и естественно поляризованного света совпадают.

30. Функция Грина классического осциллятора

Рассмотрим общий метод решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений методом функций Грина на примере осциллятора под воздействием внешней силы в полной аналогии с квазиупругим диполем:

$$(\partial_t^2 + \omega_0^2 + \gamma \partial_t) q(t) = f(t), \quad \gamma \rightarrow +0.$$

Решение представляет собой сумму общего решения однородного уравнения $q_0(t)$, свободных колебаний, и частного решения неоднородного уравнения $\tilde{q}(t)$, вынужденных колебаний,

$$q(t) = q_0(t) + \tilde{q}(t), \quad (\partial_t^2 + \omega_0^2) q_0(t) = 0,$$

При этом, свобода выбора общего решения однородного уравнения позволяет удовлетворить начальным условиям задачи, ограничив эту свободу наложением подходящих граничных данных в зависимости от определения частного решения неоднородного уравнения.

Используя преобразование Фурье,

$$\mathcal{Q}_0(\omega) = \int dt e^{i\omega t} q_0(t),$$

найдем для свободного решения

$$\mathcal{Q}_0(\omega)(\omega_0^2 - \omega^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Q}_0(\omega) = c_+ \delta(\omega - \omega_0) + c_- \delta(\omega + \omega_0).$$

Коэффициенты положительно- и отрицательно-частотных мод колебаний c_\pm определяются из граничных условий задачи:

$$q_0(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \mathcal{Q}_0(\omega) = c_+ e^{-i\omega_0 t} + c_- e^{i\omega_0 t}.$$

Аналогично для вынужденных колебаний

$$\tilde{\mathcal{Q}}(\omega) = \frac{\mathcal{F}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}, \quad \gamma \rightarrow +0, \quad (6.13)$$

где $\mathcal{F}(\omega)$ — Фурье-образ внешней силы $f(t)$.

Вычислим в общем виде обратное преобразование Фурье для произведения двух Фурье-образов:

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \mathcal{F}_1(\omega) \mathcal{F}_2(\omega) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int dt_1 e^{i\omega t_1} F_1(t_1) \int dt_2 e^{i\omega t_2} F_2(t_2).$$

Интегрирование по ω дает

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} e^{i\omega t_1} e^{i\omega t_2} = \delta(t_1 + t_2 - t),$$

так что интеграл по t_1 приводит к следующему результату:

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \mathcal{F}_1(\omega) \mathcal{F}_2(\omega) = \int dt_2 F_1(t - t_2) F_2(t_2),$$

т.е. обратное преобразование произведения Фурье-образов $F_1(t)$ и $F_2(t)$ дает, как говорят, свертку этих функций.

Отсюда следует, что, согласно (6.13), вынужденное колебание можно представить в виде

$$\tilde{q}(t) = \int dt' \mathcal{G}(t - t') f(t'), \quad (6.14)$$

где функция Грина

$$\mathcal{G}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}, \quad \gamma \rightarrow +0. \quad (6.15)$$

Заметим, что функция Грина — это частное решение уравнения для вынужденных колебаний при $\mathcal{F}(\omega) \mapsto 1$, т.е. при $f(t) \mapsto \delta(t)$:

$$(\partial_t^2 + \omega_0^2 + \gamma \partial_t) \mathcal{G}(t)(t) = \delta(t), \quad \gamma \rightarrow +0. \quad (6.16)$$

Интеграл в (6.15) легко взять, если разложить дробь

$$\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} = \frac{1}{2\omega_0} \left\{ \frac{1}{\omega_0 - \omega - i0} + \frac{1}{\omega_0 + \omega + i0} \right\}.$$

Тогда интегрирование по частоте вдоль линии от $-\infty$ до $+\infty$ можно замкнуть при $t > 0$ по полуокружности в нижней полуплоскости комплексной переменной ω (см. рис. 6.4), поскольку в этой полуплоскости $\Im m \omega < 0$, а значит, вклад по полуокружности бесконечно мал из-за затухания экспоненты

$$e^{-i\omega t} \mapsto e^{+t \Im m \omega} e^{-i t \Re e \omega} \rightarrow 0, \quad t > 0.$$

При $t < 0$ контур замыкается в верхней полуплоскости, где нет полюсов подынтегрального выражения, так что по теореме Коши $\mathcal{G}(t < 0) = 0$. При положительных интервалах времени та же теорема Коши с учетом интегрирования по часовой стрелке дает

$$\mathcal{G}(t) = -\vartheta(t) \frac{i}{2\omega_0} \{-e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t}\} = \vartheta(t) \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t), \quad (6.17)$$

где $\vartheta(t)$ — ступенька Хевисайда:

$$\vartheta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

В самом деле, дифференцирование дает

$$\partial_t \vartheta(t) = \delta(t), \quad \partial_t^2 \vartheta(t) = \delta'(t),$$

где производная четной дельта-функции Дирака дает нечетную функцию, так что $\delta'(t) \sin(\omega_0 t) = 0$, а значит,

$$\partial_t^2 \mathcal{G}(t) = \frac{1}{2\omega_0} \{-\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) \vartheta(t) + 2\delta(t) \omega_0 \cos(\omega_0 t) + \delta'(t) \sin(\omega_0 t)\} = -\omega_0^2 \mathcal{G}(t) + \delta(t),$$

как и должно быть для функции Грина.

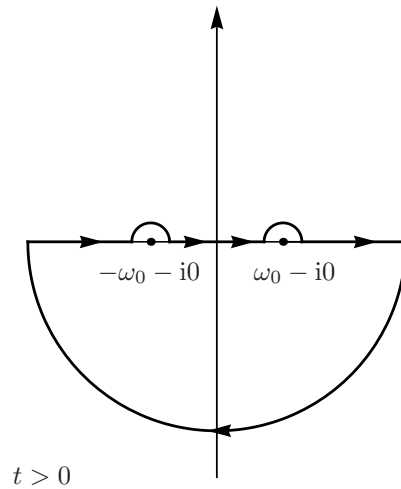


Рис. 6.4: Контур интегрирования по частоте ω при положительном времени для вынужденных колебаний с запаздывающими граничными условиями.

Выбранный порядок обхода полюсов соответствует определению запаздывающей функции Грина, равной нулю в прошлом. Другие способы обхода полюсов приведут к иным функциям Грина и иным частным решениям для вынужденных колебаний. Наряду с полученным нами запаздывающим решением вводят причинную функцию Грина³, полюса которой расположены в нижней полуплоскости для положительно-частотного решения и в верхней для отрицательно-частотного:

$$\mathcal{G}_c(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i0} = \frac{i}{2\omega_0} e^{-i\omega_0|t|}. \quad (6.18)$$

Тогда разность двух частных решений

$$\tilde{q}(t) - \tilde{q}_c(t) = \int dt' \mathcal{G}(t-t') f(t') - \int dt' \mathcal{G}_c(t-t') f(t'), \quad (6.19)$$

удовлетворяет уравнению для свободных колебаний

$$(\partial_t^2 + \omega_0^2) \{ \tilde{q}(t) - \tilde{q}_c(t) \} = 0,$$

а значит, решения с различными функциями Грина отличаются лишь на решение в виде свободных колебаний, хотя коэффициенты при положительно- и отрицательно-частотных модах могут быть и комплекснозначными. Этот факт несколько не изменит вид решения, удовлетворяющего заданным в задаче граничным условиям: функцию Грина можно выбрать любой, важно подобрать затем подходящее решение свободных колебаний для заданных граничных условий — начальных данных. В квантовой теории поля используют причинную функцию Грина, поскольку она задает вынужденные колебания, инвариантные относительно обращения стрелы времени. В классической теории поля с задачами на излучение, когда в прошлом нет свободных колебаний, более удобно пользоваться запаздывающей функцией Грина, так как тогда дополнительный вклад в решения уравнений движений в виде свободных колебаний тривиален, он равен нулю.

³Вычислите самостоятельно.

Литература

- [1] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *“Механика”*. «Наука»: Москва, 1988.
- [2] В.В. Киселев. *“Квантовая механика. Курс лекций”*. МЦНМО: Москва, 2009.
- [3] В.И. Арнольд. *“Математические методы классической механики”*. УРСС: Москва, 2003.
- [4] Б.Л. ван дер Варден. *“Алгебра”*. «Наука»: Москва, 1979.
- [5] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. *“Современная геометрия”*. «Наука»: Москва, 1986.
- [6] Ю.М. Белоусов, С.Н. Бурмистров, А.И. Тернов. *“Задачи по теоретической физике”*. «Интеллект»: Долгопрудный, 2013.
- [7] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *“Теория поля”*. «Наука»: Москва, 1976.
- [8] Дж. Джексон. *“Классическая электродинамика”*. «Мир»: Москва, 1965.
- [9] В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин. *“Современная электродинамика. Часть 1. Микроскопическая теория”*. 2-е издание, исправленное. НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”: Ижевск, 2005.
- [10] В.В. Киселев. *“Релятивистская динамика и теория поля. Курс лекций”*, 2013, интернет - ресурс: sites.google.com/site/teorpolpfe/info-fajly
- [11] А.А. Соколов, И.М. Тернов, В.Ч. Жуковский, А.В. Борисов. *“Квантовая электродинамика”*. «Изд-во МГУ»: Москва, 1983.
- [12] А.А. Соколов, И.М. Тернов, В.Ч. Жуковский, А.В. Борисов. *“Калибровочные поля”*. «Изд-во МГУ»: Москва, 1986.
- [13] В.А. Рубаков. *“Классические калибровочные поля: Бозонные теории”*. «КомКнига»: Москва, 2005.
- [14] В.А. Рубаков. *“Классические калибровочные поля: Теории с фермионами. Некоммутативные теории”*. «КомКнига»: Москва, 2005.