Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”
Федеральное государственное бюджетное учреждение
Государственный научный центр Российской Федерации
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

На правах рукописи

Сапонов Павел Алексеевич

КВАНТОВЫЕ СИММЕТРИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ФИЗЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

01.04.02 — Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Протвино — 2015

Работа выполнена в ФГБУ ГНЦ ИФВЭ НИЦ “Курчатовский институт” (г. Протвио)

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук Н.А. Славнов (Отдел теоретической физики Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Москва),

доктор физико-математических наук С.З. Пакуляк (Лаборатория теоретической физики ОИЯИ, Дубна),

доктор физико-математических наук П.К. Силаев (физический факультет МГУ, Москва).

Ведущая организация: Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, Черноголовка.

Научный консультант: доктор физико-математических наук А.В. Разумов (Отдел теоретической физики ИФВЭ, Протвино).

Защита диссертации состоится “____” __________ 2015 г. в ____ ч. на заседании Диссертационного совета Д 201.004.01 при Институте физики высоких энергий (142281, г. Протвино, Московской области).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИФВЭ.

Автореферат разослан “____” __________ 2015 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета
Д 201.004.01 Ю.Г. Рябов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы.

Первые примеры квантовых матричных алгебр возникли в работах В. Дринфельда [D1] и Н. Решетихина, Л. Тахтаджяна и Л. Фаддеева [RTF], где рассматривались алгебры квантовых функций на группах. Вскоре после этого был введен в рассмотрение другой важный класс квантовых матричных алгебр (см., например, [KSkl, KS]) — так называемые алгебры уравнения отражения. Эти алгебры представляют собой математическую основу интегрируемости различных моделей математической физики: квантовых спиновых цепочек, решеточных двумерных статистических моделей, а также моделей, конфигурационное пространство которых содержит границы. В дальнейшем квантовые матричные алгебры стали применяться для построения некоммутативной геометрии (условно говоря, пространств с некоммутирующими координатами) и соответствующих симметрий. Одним из самых первых примеров были конструкции некоммутативного пространства Минковского и квантовой группы Лоренца. Затем стали развиваться различные версии дифференциального исчисления на квантовых группах, что потребовало введения понятия квантованных векторных полей и производных, внешнего дифференциала, дифференциальных форм, представляющих собой обобщение на некоммутативный случай соответствующих объектов классической дифференциальной геометрии.

Все эти приложения потребовали подробного изучения структуры квантовых матричных алгебр и их представлений. Основные результаты диссертации посвящены решению некоторых вопросов из этой области.

Цель работы.

Цели диссертационной работы можно объединить в три основных группы:

- Исследование алгебраической структуры алгебр уравнения отражения $GL(m|n)$ типа: тождества Гамильтона-Кэли, спектр квантовой матрицы и спектральное расширение центра алгебры, структура твистованного коумножения.

- Построение теории конечномерных представлений, вычисление спектра центральных элементов.

- Приложение к некоммутативной геометрии: определение квантового многообразия и дифференциально-геометрических структур на нем: векторных полей, частных производных по некоммутативным координатам, инвариантных дифференциальных операторов высших порядков (один из примеров — оператор Лапласа).

Результаты, представляемые к защите.

1. Для широкого класса квантовых матричных алгебр, параметризуемых R-матрицами $GL(m|n)$ типа, найдены матричные тождества, обобщающие известные тождества Гамильтона-Кэли матричной алгебры. Коэффициенты тождества представляют собой квантовые функции Шура, правило их перемножения совпадает с классическим правилом Литтлвуда-Ричардсона.

2. Найдены серии билинейных тождеств на симметрические функции Шура. С помощью этих тождеств получена факторизация полинома Гамильтона-Кэли, что позволило инвариантным образом ввести понятия четных и нечетных собственных значений квантовой матрицы. Найдена параметризация центра квантовой матричной алгебры в терминах спектральных значений.

3. Построена квазитензорная категория конечномерных представлений специального класса квантовых матричных алгебр — алгебр уравнения отражений. Найдено правило перемножения конечномерных модулей на основе твистованного коумножения в алгебре.

Вычислен спектр операторов Казимира в конечномерных модулях, параметризуемых одностолбцовыми и однострочными диаграммами Юнга.

4. Введено понятие квантового многообразия (пространства с некоммутативными координатами) — квантованной орбиты коприсоединенного действия группы Ли $GL(n)$ на пространстве $gl^*(n)$ — дуальном алгебре Ли $gl(n)$. Алгебра функций на таком многообразии задается в виде фактора алгебры уравнения отражений по идеалу, порожденному полиномиальными соотношениями на центральные элементы.

5. Введены понятия касательных векторов и инвариантных дифференциальных операторов, действующих на функции на многообразии. Важным примером такого оператора является оператор Лапласа. Построена алгебра некоммутативных частных производных, найдено модифицированное правило Лейбница, позволяющее вычислять действие этих производных на некоммутативных функциях.

6. В качестве приложения математических конструкций некоммутативной геометрии рассмотрены модели атома водорода в некоммутативном пространстве и свободные полевые уравнения Клейна-Гордона и Дирака. Для атома водорода вычислены поправки в спектр и волновую функцию, происходящие от некоммутативности пространства, для свободных полевых уравнений найдены решения в виде аналогов плоских волн.

Публикации.

Основные результаты диссертации изложены в 14 журнальных публикациях. Все журналы входят в список, одобренный ВАК:

1. D. Gurevich, P. Saponov, *Quantum line bundles via Cayley-Hamilton identity*, Journal of Physics A: Math. Gen. **34** (2001) 4553 – 4569.

2. D. Gurevich, P. Saponov, *Quantum line bundles on a noncommutative sphere* Journal of Physics A: Math. Gen. **35** (2002) 9629–9643.

3. Д. Гуревич, П. Сапонов, *Неодномерные представления алгебры уравнения отражений*, Теоретическая и математическая физика, том **139** (2004) 45–61.

4. P. Saponov, *The Weyl approach to the representation theory of reflection equation algebra*, Journal of Physics A: Math. Gen. **37** (2004) 5021–5046.

5. Д.И. Гуревич, П.Н. Пятов, П.А. Сапонов, *Теорема Гамильтона-Кэли для квантовых матричных алгебр $GL(m|n)$ типа.* Алгебра и Анализ, том **17** (2005) 157–179.

6. Д.И. Гуревич, П.Н. Пятов, П.А. Сапонов, *Квантовые матричные алгебры $GL(m|n)$ типа II: структура характеристической подалгебры и ее спектральная параметризация*, Теоретическая и Математическая Физика, том **147** (2006) 14–46.

7. D. Gurevich, P. Saponov,*Geometry of non-commutative orbits related to Hecke symmetries*, Contemporary Mathematics, **433** (2007) 209–250.

8. D.I. Gurevich, P.N. Pyatov, P.A. Saponov,*Representation theory of (modified) reflection equation algebra of GL(m|n) type*, Алгебра и Анализ, том **20** (2008) 70–133.

9. Д. Гуревич, П. Пятов, П. Сапонов, *Спектральная параметризация для степенных сумм квантовых суперматриц*, Теоретическая и математическая физика, том **159** (2009) 206–218.

10. D. Gurevich, P. Saponov, *Braided affine geometry and q-analogs of wave operators*, Journal of Physics A: Math. and Theor., **42** (2009) 313001.

11. D. Gurevich, P. Pyatov, P. Saponov, *Bilinear identities on Schur symmetric functions*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics **17**, Supplementary Issue 1 (2010) 31–48.

12. D.I. Gurevich, P.A. Saponov, *Generic super-orbits in* $gl(m|n)^*$ *and their braided counterparts*, Journal of Geometry and Physics **60** (2010) 1411-1423.

13. D. Gurevich, P. Pyatov, P. Saponov, *Braided Differential Operators on Quantum Algebra*, Journal of Geometry and Physics **61** (2011) 1485-1501.

14. D. Gurevich, P.Saponov, *Braided algebras and their applications to Noncommutative Geometry*, Advances in Applied Mathematics **51** (2013) 228–253.

Структура и объем диссертации. Работа изложена на 162 страницах, состоит из введения, четырех глав, заключения и двух приложений. Список цитируемой литературы содержит 112 ссылок.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение содержит краткий обзор темы, мотивировки и общее описание результатов, представленных к защите.

Первая глава посвящена структуре квантовой матричной алгебры. После введения определения квантовой матричной алгебры и иллюстрации его примерами алгебры квантованных функций на группе и алгебры уравнения отражений рассматривается так называемая характеристическая подалгебра, элементы которой порождаются следующим образом.

Рассмотрим подпространство $\mathrm{Char}(R,F) \subset \mathcal{M}(R,F)$, являющееся линейной оболочкой единицы и элементов вида

$$y(x^{(k)}) = \mathrm{Tr}_{R(1\dots k)}(M_{\overline{1}} \dots M_{\overline{k}}\, \rho_R(x^{(k)})) \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

где $x^{(k)}$ — всевозможные элементы алгебры $\mathcal{H}_k(q)$. Символом $\mathrm{Tr}_{R(1\dots k)}$ здесь обозначена операция взятия R-следа по пространствам с первого по k-е.

Пространство $\mathrm{Char}(R,F)$ является коммутативной подалгеброй алгебры $\mathcal{M}(R,F)$. Эту подалгебру мы будем называть характеристической.

Введем в рассмотрение два набора элементов характеристической подалгебры: $\{p_k(M)\}$ и $\{s_\lambda(M)\}$, элементы которых будем называть, соответственно, *степенными суммами* и *функциями Шура*. Для каждого целого $k \geq 1$ обозначим

$$p_k(M) := \mathrm{Tr}_{R(1\dots k)}(M_{\overline{1}} \dots M_{\overline{k}}\, R_{k-1} \dots R_1). \tag{2}$$

В случае, если R — R-матрица геккевского типа, для всякого разбиения $\lambda \vdash k$, $k = 1, 2, \dots$, обозначим

$$s_0(M) := 1, \quad s_\lambda(M) := \mathrm{Tr}_{R(1\dots k)}(M_{\overline{1}} \dots M_{\overline{k}}\, \rho_R(E^\lambda_\alpha)). \tag{3}$$

Выражение в правой части (3) не зависит от выбора индекса α матричной единицы.

Утверждение 1 *Для всякой квантовой матричной алгебры* $\mathcal{M}(R,F)$ *геккевского типа*

а) ее характеристическая подалгебра $\mathrm{Char}(R,F)$ *порождается единицей и степенными суммами* $p_k(M)$, $k = 1, 2, \dots$;

б) набор функций Шура $s_\lambda(M)$, $\lambda \vdash k$, $k = 0, 1, \dots$, *является линейным базисом* $\mathrm{Char}(R,F)$.

В классическом матричном анализе хорошо известна теорема Гамильтона-Кэли, которая утверждает, что для любой квадратной матрицы M с матричными элементами из поля $\mathbb{K}$, выполнено тождество

$$\Delta(M) \equiv 0, \tag{4}$$

где $\Delta(x) = \det(M - xI)$ — характеристический полином матрицы M. Если поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, то коэффициенты этого полинома являются элементарными симметрическими функциями собственных значений M. В дальнейшем для простоты мы полагаем $\mathbb{K}$ полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Одним из основных результатов первой главы является обобщение теоремы Гамильтона-Кэли на случай квантовых матричных алгебр $GL(m|n)$ типа.

Теорема 2 *Пусть $M = \|M_i^j\|_{i,j=1}^N$ — матрица образующих квантовой матричной алгебры $\mathcal{M}(R, F)$, задаваемой по паре совместимых, строго кособратимых R-матриц R и F, причем R есть R-матрица $GL(m|n)$ типа. В алгебре $\mathcal{M}(R, F)$ тождественно выполняется матричное соотношение*

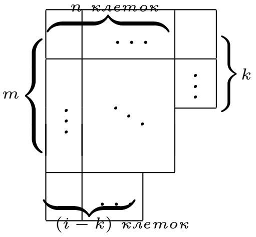
$$\sum_{i=0}^{n+m} M^{\overline{m+n-i}}\, C_i \,\equiv 0\,, \tag{5}$$

*где $M^{\bar{i}}$ есть i-я степень квантовой матрицы (см. определение (**??**)), а коэффициенты C_i являются линейными комбинациями функций Шура (см. определение (3)).*

Функции Шура, входящие в формулу для коэффициента C_i, являются однородными полиномами степени $(mn + i)$ по матричным компонентам M_i^j. Таким образом, любой матричный элемент левой части тождества (5) является однородным полиномом степени $(mn+m+n)$ по M_i^j.

Выражения для коэффициентов C_i в терминах функций Шура графически можно представить в виде

$$C_i = \sum_{k=\max\{0,(i-n)\}}^{\min\{i,m\}} (-1)^k q^{(2k-i)} \quad (6)$$



где под каждой из диаграмм Юнга подразумевается соответствующая ей функция Шура.

Далее в разделе рассматривается структура характеристической подалгебры и доказывается важное утверждение о произведении квантовых функций Шура.

Теорема 3 ([GPS3]) *Рассмотрим квантовую матричную алгебру $\mathcal{M}(R,F)$ Геккевского типа, генераторами которой являются компоненты матрицы M. Пусть параметр q удовлетворяет ограничению*

$$k_q = \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}} \neq 0, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Тогда умножение элементов (3) характеристической подалгебры $\mathrm{Char}(R,F)$ *подчиняется следующему правилу*

$$s_\lambda(M) s_\mu(M) = \sum_{\nu \vdash (k+n)} c^{\nu}_{\lambda\mu} s_\nu(M), \quad (7)$$

где $\lambda \vdash n$ и $\mu \vdash k$ есть произвольные разбиения, $s_\lambda(M), s_\mu(M) \in \mathrm{Char}(R,F)$ являются функциями Шура, а константы $c^{\nu}_{\lambda\mu}$ совпадают с коэффициентами Литтлвуда-Ричардсона ([Mac], раздел 1.9).

Квантовые функции Шура удовлетворяют серии билинейных тождеств (они оказваются верными и для классических функций Шура), что позволяет записать тождество Гамильтона-Кэли в факторизованном виде.

Теорема 4 (Факторизованное тождество Кэли-Гамильтона) *В предположениях теоремы 2 справедливо факторизованное тождество Гамильтона-Кэли*

$$\Big(\sum_{k=0}^{m}(-q)^k\, M^{\overline{m-k}} s_{[m|n]^k}(M)\Big) * \Big(\sum_{r=0}^{n} q^{-r}\, M^{\overline{n-r}} s_{[m|n]_r}(M)\Big) \equiv 0\,. \qquad (8)$$

Необходимым и достаточным условием эквивалентности тождеств (5) и (8) является обратимость функции Шура $s_{[m|n]}(M)$.

Факторизация тождества Кэли-Гамильтона указывает естественную параметризацию характеристической подалгебры квантовой матричной алгебры $GL(m|n)$ типа. А именно, рассмотрим гомоморфное отображение соответствующей характеристической подалгебры $\mathrm{Char}(R,F)$ в алгебру $\mathbb{C}[\mu,\nu]$ полиномов от двух наборов коммутирующих переменных $\mu := \{\mu_i\}_{1\le i\le m}$ и $\nu := \{\nu_j\}_{1\le j\le n}$. Гомоморфизм $\mathrm{Char}(R,F) \to \mathbb{C}[\mu,\nu] : s_\lambda(M) \mapsto s_\lambda(\mu,\nu)$, который мы будем называть *параметризационным отображением*, задается формулами[1]

$$\frac{s_{[m|n]^k}(M)}{s_{[m|n]}(M)} \;\mapsto\; \frac{s_{[m|n]^k}(\mu,\nu)}{s_{[m|n]}(\mu,\nu)} := \sum_{1\le i_1<\dots<i_m\le m} q^{-k}\mu_{i_1}\dots\mu_{i_k} = e_k(q^{-1}\mu)\,, \quad 1\le k\le m, \qquad (9)$$

$$\frac{s_{[m|n]_r}(M)}{s_{[m|n]}(M)} \;\mapsto\; \frac{s_{[m|n]_r}(\mu,\nu)}{s_{[m|n]}(\mu,\nu)} := \sum_{1\le j_1<\dots<j_r\le n} (-q)^r\nu_{j_1}\dots\nu_{j_r} = e_r(-q\nu)\,, \quad 1\le r\le n. \qquad (10)$$

Здесь $e_k(\cdot)$ обозначает ограничение элементарной симметрической функции $e_k \in \Lambda$ до элементарного симметрического полинома от конечного числа переменных — аргументов $e_k(\cdot)$ в приведенных выше формулах. Кроме того, параметризационное отображение требует обратимости функции $s_{[m|n]}(M)$. Степени параметра q введены в формулы (9) – (10) с целью упрощения записи тождества (11).

[1] Здесь мы дополнительно предполагаем алгебраическую независимость элементов $\frac{s_{[m|n]^k}(M)}{s_{[m|n]}(M)}$, $1\le k\le m$ и $\frac{s_{[m|n]_r}(M)}{s_{[m|n]}(M)}$, $1\le r\le n$.

Соотношения (9) и (10) задают гомоморфизм характеристической подалгебры $\mathrm{Char}(R,F)$ в подалгебру суперсимметрических полиномов от наборов переменных $\{q^{-1}\mu_i\}$ и $\{-q\nu_j\}$. Теперь нетрудно записать характеристический полином (5) в полностью факторизованном виде:

$$(s_{[m|n]}(M)\,I)^{*2} * \prod_{i=1}^{m}(M-\mu_i I) * \prod_{j=1}^{n}(M-\nu_j I) \equiv 0\,. \qquad (11)$$

Здесь все произведения понимаются в смысле квантового матричного умножения.

Приведенная выше полностью факторизованная форма тождества Кэли-Гамильтона служит основанием для интерпретации наборов $\{\mu_i\}$ и $\{\nu_j\}$ как, соответственно, *"четных" и "нечетных" собственных значений квантовой суперматрицы M.*

Завершается глава спектральной параметризацией характеристической подалгебры и выяснением условий на спектр квантовой матрицы, которые обеспечивают обратимость функции Шура $s_{[m|n]}$.

Вторая глава посвящена теории конечномерных представлений квантовых матричных алгебр специального вида — так называемых алгебр уравнения отражений $GL(m|n)$ типа. Одной из проблем теории представлений является сложность правила коумножения в алгебре уравнения отражений (так называемое твистованное коумножение), что, в свою очередь, влечет непростые правила перемножения конечномерных представлений рассматриваемой алгебры.

Начинается глава рассмотрением общей формы симметрий Гекке, задающих алгебру уравнения отражений, и построением на этой основе квазитензорной категории векторных пространств, в которых реализуются представления алгебры уравнения отражений.

Зафиксируем некоторую симметрию Гекке $R : V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ и рассмотрим R-симметрическую $\Lambda_+(V)$ и R-кососимметрическую $\Lambda_-(V)$ алгебры пространства V, которые определяются как следующие фактор-алгебры свободной тензорной алгебры $T(V)$

$$\Lambda_\pm(V) := T(V)/\langle(\mathrm{Im}(q^{\pm 1}\, I_{12} \mp R_{12})\rangle, \qquad I_{12} = I \otimes I\,. \tag{12}$$

Символ $\langle J\rangle$ будет в дальнейшем обозначать двусторонний идеал в $T(V)$, порожденный подмножеством $J \subset T(V)$.

Составим далее ряд Гильберта-Пуанкаре алгебр $\Lambda_\pm(V)$:

$$P_\pm(t) := \sum_{k\ge 0} t^k \,\dim\, \Lambda^k_\pm(V)\,, \tag{13}$$

где $\Lambda^k_\pm(V) \subset \Lambda_\pm(V)$ есть однородные компоненты степени k.

Решающую роль в классификации возможных форм симметрий Гекке играет следующее утверждение.

Утверждение 5 *Пусть R есть произвольная симметрия Гекке при некотором общем значении параметра q. Тогда имеют место следующие свойства рядов Гильберта-Пуанкаре:*

1. *Ряды Гильберта-Пуанкаре $P_\pm(t)$ связаны соотношением*

$$P_+(t)\, P_-(-t) = 1.$$

2. *Ряд Гильберта-Пуанкаре $P_-(t)$ (и следовательно $P_+(t)$) представляет собой рациональную функцию вида:*

$$P_-(t) = \frac{N(t)}{D(t)} = \frac{1 + a_1\, t + ... + a_m\, t^m}{1 - b_1\, t + ... + (-1)^n\, b_n\, t^n} = \frac{\prod_{i=1}^m (1 + x_i t)}{\prod_{j=1}^n (1 - y_j t)}\,, \tag{14}$$

где коэффициенты a_i и b_i есть натуральные числа, полиномы $N(t)$ и $D(t)$ взаимно просты и все вещественные числа x_i и y_i являются положительными.

3. *Если, кроме того, симметрия Гекке R кососбратима, то полиномы $N(t)$ и $D(-t)$ являются возвратными*[2].

[2]Напомним, что полином $p(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n$ с вещественными коэффициентами c_i называется *возвратным*, если $p(t) = t^n p(t^{-1})$ или, эквивалентно, $c_i = c_{n-i}$, $0 \le i \le n$.

Упорядоченная пара чисел $(m|n)$ из формулы (14) называется би-рангом симметрии R.

Обратимся теперь к некоторым важным следствиям Утверждения 5. Пусть симметрия Гекке R имеет би-ранг $(m|n)$. Как известно, с помощью симметрии R можно построить представления ρ_R алгебр Гекке $H_k(q)$ серии A_{k-1} (для $k \geq 2$) в однородных компонентах $V^{\otimes p} \subset T(V)$ для всех $p \geq k$:

$$\rho_R : \; H_k(q) \to \mathrm{End}(V^{\otimes p}), \quad p \geq k\,.$$

В представлении ρ_R примитивные идемпотенты алгебры Гекке $e_a^\lambda \in H_k(q)$, $\lambda \vdash k$, превращаются в проекционные операторы

$$\rho_R(e_a^\lambda) = E_a^\lambda(R) \in \mathrm{End}(V^{\otimes p}), \quad p \geq k\,, \tag{15}$$

индекс a перечисляет все стандартные таблицы Юнга (λ, a), которые могут быть построены по данному разбиению λ натурального числа k. Общее число стандартных таблиц, соответствующих разбиению λ, будем обозначать символом d_λ.

Всякое пространство $V^{\otimes p}$, $p \geq 2$, может быть разложено в прямую сумму собственных подпространств приведенных выше проекторов

$$V^{\otimes p} = \bigoplus_{\mu \vdash p} \bigoplus_{a=1}^{d_\mu} V_{(\mu,a)}, \qquad V_{(\mu,a)} = \mathrm{Im}(E_a^\mu)\,. \tag{16}$$

Поскольку проекторы E_a^μ, отличающиеся только значением индекса a, связаны обратимым преобразованием, то все подпространства $V_{(\mu,a)}$ с фиксированным разбиением μ и различными значениями a изоморфны друг другу.

При значениях параметра q из общего положения алгебра Гекке $H_k(q)$ изоморфна групповой алгебре $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_k]$ симметрической группы порядка k. Опираясь на этот факт, мы можем доказать следующий результат [GLS1, Ph]:

$$V_{(\lambda,a)}\otimes V_{(\mu,b)} = \bigoplus_{\nu}\bigoplus_{d_{ab}\in I_{ab}} V_{(\nu,d_{ab})} \cong \bigoplus_{\nu} c^{\nu}_{\lambda\mu}\, V_{(\nu,d_0)}\,, \qquad \lambda\vdash p,\ \mu\vdash k,\ \nu\vdash (p{+}k), \tag{17}$$

где неотрицательные целые числа $c^{\nu}_{\lambda\mu}$ представляют собой коэффициенты Литтлвуда-Ричардсона (см. [Mac]), индекс d_{ab} таблиц Юнга принимает значения из некоторого подмножества $I_{ab}\subset\{1,2,\dots,d_\nu\}$, которое зависит от значений исходных индексов a и b. Число d_0 в последнем равенстве относится к индексу *любой* фиксированной таблицы Юнга из множества (ν,d), $1\le d\le d_\nu$.

Примером подпространств $V_{(\lambda,a)}$ служат однородные компоненты $\Lambda^k_+(V)$ и $\Lambda^k_-(V)$ алгебр $\Lambda_\pm(V)$ (12). Они являются образами проекторов $E^{(k)}$ и $E^{(1^k)}$, отвечающих однострочным и одностолбцовым разбиениям (k) и (1^k) соответственно. Этот важный факт позволяет вычислить размерности над основным полем $\mathbb{K}$ всех пространств $V_{(\lambda,a)}$, при условии, что ряд Гильберта-Пуанкаре $P_-(t)$ известен. Поскольку все пространства $V_{(\lambda,a)}$, отвечающие одному разбиению λ изоморфны, мы будем обозначать их $\mathbb{K}$-размерности символом $\dim V_\lambda$.

Чтобы продвинуться дальше, нам будет необходимо приведенное ниже следствие Утверждения 5.

Следствие 6 *Пусть симметрия Гекке R имеет би-ранг $(m|n)$, и ряд Гильберта-Пуанкаре соответствующей алгебры $\Lambda_-(V)$ дается выражением* (14)*. Тогда размерности подпространств $V_{(k)}$ и $V_{(1^k)}$, определяемых разбиениями (k) и (1^k) для всех $k\in\mathbb{N}$, задаются формулами*

$$\dim V_{(k)} \;=\; s_{(k)}(x|y) := \sum_{i=0}^{k} h_i(x)e_{k-i}(y), \tag{18}$$

$$\dim V_{(1^k)} \;=\; s_{(1^k)}(x|y) := \sum_{i=0}^{k} e_i(x)h_{k-i}(y)\,, \tag{19}$$

где h_i и e_i являются соответственно полной симметрической и элементарной симметрической функциями своих аргументов.

Супер-симметрические функции Шура определяют значения размерностей $\dim V_\lambda$. Для формулировки соответствующего результата, нам необходимо еще одно определение.

Определение 7 Зафиксировав произвольные целые числа $m \geq 0$ и $n \geq 0$, рассмотрим разбиения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, удовлетворяющие ограничению $\lambda_{m+1} \leq n$. Множество всех таких разбиений будем обозначать символом $\mathsf{H}(m,n)$ и любое разбиение $\lambda \in \mathsf{H}(m,n)$ из этого множества будем называть *крюком* типа $\mathsf{H}(m,n)$.

Утверждение 8 ([Ph]) *Пусть симметрия Гекке R имеет би-ранг $(m|n)$. Тогда размерности $\dim V_\lambda$ подпространств, входящих в разложение (16), определяются следующими правилами:*

1. *Для любого разбиения $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathsf{H}(m,n)$ размерность $\dim V_\lambda \neq 0$ и выражается формулой*

$$\dim V_\lambda = s_\lambda(x|y)\,. \tag{20}$$

Здесь

$$s_\lambda(x|y) = \det \|s_{(\lambda_i - i + j)}(x|y)\|_{1 \leq i,j \leq k}\,,$$

где при $k \geq 0$ супер-симметрическая функция $s_{(k)}(x|y)$ определяется выражением (18), а при $k < 0$ $s_{(k)} := 0$.

2. *Для произвольного разбиения λ имеем*

$$\dim V_\lambda = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda \notin \mathsf{H}(m,n)\,.$$

Затем в главе строится квазитензорная категория векторных пространств V_λ, в которые будут наделены структурой модуля над алгеброй уравнения отражений. Центральным пунктом этой конструкции является расширение кососбратимой R-матрицы на дуальное пространство V^* (точнее, на прямую сумму $V \otimes V^*$):

Утверждение 9 *Пусть оператор Ψ является кособратным к R-матрице R . Определим расширение R до линейного оператора*

$$R : (V \oplus V^*)^{\otimes 2} \to (V \oplus V^*)^{\otimes 2}$$

(сохранив для расширенного оператора то же самое обозначение) в соответствии с правилами

$$\begin{array}{lcl} V \otimes V^* \to V^* \otimes V & : & R(x_i \otimes x^j) = x^k \otimes x_l \, (R^{-1})^{lj}_{ki} \, , \\ V^* \otimes V \to V \otimes V^* & : & R(x^j \otimes x_i) = x_k \otimes x^l \, \Psi^{kj}_{li} \, , \\ V^* \otimes V^* \to V^* \otimes V^* & : & R(x^i \otimes x^j) = x^k \otimes x^l \, R^{ji}_{lk} \, , \\ V \otimes V \to V \otimes V & : & R(x_i \otimes x_j) = x_k \otimes x_l \, R^{kl}_{ij} \, . \end{array} \tag{21}$$

Тогда расширенный оператор R будет R-матрицей, заданной в пространстве $(V \oplus V^*)^{\otimes 2}$, то есть, будет решением уравнения Янга-Бакстера в пространстве $(V \oplus V^*)^{\otimes 3}$.

Это позволяет определить генераторы алгебры уравнения отражений как вектора пространства $V \otimes V^*$ и задать неприводимое представление в пространствах V и V^*. Для задания представления в тензорных степенях $V^{\otimes k}$, важно знать структуру коумножения в алгебре.

Коумножение Δ осуществляет гомоморфизм алгебры модифицированного уравнения отражений в некоторую ассоциативную твистованную алгебру $\mathbf{L}(R_q)$, которая определяется следующим образом.

- Как векторное пространство над полем $\mathbb{K}$ алгебра $\mathbf{L}(R_q)$ изоморфна тензорному произведению двух копий алгебры модифицированного уравнения отражений

$$\mathbf{L}(R_q) = \mathcal{L}(R_q, 1) \otimes \mathcal{L}(R_q, 1) \, .$$

- Произведение в алгебре $\star : \mathbf{L}(R_q)^{\otimes 2} \to \mathbf{L}(R_q)$ определяется правилом:

$$(a_1 \otimes b_1) \star (a_2 \otimes b_2) := a_1 a_2' \otimes b_1' b_2 \, , \qquad a_i \otimes b_i \in \mathbf{L}(R_q) \, , \tag{22}$$

где $a_1 a'_2$ и $b_1 b'_2$ представляют собой обычные произведения элементов алгебры модифицированного уравнения отражений, а a'_1 и b'_1 есть результат действия твиста $R_{\rm End}$ на вектор $b_1 \otimes a_2$

$$a'_2 \otimes b'_1 := R_{\rm End}(b_1 \otimes a_2)\,. \tag{23}$$

Определим линейное отображение $\Delta : \mathcal{L}(R_q, 1) \to \mathbf{L}(R_q)$ следующим правилом:

$$\begin{aligned}
&\Delta(e_{\mathcal{L}}) := e_{\mathcal{L}} \otimes e_{\mathcal{L}}\\
&\Delta(l_i^j) := l_i^j \otimes e_{\mathcal{L}} + e_{\mathcal{L}} \otimes l_i^j - (q - q^{-1}) \textstyle\sum_k l_i^k \otimes l_k^j\\
&\Delta(ab) := \Delta(a) \star \Delta(b) \qquad \forall\, a, b \in \mathcal{L}(R_q, 1)\,.
\end{aligned} \tag{24}$$

Это отображение и является искомым коумножением.

Рассмотрим теперь вопрос о том, какие представления алгебры $\mathbf{L}(R_q)$ можно построить, основываясь на представлениях алгебры модифицированного уравнения отражений. Выбрав два эквивариантных модуля над алгеброй модифицированного уравнения отражений U и W с представлениями $\rho_U : \mathcal{L}(R_q, 1) \to \mathrm{End}(U)$ и $\rho_W : \mathcal{L}(R_q, 1) \to \mathrm{End}(W)$, построим отображение $\rho_{U\otimes W} : \mathbf{L}(R_q) \to \mathrm{End}(U \otimes W)$ по следующему правилу:

$$\rho_{U\otimes W}(a \otimes b) \triangleright (u \otimes w) = (\rho_U(a) \triangleright u') \otimes (\rho_W(b') \triangleright w)\,, \qquad a \otimes b \in \mathbf{L}(R_q)\,, \tag{25}$$

где символ $\triangleright$ обозначает действие оператора, а элемент(ы) b' и вектор(а) u' получаются действием соответствующего твиста (зависящего от b и u) категории $\mathrm{SW}(V_{(m|n)})$

$$u' \otimes b' := \mathsf{R}(b \otimes u)\,.$$

Теперь основная теорема теории конечномерных эквивариантных представлений алгебры уравнения отражений формулируется следующим образом.

Теорема 10 *Пусть U и W являются двумя модулями над алгеброй $\mathcal{L}(R_q, 1)$ с эквивариантными представлениями ρ_U и ρ_W. Тогда эквивариантное представление $\mathcal{L}(R_q, 1) \to \mathrm{End}(U \otimes W)$ задается правилом:*

$$a \mapsto \rho_{U \otimes W}(\Delta(a)), \qquad \forall\, a \in \mathcal{L}(R_q, 1), \tag{26}$$

где коумножение Δ и отображение $\rho_{U\otimes W}$ определены формулами (24) *и* (25) *соответственно.*

Завершается вторая глава вычислением спектра элементов Казимира (генераторов центра алгебры) в представлениях, параметризуемых однострочными и одностолбцовыми диаграммами.

Третья глава посвящена приложению алгебры уравнения отражений к построению некоммутативной геометрии. В начале главы дается определение квантованной полупростой орбиты коприсоединенного действия группы $GL(m)$ на пространстве $gl^*(n)$ — дуальном к алгебре Ли $gl(n)$. Как известно, такая орбита задается некоторой диагональной матрицей;

$$M = diag[\mu_1, \dots, \mu_m].$$

Вначале рассматривается случай орбиты общего положения, когда все собственные значения этой диагональной матрицы попарно различны. Тогда алгебра квантованных функций на этой орбите определяется как фактор алгебры уравнения отражений по идеалу, порожденному следующими полиномиальными соотношениями:

$$\chi(\sigma_k(L)) = \alpha_k = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le m} \mu_{i_1} \dots \mu_{i_k}, \tag{27}$$

где $\sigma_k(L)$ представляют собой элементарные симметрические функции (функции Шура, параметризованные столбцом высоты k). Следы степеней квантовой матрицы в этом факторе параметризуются следующим образом.

Утверждение 11 *Пусть центральные элементы $\sigma_k(\hat{L})$ параметризованы в соответствии с (27). Тогда справедливы формулы*

$$s_k(\hat{L}) \equiv \mathrm{Tr}_R(\hat{L}^k) = q^{1-m}\sum_{i=1}^{m}\mu_i^k d_i \tag{28}$$

где

$$d_i = \prod_{j\neq i}^{m}\frac{q\mu_i - q^{-1}\mu_j}{\mu_i-\mu_j}. \tag{29}$$

Если полупростая орбита характеризуется кратными собственными значениями μ_i с кратностями m_i, $1 \le i \le s$, где

$$m_1 + \cdots + m_s = m,$$

то квантование алгебры функций на такой орбите описывается следующим фактором алгебры уравнения отражений.

Во-первых, идеал, порождающий фактор, содержит матричные элементы минимального тождества Гамильтона-Кэли на квантовую матрицу:

$$(\hat{L}-\mu_1)\dots(\hat{L}-\mu_s) = 0.$$

Во-вторых, элементарные симметрических функции должны фиксироваться следующими соотношениями:

$$\chi(\sigma_k(L)) = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le m}\nu_{i_1}\dots\nu_{i_k},$$

где ν_i представляют собой набор m различных значений, строящихся по следующей схеме. Для каждого собственного значения μ_i с кратностью m_i определяетя “струна” значений по правилу

$$\nu_1 = \mu_i,\ \ \nu_2 = q^{-2}\nu_1 + q^{-1}\hbar,\ \ \nu_3 = q^{-2}\nu_2 + q^{-1}\hbar,\ \ \dots,\ \ \nu_{m_i} = q^{-2}\nu_{m_i-1} + q^{-1}\hbar. \tag{30}$$

Таким образом, в квантованной орбите все собственные значения становятся попарно различными. Классический предел отвечает значениям $q=1$, $\hbar = 0$.

Четвертая глава посвящена построению алгебры квантованных векторных полей и частных производных на алгебре уравнения отражений, трактуемой как алгебра квантовых функций на $gl^*(m)$. Ключевыми требованиями является инвариантность алгебры относительно (ко)действия RTT алгебры и плоскость деформации. Рассматривается конструкция инвариантных дифференциальных операторов, ограничение всего исчисления на квантованные орбиты, а также вводятся понятия квантового радиуса и радиальной части оператора Лапласа. Эти понятия позволяют обобщить на некоммутативное пространство некоторые модели теоретической и математической физики, таки как уравнения Шредингера в центральном поле, уравнения Клейна-Гордона и Максвелла для свободного поля.

Заключение содержит краткий обзор полученных результатов и обсуждение некоторых перспектив и нерешенных проблем.

Список литературы

[D1] Drinfel'd V.G., *'Quantum groups'*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, (Berkeley, Calif., 1986), 798–820, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[GLS1] Gurevich D., Leclercq R., Saponov P. *Traces in braided categories*, J. Geom. Phys. **44** (2002), 251–278.

[GPS3] Гуревич Д.И., Пятов П.Н., Сапонов П.А., *Квантовые матричные алгебры $GL(m|n)$ типа II: структура характеристической подалгебры и ее спектральная параметризация*, Теор. Мат. Физ., том **147**, №1 (2006), стр. 14–46.

[RTF] Решетихин Н.Ю., Тахтаджян Л.А, Фаддеев Л.Д., *'Квантование групп и алгебр Ли'*, Алгебра и анализ, том 1, вып. 1 (1989) 178–206.

[KSkl] Kulish P.P., Sklyanin E.K., *'Algebraic structures related to reflection equations'*. J. Phys. A **25** (1992) no.22, 5963–5975.

[KS] Kulish P.P., Sasaki R., *'Covariance Properties of Reflection Equation Algebras'*. Prog. Theor. Phys., **89** (1993) 741 – 761.

[Mac] Macdonald I. G., *'Symmetric Functions and Hall Polynomials (Oxford Mathematical Monographs)'*, Oxford University Press, 1998.

[Ph] Phung H.H. *Poincaré Series of Quantum spaces Associated to Hecke Operators*, Acta Math. Vietnam **24** (1999) 235–246.